

Warszawa, 31.01.2018

Prof. dr hab. inż. Krzysztof Wiśniewski  
Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN  
ul. Pawińskiego 5B, 02-106 Warszawa  
E-mail: [kwisn@ippt.gov.pl](mailto:kwisn@ippt.gov.pl)  
Tel. +48 (22) 826 1281, w. 328

## Recenzja

rozprawy doktorskiej mgra inż. Karola Daszkiewicza pt.  
**"Rodzina elementów hybrydowo-mieszanych w 6-parametrowej teorii powłok, analiza geometrycznie nieliniowa powłok o funkcyjnej zmienności materiału wzdłuż grubości"**

Dyscyplina naukowa: Budownictwo

### 1. Podstawa opracowania recenzji

- a. Pismo Dziekana Wydziału Inżynierii Lądowej i Środowiska Politechniki Gdańskiej, Prof. dra hab. inż. Krzysztofa Wilde, profesora zw. Politechniki Gdańskiej, z dnia 13.12.2017 r.
- b. Egzemplarz rozprawy doktorskiej, który otrzymałem dnia 2.01.2018 r.

### 2. Opis strony formalnej

Rozprawa liczy 182 strony i podzielona jest na 9 rozdziałów, uwzględniając Wstęp i Podsumowanie. Rozprawa zawiera wykaz oznaczeń, spis literatury liczący 385 pozycji i 4 załączniki. Zamieszczono w niej 68 rysunków. Rozprawa napisana jest językiem zrozumiałym i dość precyzyjnym. Tekst został bardzo starannie przygotowany od strony technicznej.

### 3. Omówienie zakresu rozdziałów i uwagi o charakterze dyskusyjnym

We **Wstępie** (10 stron) sformułowano dwa cele pracy:

- 1) opracowanie efektywnych 4-węzłowych hybrydowo-mieszanych powłokowych elementów skończonych w ramach nieliniowej 6-parametrowej teorii powłok,
- 2) sformułowanie równań konstytutywnych w teorii ośrodka Cosseratów do analizy geometrycznie nieliniowej powłok o funkcyjnej zmienności materiału (ang. Functionally Graded Material (FGM) ) wzdłuż grubości powłoki.

Oba powyższe cele uważam za bardzo istotne, nowoczesne i trudne do zrealizowania. Szczególnie cel pierwszy wydaje mi się bardzo ambitny i wydaje mi się, że wystarczający na doktorat.

Poza tym we Wstępie dokonano przeglądu literatury dotyczącej efektu blokady w powłokowych elementach skończonych, literatury dotyczącej hybrydowo-mieszanych

elementów skończonych oraz literatury n.t. powłok o funkcyjnej zmienności materiału wzdłuż grubości.

W **Rozdziale 2** (11 stron) omówiono zarys nieliniowej 6-parametrowej teorii powłok, w tym zasady zachowania, równania ruchu, zasadę prac wirtualnych i miary odkształceń w ujęciu opracowanym w znakomitej pracy Prof. J. Chróścielewskiego z 1992 roku [CHRÓŚCIELEWSKI J., MAKOWSKI J., STUMPF H. [1992]: Genuinely resultant shell finite elements accounting for geometric and material non-linearity. *IJNME*, **35**, 63-94]. Częściowo wykorzystano także książkę [CHRÓŚCIELEWSKI J., MAKOWSKI J., PIETRASZKIEWICZ W. [2004] *Statyka i dynamika powłok wielo-płatowych: Nieliniowa teoria i metoda elementów skończonych*]. Rozdział zakończono omówieniem warunków nierozdzielności odkształceń. Jest to rozdział wstępny, z punktu widzenia zamierzeń pracy, lecz został bardzo dobrze opracowany.

Uzupełnienie tego rozdziału stanowi Dodatek A, w którym opisano grupę obrotów  $SO(3)$ , zastosowaną parametryzację grupy obrotów oraz interpolację tensora obrotu i wektora wirtualnego obrotu.

W **Rozdziale 3** (11 stron) omówiono zasady wariacyjne. Wprowadzono zwartą notację macierzowo-operatorową i dokonano przeglądu zasad wariacyjnych, w ramach którego omówiono także zasadę wariacyjną Hu–Washizu. Następnie opisano modyfikację funkcjonału Hu–Washizu, potrzebną do sformułowania elementów częściowo mieszanych. Na końcu rozdziału dokonano linearyzacji zasad wariacyjnych, wyznaczając pierwszą i drugą wariację tych funkcjonałów, które wykorzystano do konstrukcji hybrydowo-mieszanych elementów powłokowych. Są to zagadnienia, które są niezbędne do opracowania rodziny hybrydowo-mieszanych elementów skończonych i zostały one poprawnie omówione.

**Rozdział 4** (16 stron) Rozdział ten jest poświęcony efektywnym (zastępczym) równaniom konstytutywnym dla 6-cio parametrowej teorii powłok, przy założeniu funkcyjnej zmienności materiału (ang. FGM) wzdłuż grubości powłoki. Jest to jeden z zasadniczych rozdziałów pracy.

Najpierw podano prawo konstytutywne dla materiału liniowo-sprężystego, które zawiera 2 współczynniki korekcyjne: współczynnika ścinania poprzecznego  $\alpha_s$ , który jest stosowany także w teorii powłok Mindlina-Reissnera dla ośrodka Cauchy’ego, oraz współczynnik owinięcia  $\alpha_t$ , który jest charakterystyczny dla 6-cio parametrowej teorii powłok. Dokonano krótkiego przeglądu prac dotyczących wyznaczania wartości tego ostatniego współczynnika. Omówione równania konstytutywne będą testowane w Rozdz. 6.

Następnie omówiono równania konstytutywne dla ośrodka Cosseratów w PSN, z dwoma dodatkowymi stałymi: długością charakterystyczną  $l$  oraz „Cosserat coupling number”  $N$ .

Porównano równania konstytutywne dla ośrodka Cosseratów z równaniami dla ośrodka Cauchy'ego.

Następnie zdefiniowano model powłoki z FGM, omawiając rozkłady po grubości wg modelu Voigta, Reussa i Tamury-Tomoty-Ozawy, ten pierwszy został wykorzystany w rozprawie. Sformułowano równania konstytutywne powłok FGM dla ośrodka Cosseratów, a macierze konstytutywne wyznaczono analitycznie i numerycznie w wyniku całkowania po grubości, przy czym wyprowadzenie całek zaprezentowano w Dodatku D. W końcu porównano równania konstytutywne otrzymane przez całkowanie względem środkowej powierzchni odniesienia i neutralnej powierzchni odniesienia. Równania te będą testowane w Rozdz. 7.

Uważam, że jest to jeden z najważniejszych i najciekawszych rozdziałów w rozprawie i związku z nim mam następujące uwagi.

1. Warto zauważyć, że pomimo, że FGM są traktowane w rozprawie jako innowacyjna alternatywa dla materiałów wielowarstwowych, to jednak znane są już od wielu lat, np. Doktorant podaje jako pierwszą pracę dotyczącą FGM [Shen, Bever, 1972] czyli opublikowaną 45 lat temu.
2. Metodologia określenia efektywnych wartości materiałowych dla FGM jest konceptualnie bardzo podobna do tej stosowanej dla płyt i powłok wielowarstwowych. Zaproponowano ją w pracy [Whitney, Pagano, 1970], gdzie wykorzystano cylindryczne zginanie i wprowadzono współczynnik korekcyjny na ścinanie poprzeczne  $k$ , podobnie jak wcześniej [Reissner, 1945] dla jednorodnych przekrojów. Dwa współczynniki korekcyjne na ścinanie wprowadzono w [Chow, 1971], a w [Whitney, 1973] zastosowano ją do laminatów o niesymetrycznych rozkładach warstw (LSS). Dodatkowo, [Rohwer, 1988] zastąpił 2 współczynniki na ścinanie poprzeczne przez efektywną macierz sztywności dla ścinania poprzecznego – było to niezbędne ze względu na różną orientację ortotropowych warstw. Biorąc to pod uwagę, warto zauważyć, że:
  - a) Uważam, że współczynnik korekcyjny na ścinanie, chociaż jego użycie jest historycznie uzasadnione, nie za wiele nam mówi w przypadku FGM i chyba wystarczy posługiwać się efektywną sztywnością ścinania poprzecznego  $\mathbf{G}_{\text{effe}}$ , podobnie jak posługujemy się efektywną sztywnością membranową  $\mathbf{C}$  i zgięciową  $\mathbf{D}$ .
  - b) Możemy obliczać sztywności zastępcze dla FGM definiując fikcyjne warstwy i używając tych samych procedur co dla kompozytów warstwowych. Dokładność obliczeń zależy od liczby fikcyjnych warstw i dla większej ich liczby jest bardzo dobra. Czas tego typu obliczeń jest zaniedbywalny więc nie ma jakichś specjalnych zalet całkowania analitycznego. Tej kwestii Doktorant nie porusza w rozprawie. Notabene ja używam program Mathematica i wszystkie całki

oznaczone dla FGM można policzyć w tym programie symbolicznie, bez całkowania numerycznego.

- c) Wiemy, że aby wyznaczyć rozkład naprężeń poprzecznych ścinających wzdłuż grubości powłoki musimy rozwiązać równanie różniczkowe 1-go rzędu, a więc możemy uwzględnić tylko jeden warunek brzegowy, np. na spodzie powłoki. W rozprawie nie przedyskutowano w jaki sposób uwzględniony jest wtedy warunek na górnym brzegu powłoki.
- 3) Wydaje mi się, że dla powłok FGM, podobnie jak dla powłok wielowarstwowych, należy zastosować tzw. uogólnioną kinematykę Mindlina-Reissnera z dodatkowym parametrem  $z_0$  oznaczającym położenie osi obojętnej, czyli  $\mathbf{e}_m = \boldsymbol{\varepsilon}_m + (z-z_0) \boldsymbol{\varepsilon}_b$ , gdzie  $z, z_0 \in [0, h]$ . (Zakres  $z, z_0$  może być też wybrany inaczej.) Wydaje mi się, że jest to sprawa nie wymagająca badań naukowych, lecz raczej lektury podręcznika z wytrzymałości materiałów. Oś obojętna odpowiada tzw. „modulus-weighted centroid” dla belek, który jest opisany np. w: [W. C. Young: Roark's Formulas for Stress & Strain, 6th Edition, 1984, McGraw-Hill, Rozdz. 7.2 “Composite Beams and Bimetallic Strips”, str.117] oraz [W. D. Piley: Formulas for Stress, Strain and Structural Matrices, Wiley 1984, Rozdz. 2.12 “Modulus-Weighted Properties for Composite Sections”, str. 38]. Warto, żeby Doktorant przedyskutował tę kwestię w czasie obrony pracy.
- 4) Szkoda, że Doktorant nie poruszył kwestii jakie są rzeczywiste rozkłady własności materiałowych po grubości powłoki, rzeczywiste tzn. wynikające z technologii tworzenia FGM (wymienionych np. we Wstępie do rozprawy) i uzyskiwane z badań eksperymentalnych. Mogłoby to rzucić światło na kwestię czy rozkłady potęgowe, które niewątpliwie są wygodne do całkowania analitycznego, odpowiadają rzeczywistym rozkładom. Jeżeli nie, to prawdopodobnie podejście będące modyfikacją metody stosowanej do powłok wielowarstwowych, i np. bazujące na wartościach modułu Younga określonych w punktach wzdłuż grubości powłoki, mogłoby okazać się wygodniejsze i dokładniejsze.
- 5) Uważam, że w rozprawie warto byłoby także umieścić wykresy rozkładów naprężeń po grubości powłoki odpowiadających poszczególnym wartościom wykładnika  $n$ , analogicznych do tych z Rys. 4.3. Poza tym przydałyby się też liczbowe wartości obliczonych efektywnych sztywności membranowych, zgięciowych i dla poprzecznego ścinania - przynajmniej dla jednego zestawu  $\{E_m, E_c, n\}$  – to pozwoliłoby ocenić poprawność procedury konstytutywnej.

W **Rozdziale 5** (27 stron) omówiono hybrydowo-mieszane elementy powłokowe opracowane przez Doktoranta, wykorzystujące bi-liniowe Lagrangowskie funkcje kształtu. Omówiono skorygowane współrzędne naturalne i współrzędne skośne, które zostały

zaimplementowane w opracowanych elementach. Następnie opisano dwustopniową interpolację odkształceń ścinających poprzecznych zaproponowaną w pracy [Dvorkin, Bathe, 1984] i skutecznie likwidującą zakleszczanie od ww. odkształceń (ang. *transverse shear locking*). Zasadniczą część rozdziału stanowi omówienie interpolacji niezależnych pól w funkcjonale Hu-Washizu. Doktorant sprawdził czy zaproponowane pola sił i momentów spełniają lokalne równania równowagi, a dla pola odkształceń powłoki sprawdził warunek ortogonalności zmiennej części do niezależnych naprężeń, a także zweryfikował warunki nierozdzielności odkształceń. Następnie wyprowadzane są macierze elementowe, omówiona kondensacja parametrów niezależnych odkształceń (części zmiennej) a także scharakteryzowano wyznaczanie macierzy stycznej i schematy aktualizacji przemieszczeń i rotacji. Rozdział zakończono zestawieniem tabelarycznym 8 opracowanych elementów, w tym 4 typu MIX i 4 typu SMIX, w którym wyszczególniono liczbę parametrów użytych w interpolacji niezależnych pól.

Uważam, że jest to jeden z najważniejszych i najciekawszych rozdziałów w rozprawie i związku z nim mam następujące uwagi.

- 1) Wydaje mi się, że w oznaczeniach elementów (np. MIX40) w Tabeli 5.2 nie doliczono parametrów związanych z tzw. wzbogaconym odkształceniami, czyli od 2 do 10-ciu parametrów. W ww. tabeli umieszczono wzbogacenia typu  $N_4$ , czyli w rzeczywistości parametrów jest o 4 więcej niż nazwa wskazuje, natomiast w Tabeli 6.4 tych parametrów jest nawet o 10 więcej. Może lepiej byłoby oznaczać np. MIX40+4, ponieważ istotna jest łączna liczba parametrów.
- 2) Liczba niezależnych parametrów w elementach HW może być dość duża, nawet rzędu 50-ciu, i dlatego ważna jest efektywna ich kondensacja na poziomie elementu skończonego. Klasyczne podejście do tego procesu jest mało wygodne, ponieważ musi uwzględniać strukturę macierzy stycznej. Warto zauważyć, że kondensacja sprowadza się do obliczenia tzw. dopełnienia Schura, i można je bardzo efektywnie obliczyć stosując tzw. częściową faktoryzację (ang. *Partial Factorization*). Np. w pracy [Jarzębski, Wiśniewski, Evaluation of Partial Factorization for Reduction of Finite Element Matrices, Engng. Trans. 65, 1, 163-170 (2017)] przetestowaliśmy efektywność tej metody dla różnych elementów typu HW (powłokowych, 'solid-shell' i 3D) uzyskując przyśpieszenia 2.41-3.37 dla liczby parametrów od 29 do 60.

**Rozdział 6** (35 stron) jest najobszerniejszy w całej rozprawie i poświęcony został przykładom numerycznym dla powłok z materiału liniowo sprężystego (izotropowego, homogenicznego). Obliczono 9 przykładów, w tym 4 w zakresie liniowym i 5 w zakresie nieliniowym.

Testy liniowe obejmują sprawdzenie wartości własnych, tzw. patch test, oraz testy ze zniekształconą siatką. Ostatni test to membrana Cooka, która jest bardzo wrażliwa na przesztymienia związane z rotacją owinięcia. Do testów liniowych mam następujące uwagi:

- 1) Na str. 88 (dot. membrany Cooka) uczyniono uwagę, że „porównanie wyników np. dla elementów MIX44 i MIX42 wskazuje na to, że zastosowany sposób interpolacji składowych związanych z owinięciem ma bardzo ograniczony wpływ na wartość  $\omega_A$ , a na jego wartość w znacznie większym stopniu wpływają inne czynniki.” Niestety nie podano jakie czynniki, chociaż jest to ważna kwestia.

Uważam, że uwaga ta jest w sprzeczności z obserwacjami z prac [363, 362] i z porównaniami elementów 2D i elementów powłokowych z rotacją owinięcia. W pracy [362] (punkt 4.4) pokazano, że dla bi-liniowych funkcji kształtu pojawia się problem z interpolacją tzw. drilling RC, co wywołuje przeszywnienie elementu, i zaproponowano specyficzną metodę rozwiązania tego problemu. Wydaje mi się, że podobny problem interpolacyjny powinien występować dla równań 6-parametrowej teorii powłok i może warto by Doktorant to sprawdził i przedyskutował.

- 2) Wydaje mi się, że warto także przeprowadzić test inf-sup sprawdzający dyskretny warunek LBB.

Wszystkie testy liniowe wskazują że opracowane przez Doktoranta elementy skończone posiadają bardzo dobre własności. Testy nieliniowe także zostały znakomicie opracowane, zarówno pod względem umiejscowienia ich w literaturze przedmiotu jak i przedstawienia wyników, umożliwiającego ocenę ich jakości. Warto wspomnieć, że elementy typu HW są w testach liniowych nieco dokładniejsze lecz mniej szybkie od elementów typu EAS lub EADG, i inne cechy tych elementów muszą tę wadę równoważyć, takie jak szybsza zbieżność i większy promień zbieżności metody Newtona. Wydaje mi się, że Doktorant bardzo dobrze te kwestie zrozumiał i bardzo dobrze zilustrował dla opracowanych hybrydowo–mieszanych elementów skończonych.

**Rozdział 7** (16 stron) W rozdziale tym testowany jest opracowany przez Doktoranta moduł konstytucyjny dla FGM i element własny MIX42. Przedyskutowano także problemy z zastosowaniem do tego typu materiałów elementu MIX38, który *notabene* bardzo dobrze zachowuje się w przypadku materiału izotropowego. Rozdział zawiera 4 przykłady numeryczne: rozciąganą powłokę cylindryczną, hiperboloidalną chłodnię kominową, czaszę sferyczną opartą na kwadracie i słup o przekroju skrzynkowym. Otrzymano szereg trudnych, silnie nieliniowych rozwiązań (za pomocą metody kontynuacji) i wyciągnięto wiele istotnych wniosków dotyczących zgodności wyników własnych z wynikami odniesienia (otrzymanymi za pomocą elementów S4 i S8R z kodu ABAQUS), wpływu wykładnika materiałowego  $n$  na przebieg nieliniowych ścieżek równowagi oraz wpływu stałych Cosserat na deformację. Uważam, że rozdział ten został bardzo dobrze opracowany i jest bardzo wartościowy.

1. Uwaga jaką mam do tego rozdziału dotyczy obszernie analizowanej w rozprawie kwestii czy formułować równania konstytutywne FGM względem powierzchni

środkowej czy względem powierzchni obojętnej. Problem ten oczywiście wiąże się z niesymetrycznym rozkładem własności materiału i wydaje się, że to, że wyniki będą różne gdy użyjemy np. środek geometryczny przekroju zamiast tzw. „modulus-weighted centroid” jest także dość oczywiste. Dlatego, nie do końca jestem przekonany, że wszystkie te analizy były rzeczywiście konieczne.

W **Podsumowaniu** (Rozdz. 8, 5 stron) omówiono elementy oryginalne pracy, podano wnioski z pracy i omówiono kierunki dalszych badań.

Rozprawa zawiera także 4 **Dodatki** (25 stron) w tym, opis obrotów, wybrane aspekty procedury przyrostowej i wybrane zagadnienia z MES.

**Ogólna ocena merytoryczna pracy.** Moja ocena ogólna przedłożonej rozprawy jest bardzo pozytywna, ponieważ Doktorant osiągnął następujące wartościowe rezultaty.

- 1) Opanował i w sposób kompetentny opisał podstawy teoretyczne teorii powłok Cosseratów ze skończonymi rotacjami w sformułowaniu dostosowanym do analiz numerycznych. Nie ulega wątpliwości, że Doktorant osiągnął wysoki poziom teoretyczny w tej trudnej dziedzinie.
- 2) Opracował całą rodzinę powłokowych elementów skończonych hybrydowo-mieszanych, wykorzystując pełny funkcjonał i częściowe funkcjonały Hu-Washizu. Przetestował ją na szeregu wartościowych przykładach wybranych konstrukcji powłokowych, w tym także kilku bardzo trudnych, które pokazują, że elementy te nie ustępują elementom opisanym w literaturze.
- 3) Sformułował i zaimplementował prawo konstytutywne dla materiałów o funkcyjnej zmienności materiału w postaci odpowiedniej dla 6-parametrowej nieliniowej teorii powłok Cosseratów. Klasyczne siły przekrojowe w powłoce zostały uzupełnione o wyrażenia związane z 6-tym stopniem swobody, tzw. rotacją owinięcia.

**Wniosek końcowy.** Uważam, że przedstawiona rozprawa mgra inż. Karola Daszkiewicza spełnia wymagania stawiane przez Ustawę pracom doktorskim i wnioskuje o dopuszczenie jej do publicznej obrony.

K. Wiśniewski

Warszawa, 31.01.2018