

MODELOWANIE PROPAGACJI FAL SPRĘŻYSTYCH W WĘZŁACH SPAWANYCH KONSTRUKCJI STALOWYCH

Rafał Kędra

II stopień, 3 semestr, Politechnika Gdańska
Wydział Inżynierii Lądowej i Środowiska
e-mail: rafkedra@gmail.com

Promotor: *dr hab. inż.* Magdalena Rucka

Słowa kluczowe: fale sprężyste, metoda elementów skończonych, diagnostyka

1. WSTĘP

Konstrukcje stalowe są powszechnie stosowane w budownictwie ze względu na niewielki ciężar w stosunku do swej wytrzymałości, szerokie możliwości w kształtowaniu ustrojów obiektów budowlanych i szybkość wykonania. Różnorodne, często fantazyjne formy konstrukcji stalowych związane są z koniecznością zaprojektowania i wykonania węzłów konstrukcyjnych, często w formie połączeń spawanych. Trwałość węzłów spawanych determinuje właściwe ich zaprojektowanie i wykonanie. Na jakość spoin wpływa sposób przygotowania łączonych elementów, technologia spawania, a nawet warunki atmosferyczne. Podczas spawania, w łączonych elementach powstają dodatkowe naprężenia, zwane spawalniczymi [5]. Łączone materiały w wyniku nadtopienia, połączenia ze spoiwem i rekrytalizacji zmieniają swe właściwości, co zazwyczaj wiąże się ze spadkiem wytrzymałości. Węzły konstrukcyjne w naturalny sposób stanowią również ogniwa korozji. Połączenia spawane ulegają czasowej degradacji, co w przypadku węzłów o kluczowym znaczeniu dla stabilności i nośności globalnej konstrukcji skutkuje potrzebą stałego ich monitorowania.

Opracowanie uniwersalnych i prostych metod diagnostyki, pozwalających na ocenę stanu konstrukcji, bądź jej elementów stanowi przedmiot intensywnych badań inżynierów na całym świecie. Wiele metod umożliwiających identyfikację uszkodzeń konstrukcji bazuje na propagacji fal sprężystych. Dotychczas z powodzeniem udało się je wykorzystać m.in. do diagnostyki płyt (Ref. [3]), elementów kompozytowych (Ref. [9]), cięgien stalowych (Ref. [4]), a także połączeń adhezyjnych (Ref. [10]), spoin czołowych (Ref. [11]), śrub sprężających (Ref. [8]) czy też spawanych połączeń elementów prętowych (Ref. [12]). Ich praktyczne zastosowanie poprzedzają najczęściej poza badaniami doświadczalnymi również obliczenia numeryczne z użyciem m.in. metody elementów skończonych (MES), metody elementów spektralnych, metody elementów brzegowych i metody pasm skończonych (Ref. [7]). Niniejsza praca ma na celu ocenę możliwości zastosowania metody elementów skończonych w kontekście modelowania propagacji fal sprężystych w węzłach spawanych konstrukcji stalowych, a także rozpoznanie wpływu zmienności wybranych parametrów modelu na wyniki obliczeń

numerycznych. Dla wybranych modeli węzłów wykonano następnie analizę wpływu defektów spoin na przebiegi propagujących fal w wybranych punktach, w aspekcie diagnostyki połączeń spawanych.

2. OPIS MATEMATYCZNY PROPAGACJI FAL SPRĘŻYSTYCH

Fale mechaniczne występują jedynie w ośrodkach materialnych. Ich rozprzestrzenianie związane jest z transportem energii i ruchem oscylacyjnym cząstek materii wokół położenia równowagi (Ref. [6]). Rozwiązanie zagadnienia propagacji fal w ujęciu makroskopowym, polegające na wyznaczeniu funkcji opisujących rozkład przemieszczeń, naprężeń i odkształceń jest więc typowym problemem mechaniki kontinuum. Ogólna postać równań tensorowych opisujących zagadnienia ruchu w ośrodku ciągłym przedstawia się następująco:

$$\tau_{ij} + \rho f_i = \rho \ddot{u}_i \quad (1)$$

$$\tau_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (2)$$

$$\varepsilon_{ij} = 1/2 (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3)$$

gdzie: ρ – gęstość, τ_{ij} – tensor naprężeń Cauchy, ε_{ij} – tensor odkształceń Greena, f_i – wektor sił (na jednostkę masy), u_i – wektorowa funkcja przemieszczeń, C_{ijkl} – tensor sprężystości. Dla ośrodków sprężystych, w których związek konstytutywny stanowi liniowe prawo Hooke’a opisane równaniem:

$$\tau_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2 \mu \varepsilon_{ij} \quad (4)$$

równanie ruchu wyrażone w funkcji przemieszczeń przybiera postać:

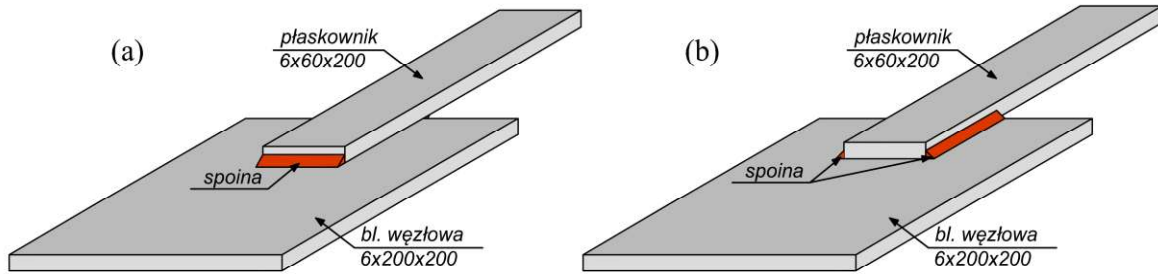
$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} + \rho f_i = \rho \ddot{u}_i \quad (5)$$

gdzie: λ , μ są to stałe Lamé’go. Równanie (5) jest to równanie różniczkowe cząstkowe, którego rozwiązanie każdorazowo wymaga określenia warunków brzegowych i początkowych charakteryzujących rozpatrywane zagadnienie i oddających wiernie fizykę zjawiska. W przypadku analizowanych węzłów prowadzi to do założenia o zerowych naprężeniach stycznych i normalnych na wszystkich powierzchniach blach, poza miejscami zespojenia (Ref. [1]).

Rozwiązanie zagadnienia propagacji fal w rzeczywistych konstrukcjach, dla złożonej geometrii i różnorodnych warunków brzegowych w sposób analityczny jest niezwykle skomplikowane, a w większości przypadków niemożliwe. W niniejszej pracy w celu wyznaczenia przybliżonego rozwiązania zagadnienia dla przyjętej geometrii węzła konstrukcyjnego posłużono się metodą elementów skończonych.

3. MODELOWANIE PROPAGACJI FAL Z ZASTOSOWANIEM MES

Model numeryczny utworzono w programie Abaqus/Explicit. Obliczenia wykonano dla uproszczonego schematu węzła konstrukcyjnego w formie płaskownika o przekroju poprzecznym 6 mm × 60 mm i długości 200 mm połączonego z blachą węzłową o wymiarach 200 mm × 200 mm i grubości 6 mm za pomocą różnych układów spoin pachwinowych (Rys. 1). Obliczenia wykonano dla przypadku dwuwymiarowego (2D – płaskiego stanu odkształcenia) oraz trójwymiarowego (3D). W obu analizach wykorzystano identyczne dane materiałowe zestawione w tabeli 1.



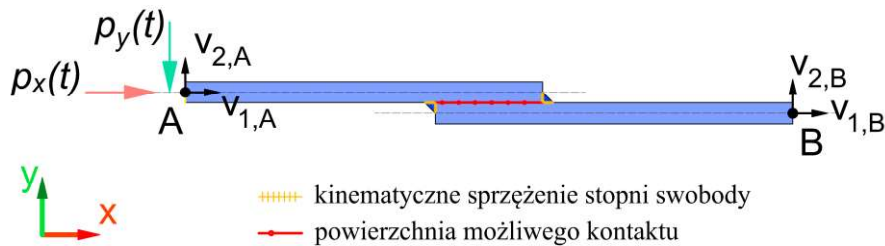
Rysunek 1: Analizowane schematy węzła konstrukcyjnego: a) poprzeczne spoiny pachwinowe, b) wzdłużne spoiny pachwinowe

Tabela 1: Dane materiałowe wykorzystane w analizie numerycznej

Parametr	Jednostka	Wartość
Moduł Younga (E)	Pa	$2 \cdot 10^{11}$
Współczynnik Poissona (ν)	-	0,3
Gęstość objętościowa (ρ)	kg/m ³	7850

3.1. Model płaski połączenia spawanego

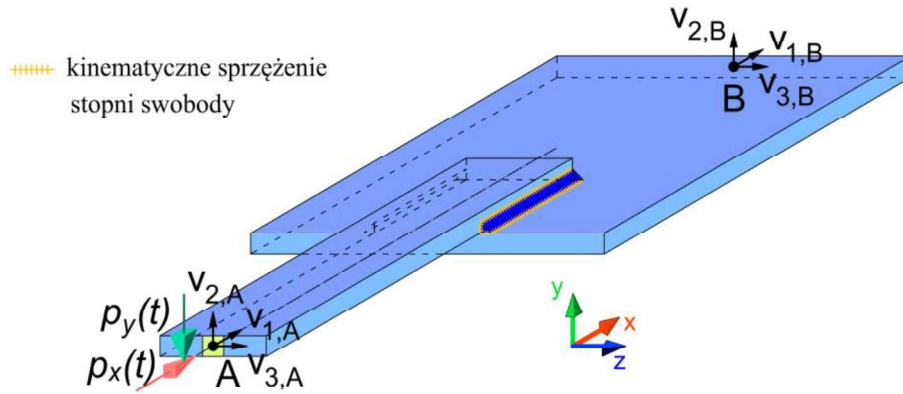
Obliczenia dla przypadku 2D przeprowadzono dla przekroju poprzecznego połączenia wyznaczonego przez płaszczyznę symetrii z układem poprzecznym spoin (Rys. 2). W analizie wykorzystano kontynuálne trójwęzłowe (CPE3) oraz czterowęzłowe elementy skończone ze zredukowanym całkowaniem (CPE4R) i liniowymi funkcjami kształtu. Dyskretyzację poza obszarami spoin przeprowadzono w oparciu o siatkę strukturalną, dla rozmiarów elementów (czterowęzłowych) odpowiednio: $1 \text{ mm} \times 1 \text{ mm}$, $0,5 \text{ mm} \times 0,5 \text{ mm}$ oraz $0,1 \text{ mm} \times 0,1 \text{ mm}$. Dodatkowo dla siatki o wymiarach $0,5 \text{ mm} \times 0,5 \text{ mm}$ powtórzono obliczenia, uwzględniając kontakt na styku powierzchni blach, odmienne właściwości spoin w stosunku do materiału blach oraz tłumienie.



Rysunek 2: Model obliczeniowy połączenia w 2D (w płaskim stanie odkształcenia)

3.2. Model przestrzenny połączenia spawanego

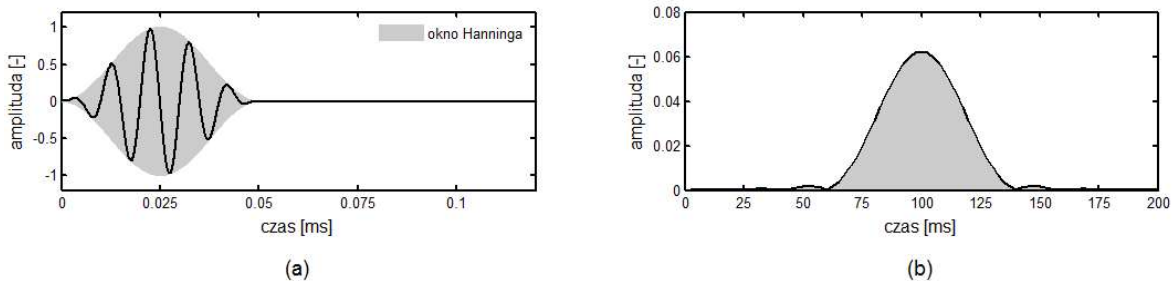
Model przestrzenny połączenia spawanego (Rys. 3) wykonano w dwóch wariantach: przy pomocy elementów 8 węzłowych z pełnym całkowaniem (C3D8) i 6 węzłowych (C3D6) oraz elementów 8 węzłowych z całkowaniem zredukowanym (C3D8R) i 6 węzłowych (C3D6). Dla każdego z powyższych przypadków analizowano dwie siatki elementów skończonych o wymiarach (elementów prostokątnych) $1 \text{ mm} \times 1 \text{ mm} \times 1 \text{ mm}$ oraz $0,5 \text{ mm} \times 0,5 \text{ mm} \times 0,5 \text{ mm}$. Obliczenia dla siatki o wymiarach $1 \text{ mm} \times 1 \text{ mm} \times 1 \text{ mm}$ powtórzono dodatkowo uwzględniając zjawiska kontaktu w obrębie zakładu płaskownika na blachę węzłową oraz tłumienie.



Rysunek 3: Model obliczeniowy połączenia w 3D

3.3. Metoda wzbudzenia fal

Wzbudzenie fali wymaga dostarczenia do modelu MES energii. Może zostać to zrealizowane przez wymuszenie przemieszczeń węzłów modelu lub też zmienne w czasie obciążenie. W analizowanych modelach połączeń w celu wzbudzenia fal poprzecznych i podłużnych posłużono się zmiennym w czasie obciążeniem liniowym (dla modelu 2D) oraz ciśnieniem (dla modelu 3D). Rozważono dwa przypadki wzbudzenia: poziome i pionowe. Analizowano różne przebiegi zmienności wzbudzenia. Jako sygnału wejściowy (przebieg zmienności obciążenia w czasie) zastosowano funkcję sinusoidalną o pięciu i dziesięciu cyklach oraz paczkę falową o pięciu cyklach zmodulowaną oknem Hanninga (Rys. 4). Wartość obciążenia wynosiła odpowiednio 1 N/m dla modelu 2D i 1 N/m² dla modelu 3D. Obliczenia przeprowadzono dla stopniowo zwiększanej co 10 kHz częstotliwości z zakresu 100–200 kHz.



Rysunek 4: Przebieg wzbudzenia modułowanego oknem Hanninga (a) w dziedzinie czasu, (b) w dziedzinie częstotliwości

3.4. Tłumienie i numeryczne całkowanie równań ruchu

W analizach z uwzględnieniem tłumienia macierz tłumienia proporcjonalnego, określoną jako:

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K} \quad (6)$$

gdzie: \mathbf{M} – macierz mas, \mathbf{K} – macierz sztywności, α , β – współczynniki. Obliczenia wykonano dla trzech różnych wariantów: dla różnych wartości współczynnika α i zerowej wartości współczynnika β , dla zerowej wartości współczynnika α i niezerowej wartości β oraz dla niezerowej wartości obu współczynników, wykorzystując ich zależność od założonej zdolności absorpcyjnej oraz prędkości grupowej i częstości wzbudzenia (Ref. [2]). Wartości współczynników wyznaczono jako::

$$\alpha = 2 k C_G \quad (7)$$

$$\beta = 2 k C_G \omega^{-2} = \alpha \omega^{-2} \quad (8)$$

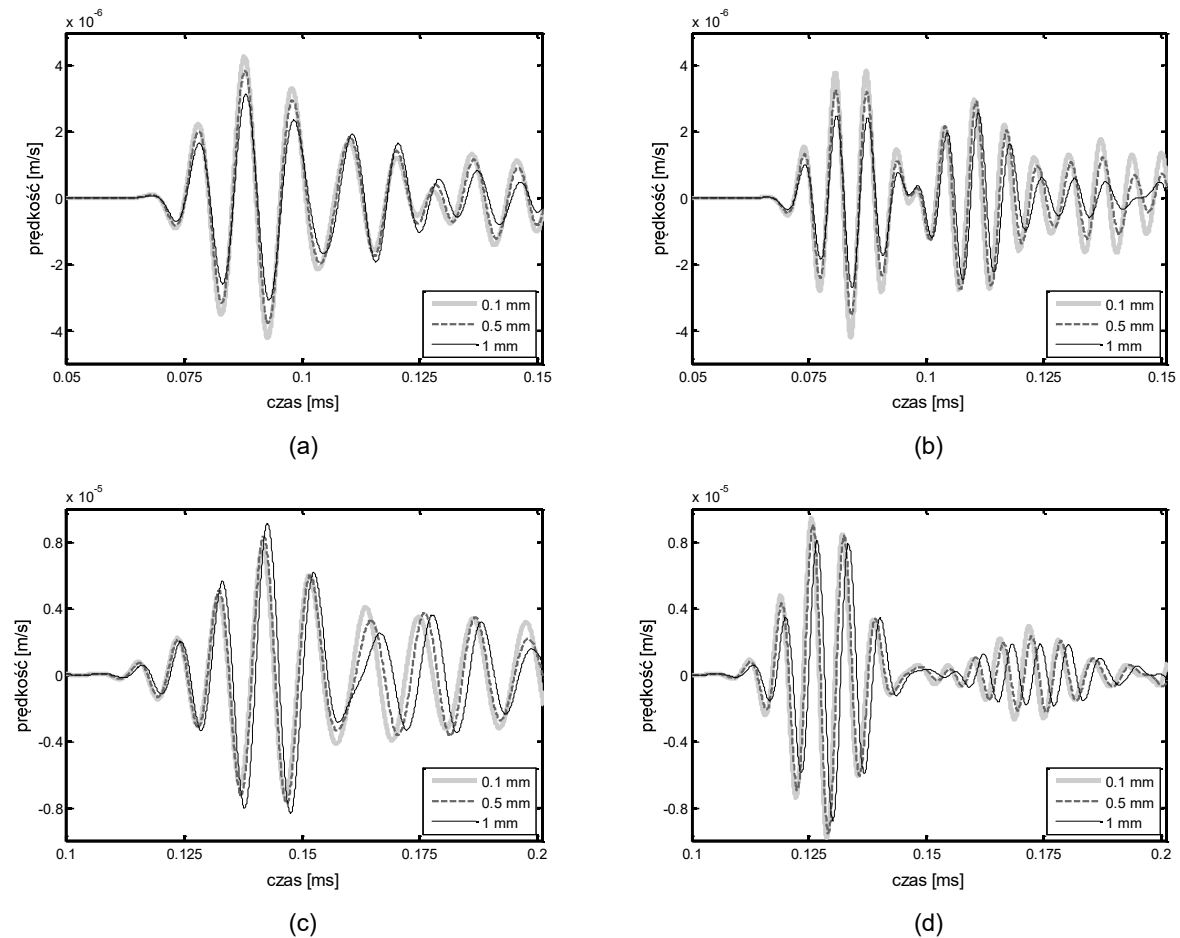
gdzie: k – zdolność absorpcyjna, C_G – prędkość grupowa, ω – częstość fali. Obliczenia wszystkich modeli wykonywano przy braku podpór. Analizy przeprowadzono używając jawnego schematu całkowania równań ruchu, z wykorzystaniem metody różnic centralnych. Krok czasowy metody dla rozpatrywanych przykładów wahał się w przedziale od 10^{-8} s do $5 \cdot 10^{-8}$ s, natomiast czas analizy wynosił odpowiednio 10^{-2} s dla modelu dwuwymiarowego oraz 10^{-4} s dla modelu trójwymiarowego.

4. WYNIKI ANALIZ NUMERYCZNYCH

W dalszej części przedstawiono i omówiono rezultaty uzyskane dla przypadków wzbudzeń o częstotliwościach 100, 150 i 200 kHz modulowanych oknem Hanninga. Rozważano głównie przebiegi czasowe prędkości przemieszczeń poszczególnych punktów w dziedzinie czasu.

4.1. Modele płaskie połączenia spawanego

Wyniki uzyskane w przypadku modeli bez tłumienia (Rys. 5) wskazują na znaczący wpływ rozmiarów elementów skończonych na sposób propagacji fal. Dobrą zbieżność wyników, tzn. sygnały bez przesunięcia w fazie, uzyskano jedynie dla części sygnałów obrazujących bezpośrednio rozchodzenie się zaburzenia początkowego (wzbudzenia). Zróżnicowanie sygnałów dla różnych siatek elementów jest większe dla wzbudzeń fal poprzecznych (Rys 5a i 5b). Zarówno dla fal podłużnych i poprzecznych wzrost częstości fali skutkuje większymi rozbieżnościami (Rys 5b i 5d).

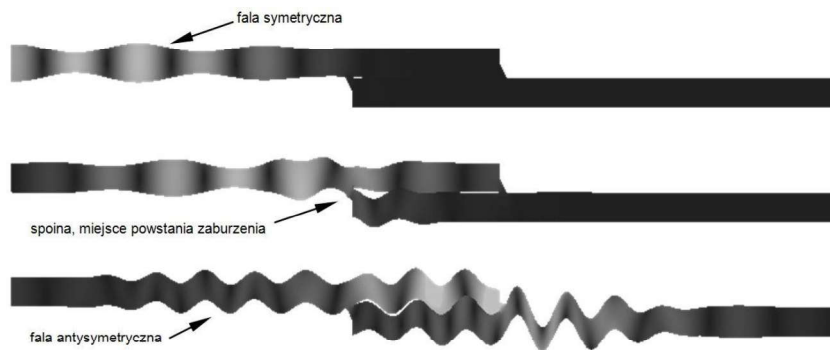


Rysunek 5: Przykładowe wyniki analiz 2D dla przypadku fali podłużnej o częstości: a) 100 kHz, b) 150 kHz oraz fali poprzecznej o częstości c) 100 kHz oraz d) 150 kHz

W miejscach nieregularności, które występują w modelu numerycznym fala ulega częściowemu odbiciu. W efekcie dochodzi do powstania nowego zaburzenia, propagującego niezależnie od wzbudzenia. Jego kierunek i amplituda zależą od geometrii modelu, a także przyjętej dyskretyzacji. W przypadku fal podłużnych, miejsca nieciągłości powodują powstanie głównie fal poprzecznych. W rezultacie dochodzi do zjawiska określanego jako konwersja postaci symetrycznych w antysymetryczne (Rys. 6). Mimo braku tłumienia, ze względu na geometrię modelu (tłumienie geometryczne) i niedokładności numeryczne, pojawiające się zwłaszcza podczas odbicia od krawędzi modelu, amplitudy sygnałów w poszczególnych punktach stopniowo maleją. Z tego względu przebiegi prędkości drgań w poszczególnych punktach modelu można traktować jako sygnał o ograniczonej energii. Ilościową zmianę parametrów sygnału obrazuje jego energia E definiowana jako:

$$E = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 \quad (9)$$

gdzie: x_i – wartość sygnału w punkcie i , N – ilość próbek sygnału (Ref. [13]).



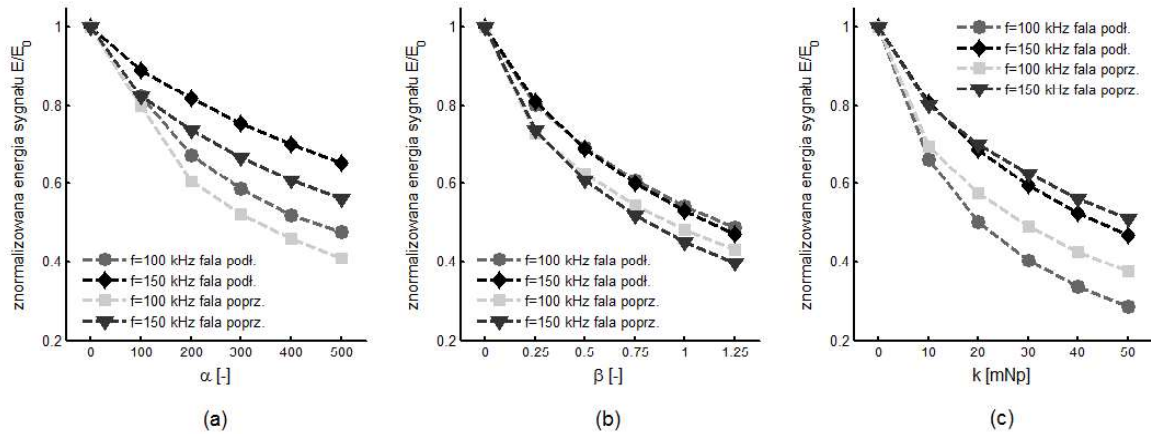
Rysunek 6: Powstawanie fali poprzecznej podczas propagacji fali podłużnej

Szczegółowe zestawienie energii dla analizowanych sygnałów w zależności od wymiarów siatki elementów skończonych podano w tabeli 2. Widać wyraźnie, że rośnie ona wraz ze wzrostem ilości elementów skończonych użytych do dyskretyzacji modelu – mniejsza jej część zostaje rozproszona na skutek niedokładności obliczeniowych. Na Rys 7 zestawiono wyniki energii sygnałów przy uwzględnieniu tłumienia, względem sygnału zarejestrowanego dla braku tłumienia (dla siatki elementów skończonych o wymiarze $0,5 \text{ mm} \times 0,5 \text{ mm}$).

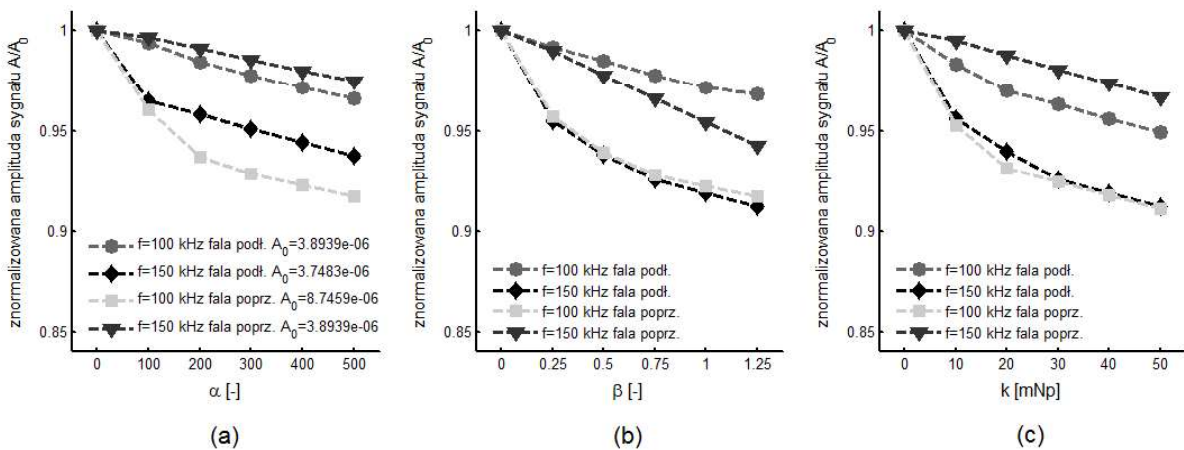
Tabela 2: Porównanie energii sygnałów dla różnych siatek dyskretyzacyjnych

Częstotliwość i typ sygnału	Wymiar elementu skończonego [mm]			
	1x1	0,5x0,5	0,1x0,1	
100 kHz	A	$2,74 \cdot 10^{-13}$ (16,5 %)	$5,38 \cdot 10^{-13}$ (32,5 %)	$1,66 \cdot 10^{-12}$ (100 %)
	B	$1,04 \cdot 10^{-12}$ (19,6 %)	$2,11 \cdot 10^{-12}$ (39,8 %)	$5,31 \cdot 10^{-12}$ (100 %)
150 kHz	A	$8,26 \cdot 10^{-14}$ (9,9 %)	$1,91 \cdot 10^{-13}$ (22,9 %)	$8,33 \cdot 10^{-13}$ (100 %)
	B	$2,31 \cdot 10^{-13}$ (11,1 %)	$5,38 \cdot 10^{-13}$ (25,9 %)	$2,08 \cdot 10^{-12}$ (100 %)
200 kHz	A	$4,88 \cdot 10^{-14}$ (9,3 %)	$1,07 \cdot 10^{-13}$ (20,2 %)	$5,26 \cdot 10^{-13}$ (100 %)
	B	$5,72 \cdot 10^{-14}$ (8,9 %)	$1,40 \cdot 10^{-13}$ (21,9 %)	$6,40 \cdot 10^{-13}$ (100 %)

* A - prędkość V1, fala podłużna ; B - prędkość V2, fala poprzeczna



Rysunek 7: Spadek energii sygnału dla różnych wartości przypadków tłumienia: proporcjonalnego do a) macierzy mas, b) macierzy sztywności, c) zależnego od zdolności absorpcyjnej



Rysunek 8: Spadek amplitudy sygnału dla różnych wartości przypadków tłumienia: proporcjonalnego do a) macierzy mas, b) macierzy sztywności, c) zależnego od zdolności absorpcyjnej

Analogicznie do spadku energii sygnału, wzrost współczynników tłumienia spowodował spadek amplitudy sygnału (Rys 8). Dla porównania w przypadku uwzględnienia zjawisk kontaktu wartość amplitudy dla fali podłużnej o częstotliwości 100 kHz wynosiła $3,67 \cdot 10^{-6}$ m/s, natomiast dla fali poprzecznej o tej samej częstotliwości była równa $8,41 \cdot 10^{-6}$.

4.2. Modele przestrzenne połączenia spawanego

Wyniki analiz z użyciem elementów objętościowych wierniej oddają rzeczywistą propagację fali w połączeniu dwóch blach, uwzględniając jej przestrzenny charakter. Fala rozchodzi się sferycznie i ulega odbiciu od wszystkich płaszczyzn ograniczających element, w efekcie fala traci swój pierwotny kształt, wynikający z modulacji. Sposób w jaki zaburzenie przenosi się na blachę węzłową w ścisły sposób zależy od zastosowanego układu spoin. W przypadku spoin poprzecznych czoło fali przechodzi bezpośrednio z jednej blachy na drugą w miejscu występowania połączeń (Rys. 9), natomiast w modelu ze spoinami wzdłużnymi zaburzenie rozchodzi się klinem, symetrycznie od obu spoin (Rys. 10). Dla obu układów spoin sygnał wynikowy ma w związku z tym zupełnie inny charakter.



(a)

(b)

(c)

Rysunek 9: Pola prędkości przemieszczeń (V_2) w płaszczyźnie środkowej blachy węzłowej dla modelu z poprzecznymi spoinami w chwili czasowej: a) $4 \cdot 10^{-5}$ s, b) $6 \cdot 10^{-5}$ s oraz $8 \cdot 10^{-5}$ s



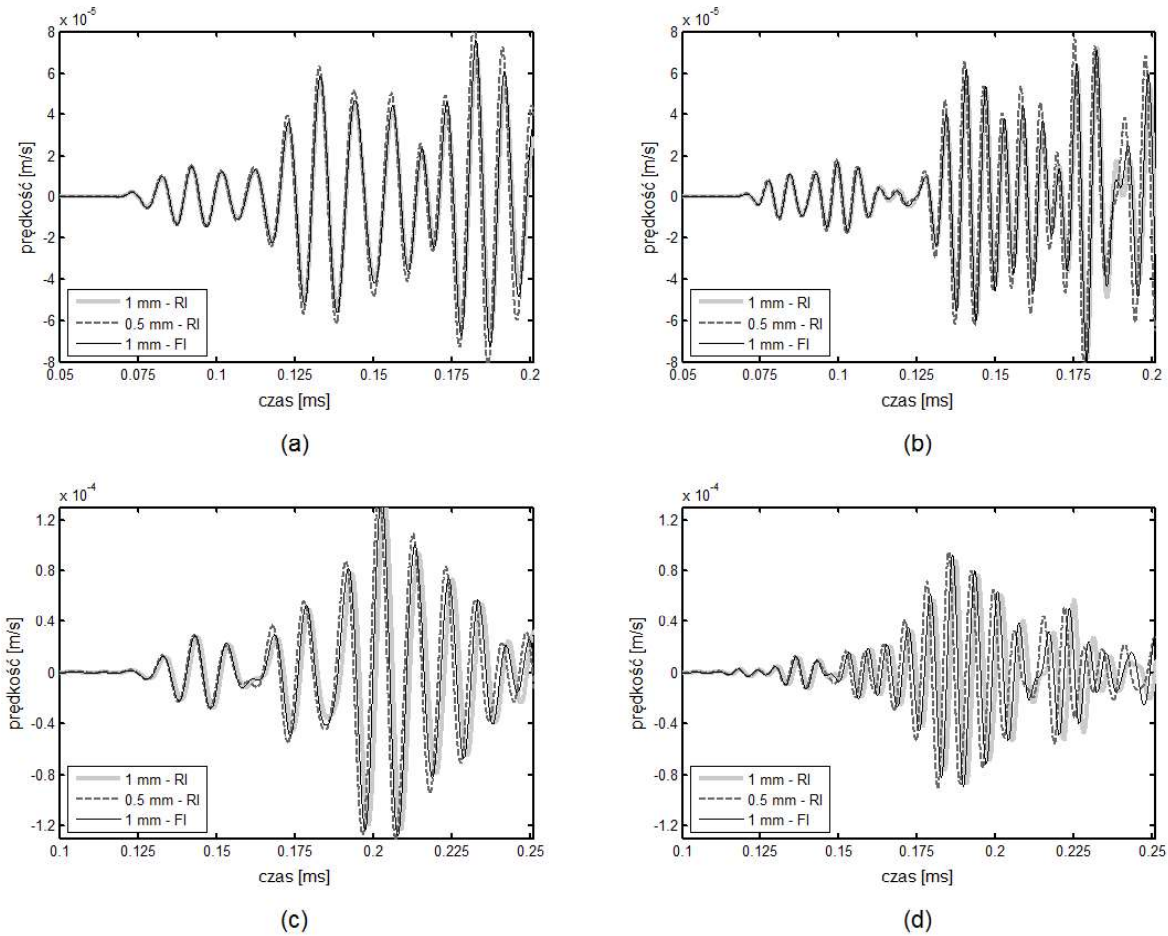
(a)

(b)

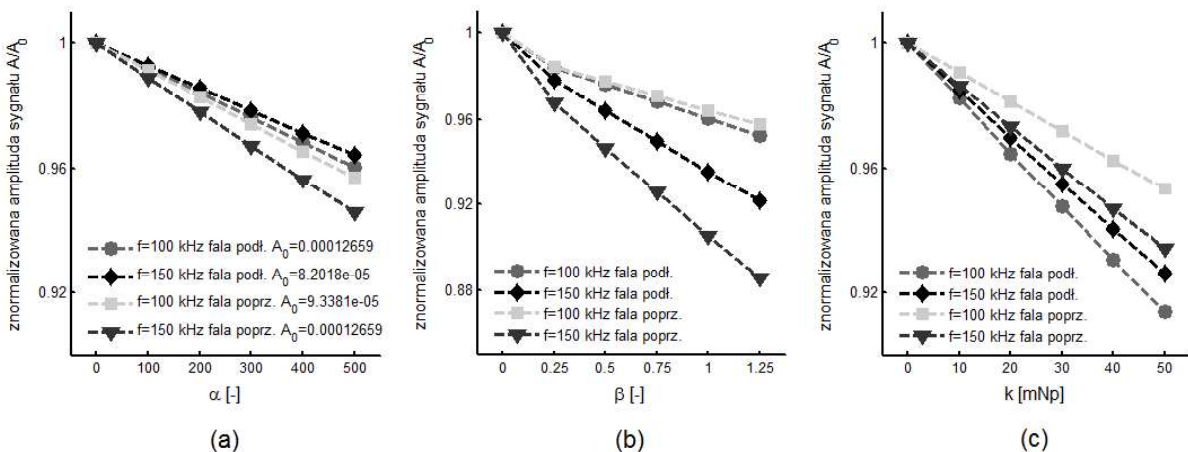
(c)

Rysunek 10: Pola prędkości przemieszczeń (V_2) w płaszczyźnie środkowej blachy węzłowej dla modelu z podłużnymi spoinami w chwili czasowej: a) $4 \cdot 10^{-5}$ s, b) $6 \cdot 10^{-5}$ s oraz $8 \cdot 10^{-5}$ s

Podobnie jak w przypadku modeli w płaskim stanie odkształcenia, analizy wykonane dla różnych wymiarów elementów skończonych są porównywalne jedynie w wąskim przedziale czasowym (Rys. 11). W przypadku analiz 3D nie dokonano ilościowej oceny sygnałów, porównując ich energie. Wyniki dla różnych modeli tłumienia przedstawiono na Rys. 12.



Rysunek 11: Przykładowe wyniki analiz 3D dla modelu ze wzdłużnymi spoinami i przypadku fali podłużnej o częstotliwości: a) 100 kHz, b) 150 kHz oraz fali poprzecznej o częstotliwości c) 100 kHz oraz d) 150 kHz ; FI - pełne całkowanie, RI - zredukowane całkowanie

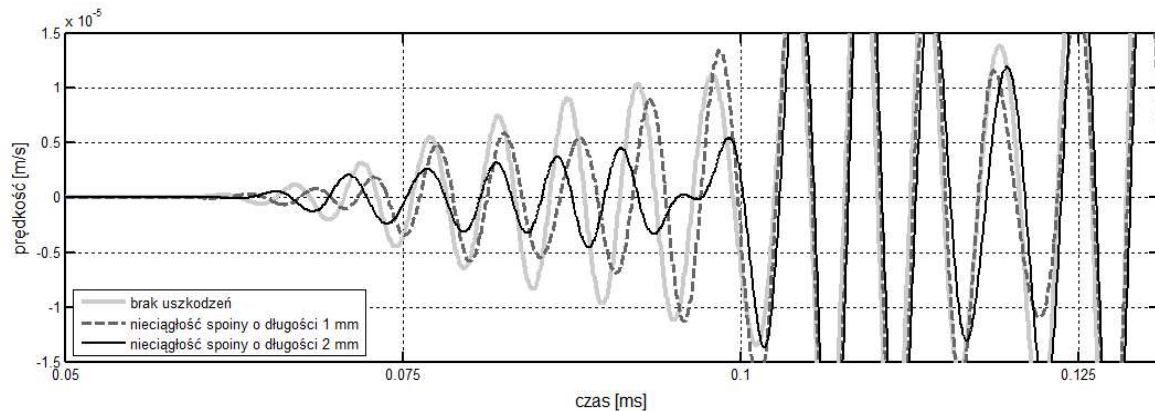


Rysunek 12: Spadek amplitudy sygnału dla różnych wartości przypadków tłumienia: proporcjonalnego do a) macierzy mas, b) macierzy sztywności, c) zależnego od zdolności absorpcyjnej

5. ZASTOSOWANIE PROPAGACJI FAL W DIAGNOSTYCE POŁĄCZEŃ

Dla schematu połączenia ze spoinami wzdłużnymi wykonano numeryczne modele 3D mające odwzorowywać uszkodzenia w formie pęknięć i utraty nośności części spoin. Nieciągłości między blachą węzłową i spoinami uwzględniono poprzez brak połączenia między elementa-

mi skończonymi w miejscu uszkodzenia (brak sprzężeń kinematycznych). Obliczenia przeprowadzono dla obustronnych, symetrycznych nieciągłości na całej szerokości spoin o długości 1 cm i 2 cm. Wyniki uzyskane dla wzbudzenia w płaszczyźnie węzła o częstotliwości 200 kHz przedstawiono na Rys 13.



Rysunek 13: Przebiegi prędkościowe uzyskane dla modeli 3D z różnymi stopniami uszkodzenia dla przypadku propagacji fali podłużnej o częstotliwości 200 kHz

Na podstawie powyższego wykresu można stwierdzić, że wraz ze wzrostem długości nieciągłości spoiny zmniejsza się początkowa amplituda sygnału, wynikająca z propagującej fali podłużnej w połączeniu. Następuje również przesunięcie w fazie propagującej fali.

6. WNIOSKI

Metoda elementów skończonych może zostać wykorzystana do analizy propagacji fal sprężystych w obszarach połączeń konstrukcji spawanych. Metoda ta obarczona jest jednak narastającym w czasie błędem. W przypadku znacznego skomplikowania geometrii, wymaga ona dodatkowo stosowania bardzo gęstych siatek dyskretyzacyjnych. Uzyskane rezultaty nie pozwalają na określenie ścisłej zbieżności wyników. Analizowane przebiegi prędkościowe dla różnych rozmiarów elementów, zarówno dla przypadku 2D i 3D są porównywalne jedynie dla wąskiego przedziału czasowego. Znaczne rozbieżności pojawiają się na skutek odbicia fali od krawędzi, bądź powierzchni zewnętrznych modelu. Wyniki analiz z uwzględnieniem kontaktu nie odzwierciedlają poprawnie fizyki zjawiska i obarczone są sporym błędem. W celu właściwego zbadania jego wpływu na propagację fal niezbędne są badania eksperymentalne.

W przypadku analizy węzłów konstrukcyjnych zachodzi potrzeba uwzględnienia przestrzennego charakteru zjawiska i stosowania modeli dyskretyzowanych za pomocą elementów objętościowych. Przeprowadzone obliczenia wskazują, że elementy skończone z pełnym całkowaniem nie wpływają znacząco na poprawę jakości rozwiązania, znacznie zwiększając przy tym czas obliczeń.

Ze względu na charakter zjawiska diagnostyka z wykorzystaniem fal sprężystych bazuje głównie na porównywaniu sygnałów, z powodzeniem może więc służyć do wykrywania uszkodzeń stopniowo narastających w czasie. W niniejszej pracy pokazano przykład takiego zastosowania. Każdorazowo ocena stanu degradacji połączenia wymaga jednak odwołania się do wcześniejszych badań na tym samym obiekcie.

Obliczenia wykonano na komputerach Centrum Informatycznego Trójmiejskiej Akademickiej Sieci Komputerowej.

LITERATURA

- [1] Achenbach, J., D., Wave Propagation in Elastic Solids, pp. 3–4, 55-56, North-Holland Publishing Company, 1973
- [2] Balasubramaniam, K., Hood, A., Joshi, M., Krishnamurthy, C., V., Ramadas, C., Modelling of attenuation of Lamb waves using Rayleigh damping: numerical and experimental studies, *Composite Structures* 93, pp. 2020–2025, 2011
- [3] Barauskas, R., Cicenias, V., Demcenko, A., Kazys, R., Mazeika, L., Raisutis, R., 3D Analysis of interaction of Lamb waves with defects in loaded steel plates, *Ultrasonics* 44, pp. 1127–1130, 2006
- [4] Bourse, G., Chaki, S., Guided ultrasonic waves for non-destructive monitoring of the stress levels in prestressed steel strands, *Ultrasonics* 49, pp. 162–171, 2009
- [5] Filipowicz, A., Łubiński, M., Żółtowski, W., Konstrukcje metalowe, Część I, Podstawy projektowania, str. 17-20, 211-218, Wydawnictwo Arkady, Warszawa 2003
- [6] Halliday, D., Resnick, R., Walker, J., Podstawy Fizyki, tom 2, str. 122–128, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2006
- [7] Horaa, P., Cervenaa, O., Determination of Lamb wave dispersion curves by means of Fourier transform, *Applied and Computational Mechanics* 6, pp. 5–16, 2012
- [8] Li, Y., R., Song, G., Wang, T., Wang, Z., G., Proof-of-concept study of monitoring bolt connection status using a piezoelectric based active sensing method, *Smart Materials and Structures* vol. 22, no. 8, Article ID 087001, 2013
- [9] Lu, Y., Su, Z., Ye, L., Guided Lamb waves for identification of damage in composite structures: A review, *Journal of Sound and Vibration* 295, pp. 753–780, 2006
- [10] Ni, X., Rizzo, P., Highly Nonlinear Solitary Waves for the Inspection of Adhesive Joints, *Experimental Mechanics* 52, pp. 1493-1501, 2012
- [11] Park, S., Roh, Y., Yun, C., Damage diagnostics on a welded zone of a steel truss member using an active sensing network system, *NDT&E International* 40, pp. 71–76, 2007
- [12] Rucka M. Experimental and numerical study on damage detection in an L-joint using guided wave propagation, *Journal of Sound and Vibration* 329, pp. 1760–1779, 2010
- [13] Szabatin, J., Podstawy teorii sygnałów, str. 7-18, W.K. Ł., 2003