

IDENTYFIKACJA LICZBY TŁUMIENIA NA PRZYKŁADZIE BELKI WSPORNIKOWEJ

Identification of damping for a cantilever beam

Olga Własów

Budownictwo, II stopień, I semestr, Wydział Inżynierii Łądowej i Środowiska, Politechnika Gdańska
email: olga.wlasow@gmail.com

Opiekun naukowy: dr hab. inż. Magdalena Rucka

Słowa kluczowe: analiza modalna, drgania, liczba tłumienia, częstotliwość drgań

1 WSTĘP

Ze względu na rosnącą potrzebę ekonomicznego wykorzystywania powierzchni zaobserwowano znaczący wzrost liczby budynków smukłych i wysokich. Wzrastający popyt na rozbudowę infrastruktury drogowej powoduje, natomiast, wzrost ilości realizacji obiektów mostowych. Konstrukcje takie, tj. wieżowce, kładki czy mosty, na etapie projektowym wymagają uwzględnienia wpływu szkodliwych efektów dynamicznych, które bezpośrednio wpływają na komfort oraz bezpieczeństwo użytkownika konstrukcji. Istotną rolę na etapie analizy dynamicznej pełni uwzględnienie tłumienia. Można je określić jako rozpraszanie energii mechanicznej układu pochodzącej od cyklicznie zmiennych przemieszczeń.

W kontekście konstrukcji budowlanych wyróżnia się trzy podstawowe rodzaje tłumienia: materiałowe, konstrukcyjne oraz zewnętrzne [2]. Tłumienie materiałowe determinowane jest przez rodzaj materiału, metodę wykonania i występujące naprężenia. Inaczej nazywane jest tarcie wewnętrzne. Wysokie tłumienie materiałowe jest domeną materiałów niemetalowych: drewno, beton czy guma. Metale, z powodu nieskomplikowanej budowy krystalicznej, posiadają bardzo małe tarcie wewnętrzne. Tłumienie konstrukcyjne występuje w postaci tarcia w miejscach styków elementów, połączeń ruchomych, luzów, pęknięć czy innych uszkodzeń. Ten rodzaj tłumienia ma istotny wpływ na redukcję drgań, a jego opis opiera się na prostych modelach matematycznych. Tłumienie konstrukcyjne dla stali przyjmuje większe wartości niż tłumienie materiałowe. Tłumienie zewnętrzne zależy od czynników środowiskowych, tj. grunt czy pojazd znajdujący się na konstrukcji. Jako zewnętrzne klasyfikujemy także tłumienie hydrodynamiczne oraz aerodynamiczne. Tłumienie aerodynamiczne można określić jako małe przyrównując je do tłumienia konstrukcyjnego.

Celem artykułu jest identyfikacja liczby tłumienia stalowej belki wspornikowej dla czterech różnych wariantów długości. Tłumienie wyznaczono na podstawie analizy przemieszczeń wspornika wywołanym obciążeniem impulsowym uzyskanym poprzez uderzenia młotkiem modalnym. Do wyznaczenia liczb tłumienia posłużono się metodą logarytmicznego dekrementu oraz połowy mocy.

2 PODSTAWY TEORETYCZNE

Technika logarytmicznego dekrementu tłumienia wykorzystuje logarytm naturalny stosunku dwóch kolejnych maksymalnych amplitud (wychyleń). Na obliczenia pozwala założenie, że obwiednię wykresu spadku drgań w czasie można zapisać w postaci funkcji eksponentialnej [1]. Ze względu na fakt, iż kolejne dwie wartości wychyleń różnią się z reguły w bardzo małym stopniu, taki sposób wyznaczania logarytmicznego dekrementu tłumienia niesie za sobą bardzo duży margines błędu. Dlatego częściej

w obliczeniach LDT brane są amplitudy z większej liczby okresów j , np. 10. Wartość logarytmicznego dekrementu tłumienia można wyznaczyć za pomocą wzoru:

$$\delta = \frac{1}{j} \cdot \ln \frac{a_{i+j}}{a_i} \quad (1)$$

gdzie δ - logarytmiczny dekrement tłumienia, j - liczba okresów uwzględnionych w analizie, a_i - pierwsza amplituda uwzględniona w analizie, a_{i+j} - kolejna amplituda uwzględniona w analizie.

Zależność pomiędzy liczbą tłumienia a logarytmicznym dekrementem tłumienia określa wzór:

$$\delta = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}, \quad (2)$$

który dla małych wartości liczby tłumienia ξ , takie uzyskiwane są w przypadku typowych konstrukcji [4], można uprościć do zależności liniowej:

$$\delta = 2\pi\xi. \quad (3)$$

Metoda połowy mocy wykorzystuje pojęcie transmitancji widmowej. Do jej wyznaczenia używana jest funkcja FRF (ang. *frequency response function*), którą według Hatzigeorgiou i Papagiannopoulos [3] można zapisać za pomocą wzoru:

$$H(\omega) = \frac{1}{1 - (\omega/\omega_n)^2 + 2\xi(\omega/\omega_n)i} \quad (4)$$

Część urojona funkcji $H(\omega)$ dla rezonansu osiąga wartość maksymalną, gdy jej część rzeczywista wynosi wówczas zero [5]. Częstość, dla której część urojona osiąga maksimum jest częstotliwością rezonansową. Posługując się metodą *peak picking* można odczytać maksimum lokalne części urojonej funkcji $H(\omega_r)$ a następnie

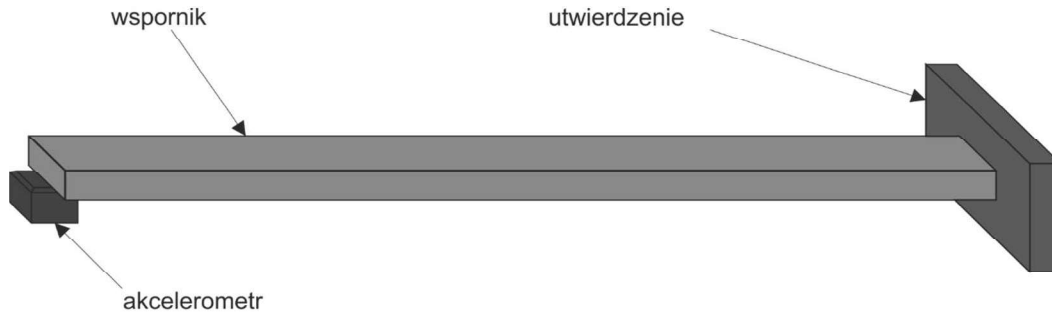
wartości towarzyszące, tj. $H(\omega_1) = H(\omega_2) = \frac{H(\omega_r)}{\sqrt{2}}$. Ostatecznie, korzystając ze wzoru:

$$\xi = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\omega_r} \quad (5)$$

można wyznaczyć wartość tłumienia modalnego.

3 BADANIA DOŚWIADCZALNE

Badanie przeprowadzono na stalowym płaskowniku o masie 630 g, gęstości 7875 kg/m³ i całkowitym wymiarze 20x5x800 mm. Płaskownik zamocowywano kolejno w odległości 100 mm, 200 mm, 300 mm i 400 mm od jednego z końców, tworząc schemat wspornika. Eksperyment polegał na wywoływaniu drgań belki wspornikowej i rejestracji odpowiedzi dynamicznej konstrukcji. Wykonano cztery próby, każdą dla innej długości belki, kolejno: 70 cm, 60 cm, 50 cm i 40 cm. Drgania wzbudzano młotkiem modalnym PCB 086C03. Odpowiedź konstrukcji była rejestrowana za pomocą akcelerometru PCB 356A16 o masie 25 g umieszczonego na swobodnym końcu wspornika do analizatora drgań w postaci wartości przemieszczeń końca wspornika w czasie. Uderzenia młotkiem modalnym, dokonując wzbudzenia, wykonywano dla każdego wariantu długości belki w odległości 10 cm od swobodnego końca. Schemat stanowiska pomiarowego został przedstawiony na rysunku 1.



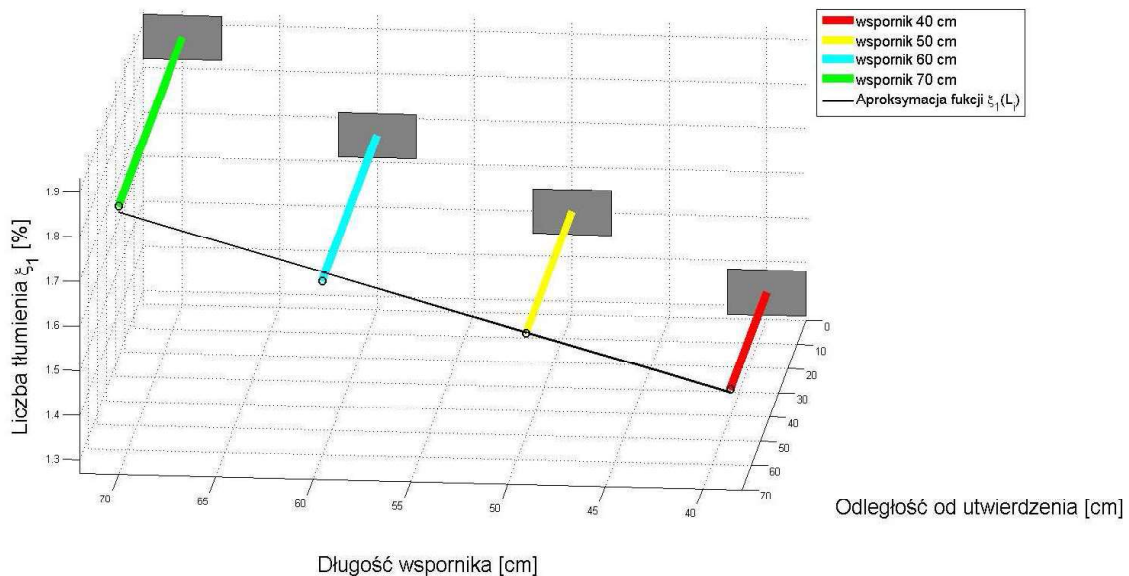
Rys. 1. Schemat stanowiska pomiarowego

3.1 METODA LDT

Zidentyfikowano pierwszą liczbę tłumienia układu dla poszczególnych wariantów długości wspornika. Obliczenia wykonywano dla wybranej amplitudy i dziesiątej kolejnej po niej, wykorzystano wzór (1), w którym $j = 10$. W celu zwiększenia dokładności, przeprowadzono obliczenia dla trzech różnych zmian amplitud, a wyniki uśredniono. Wyniki zostały przedstawione w tab. 1.

Tab. 1. Wyniki obliczeń metodą LDT dla wszystkich wariantów długości belki

Długość [cm]	Pomiar 1		Pomiar 2		Pomiar 3		δ [-]	ξ_1 [%]
	$a_i^{(1)}$ [m/s ²]	$\delta^{(1)}$ [-]	$a_i^{(2)}$ [m/s ²]	$\delta^{(2)}$ [-]	$a_i^{(3)}$ [m/s ²]	$\delta^{(3)}$ [-]		
	$a_{i+10}^{(1)}$ [m/s ²]		$a_{i+10}^{(2)}$ [m/s ²]		$a_{i+10}^{(3)}$ [m/s ²]			
70 cm	4,91	0,1363	3,00	0,1339	1,67	0,0822	0,1175	1,87
	1,44		0,90		0,74			
60 cm	8,48	0,1171	4,66	0,1157	1,40	0,0805	0,1044	1,66
	2,96		1,65		0,62			
50 cm	14,99	0,0998	8,68	0,0931	5,11	0,0892	0,0941	1,50
	6,10		3,76		2,10			
40 cm	9,97	0,0885	5,19	0,0813	3,38	0,0814	0,0838	1,33
	4,49		2,50		1,50			



Rys. 2. Wartości pierwszej liczby tłumienia wyznaczone za pomocą LDT w zależności od długości belki

Na podstawie rysunku 2 można jednoznacznie stwierdzić, że wartość liczby tłumienia spada wraz ze spadkiem długości wspornika. W celu ukazania tej zależności posłużono się aproksymacją.

3.2 METODA HPM

Na potrzeby zastosowania metody połowy mocy sporządzono wykresy modułu funkcji transmitancji widmowej. Analizie poddano fragmenty w zakresie pozwalającym na identyfikację trzech pierwszych częstotliwości drgań własnych. Odpowiedź konstrukcji, w przypadku trzeciej częstotliwości, nie pozwoliła na wyznaczenie liczby tłumienia dla belek o długości 50 cm i 40 cm.

Początkowy etap analizy polegał na wyznaczeniu dokładnych wartości modułu transmitancji dla częstotliwości drgań własnych wspornika i znalezieniu częstotliwości drgań dla wartości modułu transmitancji podzielonej przez pierwiastek z dwóch. Następnie, liczby tłumienia dla poszczególnych wariantów długości belki obliczono korzystając z zależności (5), jednak zamiast częstości użyto częstotliwości drgań. Częstotliwość zmienia się proporcjonalnie do częstości, więc w obliczenia można korzystać z dowolnej z tych dwóch wielkości. Wyniki obliczeń przedstawiono kolejno w tabelach 2, 3 i 4.

Tab. 2. Wyniki identyfikacji pierwszej liczby tłumienia metodą HPM dla wszystkich wariantów długości belki

Długość [cm]	$ H_{\max} $ [-]	$\left \frac{H_{\max}}{2}\right $ [-]	f_1 [Hz]	f_r [Hz]	f_2 [Hz]	ξ_1 [%]
70 cm	138,67	98,06	7,3678	7,5000	7,6498	1,88
60 cm	176,19	124,59	9,8607	10,0000	10,1809	1,60
50 cm	212,84	150,50	14,0279	14,2000	14,4368	1,44
40 cm	242,31	171,34	21,0201	21,3000	21,5686	1,29

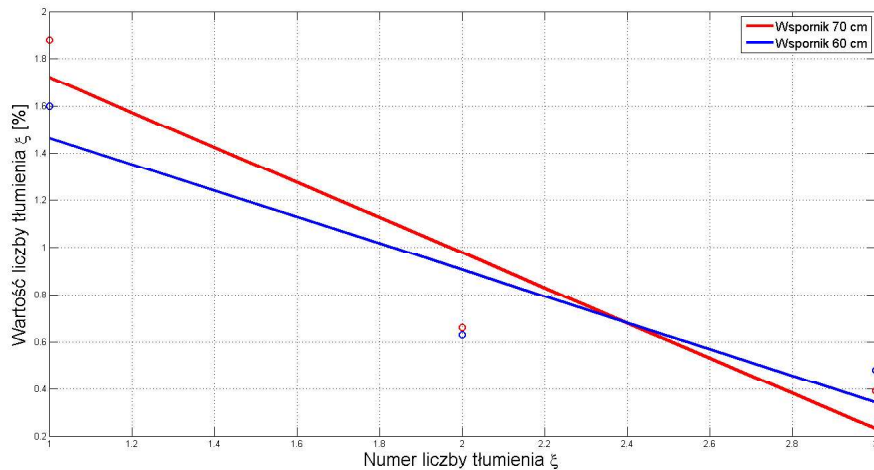
Tab. 3. Wyniki identyfikacji drugiej liczby tłumienia metodą HPM dla wszystkich wariantów długości belki

Długość [cm]	$ H_{\max} $ [-]	$\left \frac{H_{\max}}{2}\right $ [-]	f_1 [Hz]	f_r [Hz]	f_2 [Hz]	ξ_2 [%]
70 cm	78,8040	52,8944	47,6054	47,9000	48,2348	0,66
60 cm	22,5320	15,9325	63,4637	63,8000	64,2644	0,63
50 cm	32,4194	32,4194	90,7675	91,4000	92,0753	0,72
40 cm	100,7170	100,7170	136,0249	137,0000	137,6885	0,61

Tab. 4. Wyniki identyfikacji trzeciej liczby tłumienia metodą HPM dla wszystkich wariantów długości belki

Długość [cm]	$ H_{\max} $ [-]	$\left \frac{H_{\max}}{2}\right $ [-]	f_1 [Hz]	f_r [Hz]	f_2 [Hz]	ξ_3 [%]
70 cm	147,8043	104,5134	134,4871	135,1000	135,5430	0,39
60 cm	175,8383	124,3365	180,7356	181,7000	182,4626	0,48

Postępując się belkami o długości 70 cm i 60 cm sprawdzono także tendencję zmian wartości liczby tłumienia względem ich kolejności, co zostało przedstawione na rysunku 2. Obie aproksymacje mają bardzo podobny przebieg, wraz ze wzrostem numeru (kolejnej postaci, częstotliwości drgań) wartość liczby tłumienia sposób zmniejsza się.



Rys. 1 Zmiana wartości kolejnych liczb tłumienia wyznaczonych metodą HPM

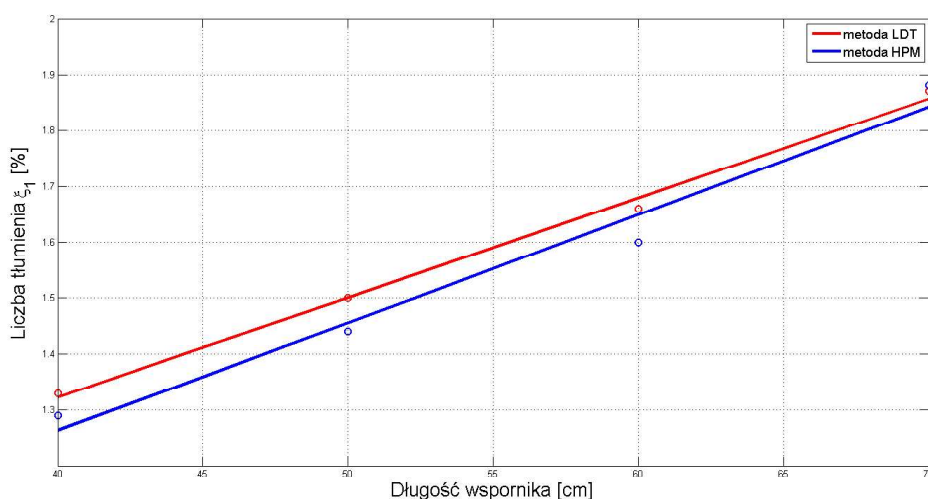
3.3 PORÓWNANIE WYNIKÓW

Uzyskane wartości pierwszej liczby tłumienia w przypadku obu metod dla wszystkich, czterech, wariantów długości belki były bardzo zbliżone (tabela 5).

Tab. 5. Porównanie wartości pierwszej liczby tłumienia uzyskanej za pomocą LDT oraz metodą HPM

Długość [cm]	ξ_1^{LDT} [%]	ξ_1^{HPM} [%]	$\xi_1^{LDT} / \xi_1^{HPM}$ [-]
70 cm	1,87	1,88	0,99
60 cm	1,66	1,60	1,04
50 cm	1,50	1,44	1,04
40 cm	1,33	1,29	1,04

Świadczy to o poprawnym odczytaniu przeprowadzeniu obliczeń w przypadku obu metod. Obie techniki uznawane są za przybliżone, więc w celu zweryfikowania wyników powinny zostać one przyrównane do wartości uzyskanych metodą pozwalającą na większą dokładność, na przykład RDT. Metoda pozwoliłaby również na analizę porównawczą większej ilości liczb tłumienia, ponieważ LDT ogranicza się do wyznaczenia jedynie pierwszej. W obu przypadkach zanotowano wzrostową tendencję wartości liczby tłumienia względem rosnącej długości wspornika (rysunek 4).



Rys. 4. Aproksymacja wartości ξ_1 w zależności od długości wspornika wyznaczonej metodą LDT oraz HPM

4 WNIOSKI

W pracy przedstawiono wykorzystanie metod LDT oraz HPM do uzyskania wartości tłumienia badanego rzeczywistego modelu. Na wstępie wyznaczono częstotliwości drgań badanych modeli za pomocą eksperymentalnej analizy modalnej. Pozwoliły one na pozyskanie pierwszej liczby tłumienia w przypadku obliczeń prowadzonych metodą LDT oraz dwóch i trzech, w zależności od długości analizowanej belki, przy użyciu techniki HPM.

Dla pierwszej liczby tłumienia wartości uzyskane z wykorzystaniem obu metod były do siebie bardzo zbliżone, maksymalna różnica w wynikach wyniosła zaledwie 0,06 punktu procentowego. Wyniki można uznać za zbieżne ze sobą. Wartość tłumienia uzyskana dla najdłuższego badanego wspornika była największa, natomiast dla najkrótszego najmniejsza. W przypadku drugiej liczby tłumienia zależność wartości liczby tłumienia od długości modelu eksperymentalnego była zupełnie różna od zaobserwowanej przy analizie pierwszej. Wartość drugiej liczby tłumienia dla wszystkich wariantów długości wspornika była podobna. Za pomocą aproksymacji stwierdzono, że w tym wypadku tłumienie bardzo nieznacznie wzrasta wraz z długością modelu. Trzecią liczbę tłumienia udało wyznaczyć się jedynie dla dwóch wariantów długości belki ze względu na występujące szumy dla dwóch pozostałych.

Analizując liczby tłumienia dla konkretnych długości wsporników zauważono zmniejszanie się wartości tłumienia przy zwiększającej się częstotliwości. Tendencja była zauważalna dla wszystkich długości analizowanych modeli. Na podstawie zidentyfikowanych liczb tłumienia można uznać, że cechą badanego obiektu, czyli stalowej belki wspornikowej, jest malejąca wartość liczby tłumienia wraz ze wzrostem wartości częstotliwości.

5 BIBLIOGRAFIA

- [1] Chopra A. K., Dynamics of Structures: Theory and Applications do Earthquake Engineering, Pearson Prentice Hall, New Jersey
- [2] Gurley K., Kareem A., Damping in structures-its evaluation and treatment of uncertainty, Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics 59, 1996, p. 131-157.
- [3] Hatzigeorgiou G. D. , Papagiannopoulos G. A., On the use of the half-power bandwidth method to estimate damping in building structures, Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2011, p. 1075-1079.
- [4] Kaskonas P., Nakutis Z., Bridge vibration logarithmic decrement estimation at the presence, Measurement, 2010, 487-492.
- [5] Rucka M., Wilde K., Dynamika budowli z przykładami w środowisku MATLAB, Gdańsk, Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej, 2012.