



Imię i nazwisko autora rozprawy: Karol Daszkiewicz  
Dyscyplina naukowa: Budownictwo

## ROZPRAWA DOKTORSKA

Tytuł rozprawy w języku polskim: Rodzina elementów hybrydowo-mieszanych w 6-parametrowej teorii powłok, analiza geometrycznie nieliniowa powłok o funkcyjnej zmienności materiału wzdłuż grubości

Tytuł rozprawy w języku angielskim: A family of hybrid mixed elements in 6-parameter shell theory, geometrically nonlinear analysis of functionally graded shells

Promotor  <i>podpis</i>	Drugi promotor  <i>podpis</i>
dr hab. inż. Wojciech Witkowski, prof. nadzw. PG	
Promotor pomocniczy  <i>podpis</i>	Kopromotor  <i>podpis</i>
dr inż. Stanisław Burzyński	



Pragnę w tym miejscu podziękować:

Promotorowi Wojciechowi Witkowskiemu  
za wieloletnią współpracę,  
życzliwą pomoc w przygotowaniu rozprawy,  
przekazaną wiedzę, cierpliwość i zaufanie

Profesorowi Jackowi Chróścielewskiemu oraz Profesorowi Wojciechowi Pietraszkiewiczowi  
za przekazaną wiedzę, inspirację do dalszych badań oraz cenne uwagi

Promotorowi pomocniczemu Stanisławowi Burzyńskiemu  
za krytyczne uwagi i rady na etapie przygotowania rozprawy

Rodzinie, Dziewczynie  
za wsparcie, cierpliwość i wyrozumiałość w trakcie przygotowania rozprawy

Narodowemu Centrum Nauki  
za wsparcie finansowe

**Rozprawę przygotowano w ramach projektu badawczego nr 2015/17/B/ST8/02190 pt.**

**„Sformułowanie i numeryczna implementacja równań konstytutywnych  
opisujących deformacje nieodwracalne w ramach  
nieliniowej 6-parametrowej teorii powłok”**

**Część obliczeń wykonano na komputerach Centrum Informatycznego TASK**

## STRESZCZENIE ROZPRAWY

W rozprawie opracowano rodzinę 4-węzłowych hybrydowo-mieszanych elementów skończonych w ramach nieliniowej 6-parametrowej teorii powłok, w której szóstym stopniem swobody jest obrót owinięcia. Elementy mieszane i częściowo mieszane sformułowano na podstawie odpowiednio podstawowego i autorsko zmodyfikowanego trójpolowego funkcjonału Hu-Washizu. W pracy zastosowano oryginalną interpolację niezależnych pól niesymetrycznych odkształceń i uogólnionych naprężeń. W zadaniach liniowych oraz nieliniowych zbadano wpływ wariantu interpolacji na uzyskane wyniki. Opracowane elementy umożliwiają zastosowanie dużych przyrostów w obliczeniach i wymagają znacznie mniejszej liczby iteracji równowagi w analizach nieliniowych niż istniejące elementy sformułowane w 6-parametrowej teorii powłok. Ponadto, zaproponowane elementy charakteryzują się małą wrażliwością na efekt blokady. W rozprawie wyznaczono oryginalne równania konstytutywne powłok o funkcyjnej zmienności materiału wzdłuż grubości w wyniku całkowania po grubości PSN Cosseratów. Prawo konstytutywne sformułowano niezależnie względem neutralnej i środkowej powierzchni odniesienia. W analizach geometrycznie nieliniowych zbadano wpływ wykładnika w prawie potęgowym oraz stałych ośrodka Cosseratów na deformację powłoki. Wpływ wyboru powierzchni odniesienia zaobserwowano w szczególności w nieliniowej analizie stateczności konstrukcji.

## SUMMARY OF PHD DISSERTATION

A family of hybrid mixed 4–node finite elements were proposed in the framework of a general nonlinear 6–parameter shell theory with the 6th parameter being the drilling degree of freedom. The mixed and semi-mixed elements were formulated based on basic and modified three field Hu-Washizu functional, respectively. Original interpolation of independent asymmetric strains and stress resultants was used in dissertation. The influence of interpolation variant on the results was investigated in linear and nonlinear benchmark problems. The hybrid mixed elements allow for large load steps in computations and require significantly less equilibrium iterations in nonlinear analyses than existing elements formulated in 6–parameter shell theory. Moreover, the proposed elements are characterized by low sensitivity to the locking effect. The original constitutive equations for shells made of functionally graded material were derived by through–the–thickness integration of the Cosserat plane stress equations. The constitutive law was formulated independently with respect to the neutral physical surface and the middle reference surface. The influence of the power–law exponent and Cosserat parameters on shell deformation was evaluated in geometrically nonlinear analyses. The influence of choice of the reference surface is observed especially in nonlinear stability analysis.

## SPIS TREŚCI

Wykaz ważniejszych oznaczeń i skrótów .....	1
1. WSTĘP.....	3
1.1. Efekt blokady w powłokowych elementach skończonych .....	3
1.1.1. Charakterystyka zjawiska blokady .....	3
1.1.2. Sposoby uniknięcia efektu blokady .....	4
1.2. Hybrydowo–mieszane elementy skończone.....	6
1.3. Powłoki o funkcyjnej zmienności materiału wzdłuż grubości .....	8
1.4. Cel rozprawy .....	10
1.5. Organizacja pracy .....	11
2. ZARYS NIELINIOWEJ 6-PARAMETROWEJ TEORII POWŁOK.....	13
2.1. Wprowadzenie.....	13
2.2. Podstawowe informacje .....	14
2.2.1. Główne cechy teorii .....	14
2.2.2. Ciało typu powłoka .....	14
2.2.3. Powierzchnia podstawowa .....	15
2.2.4. Parametryzacja powierzchni podstawowej.....	16
2.3. Całkowe równania równowagi powłok .....	17
2.3.1. Regularne podciało typu powłoka .....	17
2.3.2. Ogólna postać zasad zachowania .....	17
2.3.3. Wyznaczenie całkowych równań równowagi .....	18
2.4. Lokalne równania równowagi powłok .....	19
2.5. Słaba postać problemu brzegowego .....	20
2.6. Kinematyka powłoki .....	21
2.7. Naturalne miary odkształceń .....	22
2.8. Warunki nierozdzielności odkształceń .....	22
3. ZASADY WARIACYJNE.....	25
3.1. Rys historyczny .....	25
3.2. Informacje wstępne .....	27
3.2.1. Wirtualne przemieszczenia.....	27
3.2.2. Notacja macierzowo-operatorowa.....	27
3.3. Zasada przemieszczeń wirtualnych .....	29
3.4. Przegląd zasad wariacyjnych.....	30
3.4.1. Wprowadzenie.....	30
3.4.2. Zasada zachowania energii potencjalnej .....	30
3.4.3. Zasada Hu-Washizu .....	31
3.4.4. Zasada Fraeijs de Veubeke-Hu-Washizu .....	31
3.4.5. Zasada Hellingera-Reissnera.....	31
3.4.6. Zasady wariacyjne komplementarne .....	32
3.4.7. Relacje między zasadami wariacyjnymi .....	33
3.5. Zmodyfikowana zasada wariacyjna Hu-Washizu .....	33
3.6. Linearyzacja trójpolowej zasady wariacyjnej Hu-Washizu .....	34
3.6.1. Wprowadzenie.....	34
3.6.2. Pierwsza wariacja funkcjonału.....	34
3.6.3. Druga wariacja funkcjonału .....	35
3.7. Linearyzacja zmodyfikowanej zasady wariacyjnej Hu-Washizu .....	35
3.7.1. Pierwsza wariacja funkcjonału.....	35
3.7.2. Druga wariacja funkcjonału .....	36

4. RÓWNANIA KONSTITUTYWNE .....	37
4.1. Wprowadzenie .....	37
4.1.1. Postulaty .....	37
4.1.2. Przegląd literatury w ramach 6-parametrowej nieliniowej teorii powłok.....	38
4.2. Materiał liniowo-sprężysty .....	39
4.3. Równania konstytutywne dla liniowego ośrodka Cosseratów .....	40
4.3.1. Przegląd literatury.....	40
4.3.2. Płaski stan naprężeń liniowego ośrodka Cosseratów.....	40
4.3.3. Równania konstytutywne.....	41
4.3.4. Identyfikacja stałych materiałowych ośrodka Cosseratów .....	43
4.4. Powłoki o funkcyjnej zmienności materiału wzdłuż grubości – informacje wstępne .....	43
4.4.1. Rozkład materiału wzdłuż grubości.....	43
4.4.2. Metody określania efektywnych parametrów materiałowych .....	44
4.5. Współczynnik korekcyjny ścinania dla powłok FGM .....	46
4.6. Równania konstytutywne powłok FGM względem środkowej powierzchni odniesienia .....	48
4.6.1. Założenia.....	48
4.6.2. Pomocnicze całki określone na grubości powłoki FGM .....	48
4.6.3. Równania konstytutywne.....	49
4.7. Równania konstytutywne powłok FGM względem neutralnej powierzchni odniesienia .....	50
4.7.1. Założenia.....	50
4.7.2. Pomocnicze całki określone na grubości powłoki FGM .....	50
4.7.3. Równania konstytutywne.....	51
4.8. Porównanie równań konstytutywnych powłok FGM względem powierzchni środkowej i powierzchni neutralnej .....	52
5. HYBRYDOWO-MIESZANE ELEMENTY POWŁOKOWE.....	53
5.1. Wstęp do MES .....	53
5.2. Interpolacja funkcji wektorowych .....	53
5.3. Reguła transformacyjna .....	55
5.4. Skorygowane współrzędne naturalne i współrzędne skośne .....	56
5.4.1. Wprowadzenie .....	56
5.4.2. Skorygowane współrzędne naturalne .....	57
5.4.3. Współrzędne skośne .....	58
5.4.4. Porównanie, interpretacja graficzna.....	59
5.5. Dwustopniowa interpolacja odkształceń ścinania poprzecznego .....	59
5.6. Interpolacja niezależnych uogólnionych naprężeń .....	60
5.6.1. Elementy mieszane .....	60
5.6.2. Elementy częściowo mieszane.....	62
5.6.3. Lokalne warunki równowagi .....	62
5.7. Interpolacja niezależnych odkształceń wewnątrz elementu.....	62
5.7.1. Elementy mieszane .....	62
5.7.2. Elementy częściowo mieszane.....	64
5.7.3. Weryfikacja warunku ortogonalności dla wzbogaconych odkształceń .....	65
5.7.4. Warunki nierozdzielności odkształceń .....	66
5.8. Macierze elementowe .....	66
5.8.1. Interpolacja wirtualnych przemieszczeń wewnątrz elementu skończonego .....	66
5.8.2. Elementy mieszane .....	67
5.8.3. Elementy częściowo mieszane.....	68
5.9. Układ równań zlinearyzowanych.....	69
5.9.1. Elementy mieszane .....	69
5.9.2. Elementy częściowo mieszane.....	70
5.10. Kondensacja części wzbogaconej niezależnych odkształceń .....	71
5.10.1. Elementy mieszane .....	71
5.10.2. Elementy częściowo mieszane.....	72
5.11. Wyznaczenie stycznej macierzy sztywności.....	73



5.11.1 Wprowadzenie.....	73
5.11.2. Elementy mieszane.....	73
5.11.3. Elementy częściowo mieszane.....	73
5.11.4. Globalne równanie macierzowe.....	74
5.12. Aktualizacja zmiennych.....	75
5.13. Proponowane elementy hybrydowo-mieszane.....	76
<b>6. PRZYKŁADY NUMERYCZNE DO OCENY POWŁOKOWYCH ELEMENTÓW</b>	
<b>HYBRYDOWO-MIESZANYCH.....</b>	<b>79</b>
6.1. Uwagi wstępne.....	79
6.2. Przykłady w zakresie liniowym.....	79
6.2.1. Test wartości własnych.....	79
6.2.2. Testy łąty.....	81
6.2.3. Testy dystorsji siatki.....	83
6.2.4. Membrana Cooka.....	87
6.3. Przykłady w zakresie geometrycznie nieliniowym.....	88
6.3.1. Wspornik płytowy w kształcie litery L obciążony siłą skupioną.....	88
6.3.2. Skręcona o 90° belka wspornikowa obciążona siłą.....	91
6.3.3. Utwierdzona powłoka walcowa obciążona siłą.....	97
6.3.4. Swobodna półsfera z otworem obciążona siłami samozrównoważonymi.....	104
6.3.5. Wspornik ceowy obciążony na końcu siłą skupioną.....	112
6.4. Podsumowanie rozwiązań testów liniowych i nieliniowych.....	116
<b>7. PRZYKŁADY ANALIZY POWŁOK O FUNKCYJNEJ ZMIENNOŚCI MATERIAŁU</b>	
<b>WZDŁUŻ GRUBOŚCI.....</b>	<b>119</b>
7.1. Uwagi wstępne.....	119
7.2. Rozciągana swobodna powłoka cylindryczna.....	120
7.3. Chłodnia kominowa (hiperboloida).....	124
7.4. Czasza oparta na rzucie kwadratu, obciążona siłą skupioną.....	127
7.5. Stateczność słupa o przekroju skrzynekowym.....	132
<b>8. PODSUMOWANIE PRACY I WNIOSKI.....</b>	<b>135</b>
8.1. Podsumowanie pracy.....	135
8.2. Wnioski.....	136
8.3. Kierunki dalszych badań.....	138
<b>9. BIBLIOGRAFIA.....</b>	<b>141</b>
<b>A. FORMALNY OPIS OBROTÓW.....</b>	<b>157</b>
A.1. Podstawowe definicje, twierdzenia.....	157
A.1.1. Tensor ortogonalny.....	157
A.1.2. Definicja tensora obrotu, grupa obrotów $SO(3)$ .....	157
A.1.3. Twierdzenie Eulera o obrotach.....	157
A.1.4. Tensor skośnie symetryczny.....	158
A.1.5. Przestrzeń styczna do grupy $SO(3)$ , odwzorowanie $ad(\dots)$ .....	158
A.2. Opis kanonicznej parametryzacji grupy obrotów.....	159
A.2.1. Wprowadzenie.....	159
A.2.2. Parametryzacja kanoniczna.....	159
A.2.3. Akumulacja obrotów.....	160
A.3. Interpolacja tensora obrotu i wektora wirtualnego obrotu.....	160
A.3.1. Wprowadzenie.....	160
A.3.2. Interpolacja na grupie obrotów $SO(3)$ .....	161
A.3.3. Interpolacja wektora wirtualnego obrotu.....	162
<b>B. WYBRANE ASPEKTY PROCEDURY PRZYROSTOWO-ITERACYJNEJ.....</b>	<b>163</b>
B.1. Linearyzacja zasady przemieszczeń wirtualnych.....	163
B.2. Śledzenie i wyznaczanie ścieżek równowagi.....	164
B.3. Techniki sterowania procesem rozwiązywania problemu nieliniowego.....	166
B.4. Kontrola zbieżności procesu iteracyjnego.....	167

---

C. WYBRANE ZAGADNIENIA Z MES .....	169
C.1. Całkowanie numeryczne .....	169
C.2. Wybrane macierze elementowe .....	170
C.2.1. Wprowadzenie.....	170
C.2.2. Operator $B(u)$ w zapisie macierzowym.....	170
C.2.3. Macierz geometryczna .....	171
C.3. Sprawdzenie lokalnych równań równowagi dla przyjętej interpolacji niezależnych uogólnionych naprężeń .....	172
C.4. Sprawdzenie warunków nierozdzielności dla przyjętej interpolacji odkształceń .....	174
C.5. Uniwersalny sposób kondensacji układu równań zlinearyzowanych dla elementów hybrydowo-mieszanych .....	177
D. ANALITYCZNE OBLICZENIE WYBRANYCH CAŁEK PO GRUBOŚCI W PRZYPADKU POWŁOK FGM .....	179

## WYKAZ WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ I SKRÓTÓW

### Oznaczenia

$\otimes$	– iloczyn tensorowy wektorów
$\times$	– iloczyn wektorowy wektorów
$\cdot$	– iloczyn skalarny wektorów, tensorów
$E^3$	– 3-wymiarowa wektorowa przestrzeń euklidesowa
$SO(3)$	– grupa obrotów właściwych, tensorów ortogonalnych
$so(3)$	– przestrzeń tensorów skośnie symetrycznych
$\alpha_s, \alpha_t$	– współczynnik korekcyjny ścinania, współczynnik owinięcia
$\varepsilon_{\alpha\beta}, \varepsilon_\alpha$	– składowe membranowe i ścinania poprzecznego wektora odkształceń
$\zeta$	– współrzędna w kierunku normalnym do powierzchni odniesienia powłoki
$\zeta_0$	– odległość między powierzchnią neutralną i powierzchnią środkową
$\kappa_{\alpha\beta}, \kappa_\alpha$	– składowe zgięciowe i owinięcia wektora krzywizn
$\lambda$	– mnożnik obciążenia
$\pi_{(e)}$	– obszar elementu wzorcowego w dwuwymiarowej przestrzeni liczb rzeczywistych
$\Pi_{(e)}$	– obszar elementu skończonego w przestrzeni $E^3$
$\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$	– kąty obrotu [rad] w układzie kartezjańskim $x, y, z$
$\mathbf{a}_{(e)}$	– elementowy wektor parametrów opisujących interpolację uogólnionych naprężeń
$\mathbf{\beta}_{(e)}$	– elementowy wektor parametrów opisujących interpolację niezależnych odkształceń
$\boldsymbol{\varepsilon}_\beta, \boldsymbol{\kappa}_\beta$	– wektor odkształceń membranowych i poprzecznych, wektor krzywizn
$\boldsymbol{\varepsilon}=(\boldsymbol{\varepsilon}_\beta, \boldsymbol{\kappa}_\beta)$	– wektor uogólnionych niezależnych odkształceń
$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$	– wektor uogólnionych odkształceń obliczonych na podstawie przemieszczeń
$\boldsymbol{\zeta}=(\zeta^1, \zeta^2)$	– współrzędne krzywiznowe na powierzchni odniesienia powłoki
$\boldsymbol{\xi}=(\xi_1, \xi_2)$	– współrzędne naturalne w elemencie standardowym
$\boldsymbol{\xi}^s=(\xi_1^s, \xi_2^s)$	– skorygowane współrzędne naturalne w elemencie standardowym
$\boldsymbol{\xi}^*=(\xi_1^*, \xi_2^*)$	– współrzędne skośne lub skorygowane współrzędne naturalne
$\Phi(\boldsymbol{\varepsilon}_\beta, \boldsymbol{\kappa}_\beta)$	– funkcja powierzchniowej gęstości energii odkształcenia
$\Delta\Psi, \Delta\psi$	– przyrost tensora obrotu, przyrost wektora obrotu
$h_0$	– grubość powłoki
$j$	– jakobian, wyznacznik z macierzy Jacobiego
$j_0$	– jakobian obliczony w środku elementu
$l$	– długość charakterystyczna ośrodka Cosseratów
$n$	– wykładnik w prawie potęgowym
$u, v, w$	– translacje w układzie kartezjańskim $x, y, z$
$v$	– współczynnik Poissona
$x_s, y_s$	– współrzędne skośne w elemencie standardowym
$B_{FGM}$	– sztywność sprzęgająca stan membranowy i zgięciowy
$C$	– sztywność membranowa powłoki
$C_{FGM}$	– sztywność membranowa powłoki FGM
$D$	– sztywność powłoki na zginanie
$D_{FGM}$	– sztywność powłoki FGM na zginanie
$E, G$	– moduł Younga, moduł Kirchhoffa
$J_{\alpha\beta}^0$	– składowe macierzy Jacobiego obliczonej w środku elementu skończonego

$M^{\alpha\beta}, M^\alpha$	– składowe zgięciowe i owinięcia wektora uogólnionych naprężeń
$N$	– stała ośrodka Cosseratów (ang. <i>Cosserat coupling number</i> )
$N_{\text{iter}}, N_{\text{krok}}$	– całkowita liczba iteracji i kroków obliczeniowych w analizie nieliniowej
$N^{\alpha\beta}, Q^\alpha$	– składowe membranowe i tnące wektora uogólnionych naprężeń
$V$	– potencjał obciążenia zewnętrznego
$V_c, V_m$	– zawartość materiału ceramicznego i metalu w warstwie powłoki FGM
$W$	– funkcjonal zasady wariacyjnej Hu-Washizu
$\delta W, \delta^2 W$	– pierwsza i druga wariacja funkcjonału Hu-Washizu
$\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2$	– wektory bazowe dla współrzędnych naturalnych
$\mathbf{p} = (\mathbf{f}, \mathbf{c})$	– wektor powierzchniowego obciążenia zewnętrznego
$\mathbf{q}_{(e)}$	– elementowy wektor uogólnionych przemieszczeń
$\mathbf{r}^{(e)}$	– elementowy wektor sił wewnętrznych
$\mathbf{s} = (\mathbf{n}^\beta, \mathbf{m}^\beta)$	– wektor uogólnionych niezależnych naprężeń
$\mathbf{s}^* = (\mathbf{n}^*, \mathbf{m}^*)$	– wektor obciążenia brzegowego
$\mathbf{t}_\alpha^0, \mathbf{t}_3^0$	– wektory bazy ortogonalnej w konfiguracji odniesienia
$\mathbf{t}_\alpha, \mathbf{t}_3$	– wektory bazy ortogonalnej w konfiguracji zdeformowanej
$\mathbf{u}$	– wektor przemieszczeń translacyjnych w przestrzeni euklidesowej
$\mathbf{u} = (\mathbf{u}, \mathbf{Q})$	– wektor rzeczywistych, uogólnionych przemieszczeń powłoki
$\mathbf{w} = (\mathbf{v}, \mathbf{w})$	– wektor wirtualnych uogólnionych przemieszczeń powłoki
$\mathbf{x}$	– wektor wodzący powierzchni podstawowej w konfiguracji odniesienia
$\mathbf{y}$	– wektor wodzący powierzchni podstawowej w konfiguracji zdeformowanej
$\mathbf{B}(\mathbf{u})$	– macierzowy operator przemieszczenie–odkształcenie
$\mathbf{C}$	– macierz konstytutywna
$\mathbf{K}_{\alpha\beta}^{(e)}, \mathbf{K}_{\beta\alpha}^{(e)}, \mathbf{K}_{\beta\beta}^{(e)}$	– macierze elementowe związane z niezależnymi odkształceniami i naprężeniami
$\mathbf{K}_G^{(e)}$	– macierz geometryczna
$\mathbf{K}_T^{(e)}, \mathbf{K}_{TS}^{(e)}$	– styczna macierz sztywności elementu mieszanego i częściowo mieszanego
$\bar{\mathbf{L}}(\xi)$	– elementowa macierz funkcji kształtu
$\mathbf{M}(\mathbf{x}), \mathbf{N}(\mathbf{x})$	– tensor momentów przekrojowych, tensor sił przekrojowych
$\mathbf{N}_k$	– macierz interpolacyjna wzbogaconych odkształceń we współrzędnych naturalnych
$\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$	– macierze opisujące interpolację pierwszej i drugiej części odkształceń
$\mathbf{Q}$	– ortogonalny tensor obrotu
$\mathbf{S}$	– macierz interpolacyjna niezależnych uogólnionych naprężeń
$\mathbf{T}_\varepsilon^0, \tilde{\mathbf{T}}_\varepsilon^0$	– macierze transformacji niezależnych odkształceń
$\mathbf{T}_\sigma^0, \tilde{\mathbf{T}}_\sigma^0$	– macierze transformacji niezależnych uogólnionych naprężeń
$(\cdot)_{,\beta} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial\zeta^\beta}$	– pochodna cząstkowa po współrzędnych fizycznych
$(\cdot) _\alpha = \frac{\partial(\cdot)}{\partial\zeta^\alpha}$	– pochodna kowariantna po współrzędnych fizycznych

### Skróty

ANS	– koncepcja dwustopniowej interpolacji odkształceń (ang. <i>Assumed Natural Strain</i> )
EAS	– koncepcja wzbogaconych odkształceń (ang. <i>Enhanced Assumed Strain</i> )
FGM	– materiały o funkcyjnej zmienności materiału wzdłuż grubości
MES	– metoda elementów skończonych
MOC	– mechanika ośrodków ciągłych
PSN	– płaski stan naprężeń

## Rozdział 1

### WSTĘP

#### 1.1. Efekt blokady w powłokowych elementach skończonych

##### 1.1.1. Charakterystyka zjawiska blokady

W komercyjnych programach metody elementów skończonych (MES) do modelowania konstrukcji powłokowych wykorzystuje się przemieszczeniowe elementy skończone niskiego rzędu: 4-węzłowe lub 3-węzłowe. Pod pojęciem elementów niskiego rzędu rozumie się elementy, w których zastosowano liniowe funkcje kształtu, najczęściej w postaci wielomianów typu Lagrange'a. W literaturze (zob. np. [384]) wykazano, że w przypadku Lagrange'owskich elementów powłokowych o  $n \times n$  węzłach wymagany rząd całkowania kwadraturą Gaussa–Legendre'a (zob. Dodatek C.1) wynosi  $n \times n$  punktów całkowania. Ten rodzaj całkowania określa się jako całkowanie pełne (ang. *full integration*, *FI*). W większości programów MES (np. Robot Structural Analysis Professional, SOFiSTiK AG) użytkownik ma do dyspozycji tylko jeden rodzaj elementu powłokowego o pełnym całkowaniu macierzy elementowych. Wybór typu elementu powłokowego i dostęp do elementów wyższego rzędu jest możliwy tylko w niektórych specjalistycznych systemach obliczeniowych (np. Abaqus, Ansys, MSC Nastran). Jednak ze względu na czas obliczeń oraz prostotę sformułowania w tych programach również w zdecydowanej większości analiz wykorzystuje się przemieszczeniowe elementy niskiego rzędu. Zastosowanie tych elementów wraz z regułą pełnego całkowania numerycznego (baza  $2 \times 2$  punktów całkowania w elementach 4-węzłowych) może doprowadzić jednak do znacznego niedoszacowania wartości przemieszczeń i odkształceń uzyskanych w obliczeniach MES. Efekt ten ma charakter numeryczny, gdyż pojawia się tylko w rozwiązaniu MES i jest określany jako przesztynienie, zakleszczenie, zjawisko blokady (ang. *locking effect*). Poniżej na podstawie prac [8, 26, 371] opisano podstawowe typy efektu blokady, występujące w analizie konstrukcji powłokowych.

Blokada ścinania (ang. *shear locking*) wynika z niemożności zaprezentowania przez elementy niskiego rzędu deformacji, w której znikają poprzeczne odkształcenia postaciowe. W konsekwencji w stanie czystego zginania pojawiają się niemające fizycznego uzasadnienia odkształcenia poprzeczne od ścinania. Sposób powstawania tych fałszywych form odkształceń w elementach belkowych opisano m.in. w pracach [26, 322, 367]. W przypadku cienkich powłok sztywność na ścinanie poprzeczne jest zwykle znacząco większa od sztywności na zginanie. W związku z tym fałszywe odkształcenia postaciowe mogą absorbować bardzo dużą część energii obciążeń zewnętrznych, powodując znaczące przesztynienie deformacji powłoki. W blokadzie ścinania efekt zakleszczenia maleje wraz z zagęszczeniem siatki elementów skończonych (ES) i obserwuje się bardzo powolną zbieżność rozwiązań uzyskanych za pomocą elementów niskiego rzędu do poprawnego rozwiązania.

Blokada membranowa (ang. *membrane locking*) jest spowodowana brakiem możliwości zaprezentowania przez niektóre elementy powłokowe nierozciągliwych postaci deformacji. Podczas gdy rzeczywiste powłoki można z łatwością zginać bez jednoczesnego ich rozciągania bądź ściskania. W przypadku konstrukcji powłokowych sztywność na zginanie jest znacząco mniejsza od sztywności membranowej. W związku z tym, gdy w elementach powłokowych w trakcie czystego zginania pojawiają się niezerowe odkształcenia membranowe, to duża część energii obciążeń zewnętrznych jest niepoprawnie dystrybuowana do energii związanej z fikcyjną membranową postacią deformacji. W konsekwencji w blokadzie membranowej, podobnie jak w blokadzie ścinania, obserwuje się znaczące niedoszacowanie wartości przemieszczeń i odkształceń. Efekt ten odgrywa szczególną rolę w analizie stateczności, gdyż wiele postaci wyboczeniowych jest związanych z nierozciągliwą lub prawie nierozciągliwą postacią deformacji. Zjawisko blokady membranowej nie występuje w płaskich 4-węzłowych elementach powłokowych, zob. [26]. Zatem na efekt ten są w szczególności wrażliwe konstrukcje powłokowe, w których kształt geometrii wymusza zastosowanie niepłaskich elementów oraz w których elementy w wyniku deformacji zostają zwichrowane (ang. *warped*). Efekt zakleszczenia maleje wraz z zagęszczeniem dyskretyzacji.

W teoriach powłok, w których uwzględnia się zmianę grubości powłok oraz stosuje trójwymiarowe związki konstytutywne występuje również efekt *Poisson thickness locking* [32]. Efekt ten wynika

ze sprzężenia, przy niezerowym współczynniku Poissona, odkształceń membranowych z odkształceniami poprzecznymi, co powoduje powstanie fikcyjnych naprężeń ścinania poprzecznego. Ten rodzaj zjawiska blokady nie zależy od gęstości przyjętej dyskretyzacji, podobnie jak efekt *volumetric locking* w trójwymiarowych elementach skończonych w zagadnieniach bliskich nieściśliwości. W ramach 7-parametrowej teorii powłok w przypadku zastosowania rzadkiej siatki ES dla silnie zakrzywionych powłok zaobserwowano również zjawisko *curvature thickness locking*, zob. np. [32].

### 1.1.2. Sposoby uniknięcia efektu blokady

Zjawisko blokady, opisane w poprzednim podrozdziale, występuje głównie w elementach powłokowych niskiego rzędu, w których zastosowano regułę pełnego całkowania. Reguła ta pozwala wyznaczyć dokładną wartość funkcji podcałkowej, jednak powoduje efekt blokady. W związku z tym w celu uniknięcia tego efektu w niektórych metodach stosuje się inną technikę całkowania numerycznego. Przeglądu metod stosowanych do zminimalizowania zjawiska blokady w rozwiązaniach MES dokonano m.in. w pracach [8, 128, 312, 370]. Poniżej opisano najczęściej stosowane techniki w przypadku elementów powłokowych.

Jedną z najprostszych i najstarszych metod służących do uniknięcia efektu blokady jest całkowanie jednolicie zredukowane (ang. *uniform reduced integration*, URI), zaproponowane równolegle w pracach [245, 385]. W technice tej stosuje się niższy rząd całkowania numerycznego niż w regule całkowania pełnego. Zabieg ten pozwala wyeliminować z pól przemieszczeń składowe wielomianów interpolacyjnych wyższego rzędu odpowiedzialne za efekt blokady. Metoda ta bardzo skutecznie usuwa zjawisko blokady z rozwiązań MES, jednak niestety wprowadza jednocześnie do niego fałszywe formy deformacji, tzw. postaci pasożytnicze lub zero-energetyczne (ang. *spurious zero-energy modes*). Występowanie tych postaci jest związane z pojawieniem się w macierzy sztywności dodatkowych, nieuzasadnionych fizycznie, zerowych wartości własnych. Wartościom tym odpowiadają wektory własne opisujące postać deformacji, która jednak związana jest z niezerowymi odkształceniami. Podczas gdy wektorom własnym opisującym ruch sztywny odpowiadają zerowe odkształcenia. W związku z możliwością pojawienia się form pasożytniczych konieczna jest kontrola ich występowania. W celu ustabilizowania postaci zero-energetycznych stosuje się różne techniki stabilizacji kinematyki elementu, zob. np. [26]. Początkowo technikę całkowania zredukowanego traktowano jako „trick” numeryczny, ze względu na brak podstaw teoretycznych. Oryginalną próbę uzasadnienia tej techniki podjęto w przypadku elementu belkowego w pracy [189].

W technice selektywnie zredukowanego całkowania (ang. *selective reduced integration*, SRI) część macierzy sztywności, odpowiadająca np. za zginanie, jest całkowana w sposób ścisły (FI), podczas gdy pozostała część macierzy jest całkowana w sposób zredukowany (RI). Najczęściej kwadraturę zredukowaną stosuje się do części macierzy sztywności odpowiedzialnych za stan membranowy i stan ścinania poprzecznego, które najbardziej narażone są na efekt blokady. W przypadku techniki SRI, podobnie jak w technice RI, mogą pojawić się pasożytnicze formy deformacji. Ponadto, w przypadku skomplikowanych związków konstytutywnych rozdzielenie członów odpowiedzialnych za np. zginanie i stan membranowy może być kłopotliwe. Elementy powłokowe z całkowaniem zredukowanym i/lub częściowo zredukowanym sformułowano m.in. w pracach [27, 48, 62, 136, 164, 368].

W celu zwiększenia dokładności elementów niskiego rzędu w pracy [359] zaproponowano dodanie do pola przemieszczeń dwóch niezgodnych postaci (ang. *incompatible modes*) deformacji opisujących efekt zginania w płaszczyźnie elementu. Parametry określające dodatkowe postaci deformacji przyjmowano niezależnie w obrębie każdego ES, dlatego mogły być statycznie kondensowane na poziomie elementu. Koncepcja ta dała początek tzw. niedostosowanym elementom skończonym (ang. *non-conforming elements*). W celu spełnienia testu łąty przez elementy skończone (sformułowano w [359]) o dowolnym kształcie zaproponowano w pracy [334] modyfikację tych elementów. Modyfikacja ta polegała na określeniu składowych macierzy Jacobiego w środku elementu skończonego podczas interpolacji niezgodnych postaci deformacji. Ze względu na to, że metoda niezgodnych postaci nie wynikała wprost ze sformułowania wariacyjnego, to przez wiele lat nie miała podstaw teoretycznych. Doczekała się ich dopiero w pracy [309], w której pokazano, że metoda ta powinna być interpretowana raczej jako wzbogacenie odkształceń, a nie przemieszczeń. W pracy [309] sformułowano w ten sposób podejście tzw. wzbogaconych odkształceń (ang. *enhanced assumed strain*, EAS). W metodzie tej standardowe, zgodne pole odkształceń wzbogaca się na poziomie elementu o pewne założone pole, które nie musi spełniać warunków ciągłości na brzegach elementu. Z tego powodu parametry po-

la wzbogacającego odkształcenia mogą być statycznie kondensowane na poziomie elementu. Sformułowanie EAS zostało rozwinięte w pracy [305] i zastosowane do analiz w zakresie geometrycznie nieliniowym. W pracy [375] zwrócono uwagę na problem postaci zero-energetycznych pojawiających się w przypadku dużych odkształceń ściskających. Działania podjęte w celu wyeliminowania form pasywnych w elementach EAS podsumowano w pracach [15, 127]. Technikę EAS zastosowano tylko do odkształceń membranowych w elementach powłokowych zaproponowanych w pracach [10, 28, 98, 369]. Tymczasem w [48, 153, 293, 296, 370] sformułowanie wzbogacone użyto do składowych membranowych i poprzecznych tensora odkształceń. Podejście EAS do wszystkich składowych tensora odkształceń zastosowano m.in. w pracach [56, 117]. Modyfikację funkcji kształtu zapewniającą lepszą dokładność w przypadku siatek z dystorsją zaproponowano w [37]. W pracy [305] sformulowano koncepcję tzw. wzbogaconego gradientu deformacji (ang. *enhanced assumed displacement gradient*, EADG), która jest bardziej związana z metodą niezgodnych postaci niż technika EAS. W koncepcji tej standardowy gradient deformacji zostaje wzbogacony odpowiednio skonstruowaną macierzą. Metodę wzbogaconego gradientu deformacji zastosowano m.in. w pracach [361, 367].

Początków techniki założonych odkształceń (ang. *assumed natural strain*, ANS) można upatrywać w pracach [165, 212]. Jednak podejście ANS, określane także jako dwustopniowa interpolacja odkształceń (zob. np. [67]), w powszechnie znanej formie zostało sformułowane dla 4-węzłowego elementu powłokowego w pracach [23, 97], a dla elementów wyższego rzędu w [22, 159]. Podejście ANS pozwala skutecznie zminimalizować wpływ blokady ścinania na rozwiązania MES. W ramach dwustopniowej interpolacji odkształceń, najpierw na podstawie przemieszczeń węzłowych oblicza się za pomocą standardowych funkcji kształtu odkształcenia w punktach pomiarowych (ang. *sample points*), określonych w bazie naturalnej elementu. W drugim etapie wartości odkształceń w punktach całkowania Gaussa-Legendre'a wyznacza się za pomocą specjalnych funkcji interpolacyjnych na podstawie wartości odkształceń z punktów pomiarowych. Bardzo podobną procedurę stosuje się do operatora przemieszczenie-odkształcenie. Podejście ANS jest bardzo często stosowane w elementach powłokowych do wyznaczania odkształceń ścinania poprzecznego, ponieważ jest dość proste w implementacji oraz nie wymaga założenia dodatkowych parametrów na poziomie elementu. Elementy *MITCn* wykorzystujące technikę dwustopniowej interpolacji odkształceń są wciąż rozwijane, zob. np. prace [24, 179, 183]. W pracach [158, 187] koncepcję ANS zastosowano zarówno do membranowych jak i poprzecznych składowych tensora odkształceń. W ramach nieliniowej 6-parametrowej teorii powłok podejście to wykorzystano w pracy [62] do sformułowania elementów ASCe4 i ASCe9, które przetestowano następnie szerzej w [67]. W pracy [32] zwrócono uwagę, że zastosowanie podejścia dwustopniowej interpolacji do składowych membranowych tensora odkształceń sprawia, że elementy są bardziej wrażliwe na dystorsje podziału. Oryginalne połączenie podejścia dwustopniowej interpolacji z techniką całkowania zredukowanego w przypadku elementów 9-węzłowych zaproponowano w pracach [239, 240]. Podejście ANS zastosowano w interpolacji wszystkich składowych tensora odkształceń w pracy [196], w której sformulowano rodzinę elementów powłokowych z pięcioma stopniami swobody w ramach koncepcji ścisłej geometrii (ang. *exact geometry*).

Jedną z najprostszych metod uniknięcia efektu blokady, charakterystycznego dla elementów skończonych niskiego rzędu, jest zastosowanie w obliczeniach elementów przemieszczeniowych wyższego rzędu. W ramach rozważanej w rozprawie nieliniowej 6-parametrowej teorii powłok w pracach [62, 67] pokazano, że w przypadku 16-węzłowych elementów powłokowych efekt blokady praktycznie nie występuje. W związku z tym rozwiązania uzyskane za pomocą tych elementów zostaną użyte jako podstawowe rozwiązania odniesienia w rozdziale siódmym rozprawy. Podstawową wadą elementów wyższego rzędu jest znaczące wydłużenie czasu obliczeń względem elementów 4-węzłowych.

W celu sformułowania elementów przemieszczeniowych wolnych od zjawiska blokady w pracy [176] zaproponowano koncepcję fizycznych funkcji kształtu. W ramach tego podejścia do sformułowania funkcji kształtu stosuje się pola przemieszczeń otrzymane w wyniku rozwiązania układów równań różniczkowych. W ten sposób elementy powłokowe są formułowane dla konkretnego typu geometrii i z tego powodu nie mogą być stosowane w przypadku konstrukcji powłokowych o dowolnej geometrii. W celu ominięcia tego podstawowego ograniczenia podejścia fizycznych funkcji kształtu w pracy [130] zaproponowano użycie funkcji NURBS podczas transformacji geometrii elementu. Koncepcję fizycznych funkcji kształtu zastosowano również m.in. w pracach [129, 131].

Do tej pory opisano różne metody poprawiania elementów przemieszczeniowych niskiego rzędu. W związku z zaobserwowanymi wadami elementów przemieszczeniowych w literaturze jako alterna-

tywę zaproponowano elementy hybrydowo–mieszane. Elementy te są formułowane na podstawie wielopolowych zasad wariacyjnych i pozwalają znacząco zminimalizować efekt blokady. Przeglądu i opisu opracowanych elementów hybrydowo–mieszanych dokonano w kolejnym podrozdziale.

## 1.2. Hybrydowo–mieszane elementy skończone

W 1964 roku w pracy [247] sformułowano na podstawie zasady zachowania energii komplementarnej element hybrydowy z założonym polem naprężeń i polem przemieszczeń kompatybilnym z zadanymi przemieszczeniami na brzegu elementu. Element ten zapoczątkował koncepcję opracowywania elementów skończonych na podstawie wielopolowych zasad wariacyjnych. W ten sposób formułowanych elementach hybrydowo–mieszanych poza polem przemieszczeń jako niezależne przyjmowano również pole naprężeń i/lub pole odkształceń. W pracy przeglądowej [251] pokazano, że odpowiednio zdefiniowane elementy hybrydowo–mieszane charakteryzują się dużą dokładnością, efektywnością obliczeniową oraz pozwalają znacząco zminimalizować zjawisko blokady w elementach skończonych niskiego rzędu. Różne obszary zastosowań elementów hybrydowo–mieszanych opisano m.in. w książce [255].

Wraz z intensywnym rozwojem koncepcji tworzenia elementów na podstawie wielopolowych zasad wariacyjnych w literaturze proponowano różne metody ich klasyfikacji [251]. W pracy [246] zaproponowano, aby określenia *mieszane* używać do elementów formułowanych na podstawie wielopolowych zasad wariacyjnych, a określenia *hybrydowe* do elementów, w których za pomocą mnożników Lagrange’a wymuszono warunki zgodności pól na brzegach między elementami. Jednak ze względu na to, że w przypadku niektórych elementów klasyfikacja ta była niejednoznaczna, w pracy [250] zasugerowano stosować termin *hybrydowo/mieszane* do wszystkich nieklasycznych sformułowań elementów skończonych. Podczas konferencji w Atlancie Gallagher zaproponował alternatywną metodę klasyfikacji elementów opracowanych na podstawie wielopolowych zasad wariacyjnych. Zgodnie z tą koncepcją określenia *hybrydowe* należy używać do elementów, w przypadku których w wyniku statycznej kondensacji w globalnym równaniu macierzowym jedynymi niewiadomymi są węzłowe przemieszczenia [251]. Natomiast termin *mieszane* zgodnie z tą klasyfikacją powinno się stosować, gdy w globalnym równaniu macierzowym występuje więcej niż jedno pole niewiadomych. Wobec braku jednej ogólnie przyjętej metody klasyfikacji elementów sformułowanych na podstawie wielopolowych zasad wariacyjnych, w niniejszej rozprawie zdecydowano zastosować za pracą [250] termin *hybrydowo–mieszane* do całej rodziny opracowanych elementów powłokowych. Taką konwencję przyjęto również m.in. w pracach [137, 349, 376]. W dalszej części rozprawy w celu rozróżnienia typów zaproponowanych elementów powłokowych termin *mieszane* stosowano do elementów opracowanych na podstawie zasady wariacyjnej Hu–Washizu, a określenie *częściowo mieszane* w stosunku do elementów, w których sformułowanie hybrydowo–mieszane zastosowano tylko do wybranych składowych tensora odkształceń i uogólnionych naprężeń. Tymczasem w zamieszczonym poniżej przeglądzie elementów hybrydowo–mieszanych użyto nazw elementów z cytowanych prac.

Element hybrydowy o założonym polu naprężeń zaproponowany w [247] zastosowano do analizy płyt Kirchhoffa [248], uniknięcia efektu blokady w prawie nieściśliwych materiałach [253] i zminimalizowania blokady ścinania w cienkich płytach [270, 317]. Zastosowanie zasady zachowania energii komplementarnej do formułowania elementów skończonych wiąże się jednak z pewnymi ograniczeniami, np. problemami ze spełnieniem warunków równowagi dla założonych naprężeń. Z tego powodu w późniejszych pracach (zob. np. [178, 315]) elementy o założonym polu naprężeń opracowywano głównie na podstawie zasady wariacyjnej Hellingera–Reissnera. W tak sformułowanych elementach hybrydowych warunki równowagi dla naprężeń nie muszą być spełnione w sposób ścisły, a dla pola przemieszczeń nie jest wymagana ciągłość klasy  $C^1$  na brzegach elementu. Znacząco ułatwia to przyjmowanie pola założonych naprężeń w obrębie elementu, co pozwala m.in. na eliminację postaci zero–energetycznych [252] oraz konstruowanie elementów skończonych o zwiększonej dokładności [249]. W elementach sformułowanych na podstawie funkcjonału Hellingera–Reissnera pole przemieszczeń jest interpolowane w standardowy sposób, np. za pomocą liniowych funkcji kształtu, a niezależne pole naprężeń jest kondensowane na poziomie elementu.

Korzystając z koncepcji niezgodnych postaci deformacji, Pian i Sumihara zaproponowali w pracy [254] element hybrydowy o założonym polu naprężeń określonym we współrzędnych naturalnych i opisanym za pomocą minimalnej liczby pięciu parametrów. Element ten sformułowano w płaskim



stanie naprężenia, a jego cechą charakterystyczną była mała wrażliwość na dystorsje podziału. W pracy [316] zastosowano bogatszą 7-parametrową interpolację pola niezależnych naprężeń, jednak w ten sposób sformułowany element dawał zbyt sztywną deformację. Modyfikację elementu Pian–Sumihary [254] polegającą na zastosowaniu współrzędnych skośnych zamiast współrzędnych naturalnych zaproponowano w pracy [378]. Współrzędne skośne zastosowano również w pracy [364], w której pokazano, że przyjęcie 7-parametrowej interpolacji pola założonych naprężeń wraz z koncepcją wzbogaconego gradientu deformacji daje taką samą dokładność jak interpolacja 5-parametrowa. Podejście założonych naprężeń zastosowano w elemencie powłokowym opisanym w pracach [306, 307] do składowych membranowych i zgięciowych tensora uogólnionych naprężeń. W elemencie tym do interpolacji odkształceń ścinania poprzecznego użyto koncepcji ANS. Element hybrydowy o zoptymalizowanym polu założonych naprężeń opisano w [379]. W pracy [33] pokazano, że możliwe jest zaproponowanie elementów hybrydowych o założonym polu naprężeń, które dają takie same wyniki jak elementy sformułowane zgodnie z koncepcją EAS. Natomiast w pracy [135] na podstawie zasady wariacyjnej Hellingera–Reissnera sformulowano element powłokowy, w którym zastosowano bardzo szybką metodę określania macierzy sztywności dzięki analitycznemu wyznaczeniu pewnych macierzy.

Powłokowe i płytowe elementy hybrydowe o założonym polu odkształceń zaproponowano w [204] i następnie rozwinięto w pracach [205, 206, 278]. Elementy te sformulowano na podstawie zmodyfikowanej zasady wariacyjnej Hellingera–Reissnera, w której jako niezależne przyjęto pole odkształceń oraz pole przemieszczeń. W elementach o założonym polu odkształceń, podobnie jak w elementach o założonym polu naprężeń, pole przemieszczeń jest interpolowane w standardowy sposób, a pole odkształceń jest kondensowane na poziomie elementu. W pracy [50] sformulowano hybrydowy element o założonych odkształceniach na podstawie dwupolowej zmodyfikowanej zasady wariacyjnej Hu–Washizu. Za pomocą tego elementu analizowano drgania własne [51] i rozkład naprężeń na grubości powłoki [50] w przypadku powłok z laminatów kompozytowych.

Elementy hybrydowo-mieszane mogą być również formułowane na podstawie trójpolowej zasady wariacyjnej Hu–Washizu. W tego typu elementach oprócz pola przemieszczeń zakłada się niezależne pole odkształceń i niezależne pole naprężeń. W pracach [157, 376, 383] opisano warunki jakie powinny spełniać te elementy, biorąc pod uwagę uniknięcie postaci zero-energetycznych oraz spełnienie testu łąty. Hybrydowo-mieszany element płytowy zaproponowano w pracy [358]. Czterowęzłowy element w płaskim stanie naprężenia/odkształcenia opracowano w [267]. Element ten sformulowano na podstawie zmodyfikowanego funkcjonału Hu-Washizu, do którego dodano pole wzbogacające niezależne odkształcenia. W liniowych i nieliniowych zadaniach testowych pokazano dużą dokładność zaproponowanego elementu. Jego modyfikację polegającą na zastosowaniu w elemencie szczególnej postaci operatora macierzowego przemieszczenie-odkształcenie (zob. [162, 163]) zaproponowano w pracy [268]. W ten sposób sformułowany element charakteryzował się większą efektywnością obliczeniową dzięki diagonalnej strukturze macierzy. W kolejnej pracy [266] zamiast współrzędnych naturalnych w interpolacji niezależnych odkształceń i naprężeń zastosowano skorygowane współrzędne zgodnie z koncepcją zaproponowaną w [334]. W pracy [57] pokazano, że elementy bryłowe o założonym polu naprężeń i odkształceń charakteryzują się doskonałą efektywnością obliczeniową, dużą dokładnością oraz małą wrażliwością na dystorsję siatki ES.

Efektywny 4-węzłowy element powłokowy sformulowany na podstawie trójpolowej zasady wariacyjnej Hu–Washizu zaproponowano w pracy [349]. Jego zastosowanie w analizach nieliniowych, sprężysto-plastycznych umożliwiło użycie dużych przyrostów obciążenia oraz znacząco zmniejszyło liczbę iteracji w porównaniu do elementu o wzbogaconym polu odkształceń. W kolejnej pracy [137] dodano do pola niezależnych odkształceń pole wzbogacające ortogonalne względem pola niezależnych uogólnionych naprężeń. Opracowany element zastosowano do analiz powłok z laminatów kompozytowych, w których pokazano dużą dokładność oraz małą wrażliwość elementu na dystorsję siatki ES. Natomiast w pracy [182] sformulowano efektywny element hybrydowo-mieszany uwzględniający odkształcenia na grubości powłoki. W pracach [135, 137, 182] do interpolacji odkształceń ścinania poprzecznego zastosowano koncepcję ANS.

W pracy [363] zaproponowano element hybrydowo-mieszany w płaskim stanie naprężenia, w którym do interpolacji niezależnych pól odkształceń i naprężeń zastosowano współrzędne skośne. Element ten charakteryzował się małą wrażliwością na dystorsje podziału dla zgrubnych siatek ES. W kolejnej pracy [366] pokazano, że dla elementów o uboższej interpolacji pola założonych odkształceń kontrawariantna reguła transformacji daje korzystniejsze wyniki niż reguła kowariantna. Rodzinę

czterowęzłowych elementów powłokowych opracowanych na podstawie trójpolowej zasady wariacyjnej Hu–Washizu opisano w [362, 365]. W sformułowaniu tych elementów uwzględniono obrót owinięcia metodą mnożników Lagrange’a oraz zastosowano współrzędne skośne w interpolacji niezależnych pól odkształceń i naprężeń, podobnie jak w pracach [363, 366]. Zaproponowane elementy charakteryzowały się dużą efektywnością obliczeniową oraz bardzo dobrą dokładnością.

Cechą charakterystyczną rozważanej nieliniowej 6-parametrowej teorii powłok są niesymetryczne miary odkształceń i uogólnionych naprężeń. Sposób interpolacji niesymetrycznych miar założonych naprężeń po raz pierwszy zaproponowano w pracach [16, 224, 225] dla dwuwymiarowych elementów skończonych sformułowanych na podstawie komplementarnych zasad wariacyjnych. Jednak ze względu na zbyt bogatą interpolację elementy te dawały zbyt sztywną odpowiedź w zadaniach testowych. W związku z tym, w pracy [49] zaproponowano trzy oryginalne warianty interpolacji niezależnych naprężeń, różniące się liczbą parametrów opisujących niesymetryczne składowe ścinające naprężeń membranowych. W kolejnych pracach [298, 299] przyjęto już jednak tylko stałą interpolację dla składowych ścinających tensora uogólnionych naprężeń. W ramach teorii powłok zdefiniowanej na powierzchni Cosseratów sposób interpolacji składowych membranowych i ścinania poprzecznego niesymetrycznego tensora założonych uogólnionych naprężeń zaproponowano w pracy [294], w której elementy 4 i 9-węzłowe sformułowano na podstawie zasady wariacyjnej Hellingera-Reissnera. W przypadku składowych ścinających wektora uogólnionych naprężeń membranowych interpolacja ta zawierała wyraz stały oraz wyraz liniowy. W ramach tej samej teorii powłok analogiczną interpolację dla założonych odkształceń oraz ortogonalną do niej interpolację dla wzbogaconych odkształceń opisano w pracy [295]. Natomiast interpolację składowych ścinających naprężeń membranowych zawierającą wyrazy kwadratowe zaproponowano w pracy [124]. W ramach teorii 6-parametrowej kilka wariantów interpolacji dla składowych membranowych i poprzecznych tensora wzbogaconych odkształceń zbadano w [370]. Równoważny element o założonych naprężeniach zaproponowano w pracy [63]. W opisanych powyżej pracach interpolację niezależnych odkształceń, wzbogaconych odkształceń i założonych naprężeń zdefiniowano we współrzędnych naturalnych.

Pomimo tego, że etap najintensywniejszego rozwoju hybrydowo-mieszanych elementów powłokowych przypada na lata 80 i 90-te, to wciąż ich formułowanie jest aktualnym problemem badawczym. W pracy przeglądowej [52] poświęconej rozwojowi elementów skończonych w teorii płyt Mindlina–Reissnera zwrócono uwagę, że dalsze prace powinny się skupić na zwiększeniu dokładności elementów niskiego rzędu w podziałach z dystorsją siatki oraz poprawie modelowania pola naprężeń w powłoce. W pracy [300] zaproponowano czterowęzłowy element powłokowy prawie niewrażliwy na dystorsję siatki ES, opracowany na podstawie oryginalnego elementu płytowego [53] i membranowego [54]. Do sformułowania tego elementu zastosowano odpowiednio zmodyfikowany funkcjonal energii komplementarnej. Hybrydowo-mieszane elementy skończone pozwalające na trójwymiarową analizę naprężeń w powłoce zaproponowano w pracach [138, 195, 197]. Natomiast w pracach [333, 352] sformułowano elementy powłokowe w ramach podejścia korotacyjnego (ang. *corotational*), w którym układ współrzędnych elementu przesuwa i obraca się wraz z elementem. Różne metody formułowania elementów powłokowych uwzględniających obrót owinięcia porównano na przykładzie elementów o wzbogaconym polu odkształceń w pracy [360].

### 1.3. Powłoki o funkcyjnej zmienności materiału wzdłuż grubości

Koncepcja materiałów kompozytowych o ciągłej zmianie składu i mikrostruktury w określonym kierunku została po raz pierwszy zaproponowana w pracy [302]. Wynikała ona z obserwacji, że w przypadku wielu elementów konstrukcyjnych pożądana jest zmiana właściwości materiałowych w pewnym kierunku. Jednak ze względu na brak opracowanych metod wytwarzania tego typu materiałów, praca [302] nie wzbudziła szerszego zainteresowania wśród badaczy. Przełomem w rozwoju materiałów o ciągłej zmianie składu i struktury były badania podjęte przez japońskich naukowców w latach 80-tych i 90-tych w ramach narodowych projektów badawczych. W tym okresie dla tego typu materiałów przyjęła się angielska nazwa *functionally graded materials* (FGMs) [184], która jednak nie doczekała się jednego polskiego tłumaczenia. W pracach [90, 146, 151] użyto określenia materiały gradientowe, które jednak może mylnie sugerować, że materiał sformułowano w ramach teorii z gradientem deformacji wyższego rzędu (zob. np. [102, 241]). Stosowane są również nazwy: funkcjonalne materiały gradientowe [60], materiały z gradientem właściwości [218], tworzywa gradientowe [344],

cermetalowe materiały gradientowe [282]. W związku z tym w niniejszej rozprawie w odniesieniu do powłok wykonanych z materiału FGM zastosowano opisową nazwę *powłoki o funkcyjnej zmienności materiału wzdłuż grubości*. Określenie to wskazuje, że w pracy zakłada się model powłoki, w którym zmienność zawartości składowych materiałów wzdłuż grubości jest opisana za pomocą pewnej funkcji. Doprecyzowanie to jest potrzebne, gdyż coraz częściej analizuje się również powłoki o założonym gradencie materiału na powierzchni, zob. np. [9]. Ze względu na brak polskiego skrótu dla tego typu materiałów w dalszej części rozprawy stosuje się skrócone nazwy: materiały FGM, powłoki FGM.

Materiały FGM dzięki ciągłej zmianie właściwości w zadanym kierunku stanowią innowacyjną alternatywę dla tradycyjnych materiałów kompozytowych o skokowej zmianie właściwości. W przeciwieństwie do laminatów kompozytowych powłoki FGM nie są narażone na zniszczenie poprzez delaminację oraz na problem koncentracji naprężeń na styku warstw. W latach 80-tych zaproponowano zastosowanie powłok FGM ceramiczno-metalowych w przemyśle kosmicznym i lotniczym [184], np. w płaszczach statków kosmicznych. Połączenie metalu o wysokiej wytrzymałości mechanicznej z materiałem ceramicznym o wysokiej wytrzymałości termicznej daje wysokiej jakości, bardzo wytrzymały materiał o potencjalnych zastosowaniach w wielu branżach przemysłu. Obecnie materiały typu FGM są wykorzystywane w produkcji części maszyn, silników, do wytwarzania sensorów, aktywatorów, światłowodów, elementów do pancerzy ochronnych, w powłokach ochronnych o wysokiej wytrzymałości termicznej oraz produkcji implantów w przemyśle biomedycznym [140]. Jednak potencjalna możliwość zaprojektowania przestrzennej mikrostruktury materiału pozwala zoptymalizować właściwości powłok FGM i w ten sposób umożliwić znalezienie ich kolejnych zastosowań. Materiały FGM są określane jako materiały kompozytowe najnowszej generacji, więc potencjalny zakres ich zastosowań wydaje się nieograniczony.

Obecnie do wytwarzania materiałów FGM stosuje się szeroką bazę materiałów: metale (aluminium, tytan, związki magnezu, miedź, stal, itp.), materiały ceramiczne (cyrkon, węgiel krzemu, tlenek glinu itp.). Różne metody wytwarzania materiałów FGM opisano i sklasyfikowano w pracach przeglądowych [177, 221, 326]. Gradient materiału w zadanym kierunku może być tworzony poprzez odpowiednie ułożenie składowych materiałów przed lub w trakcie ich łączenia. Alternatywnie zadaną zmienność materiału można wytworzyć w wyniku zjawiska segregacji, zachodzącego pod wpływem przyłożonych zewnętrznych sił. Do najczęściej stosowanych metod wytwarzania materiałów FGM należy: natryskiwanie plazmowe, spiekanie laserowe mieszaniny proszków, infiltracja wstępnie wykonanej preformy, osadzanie elektroforetyczne, osadzanie sedymentacyjne, prasowanie warstw proszków oraz laminowanie folii ceramicznych. Podstawowym problemem podczas wytwarzania materiałów ceramiczno-metalowych są naprężenia wstępne (reszkowe), które mogą prowadzić do mikropęknięć, a nawet zniszczenia wykonanych elementów. Poza metalami i materiałami ceramicznymi obecnie coraz częściej do produkcji materiałów FGM wykorzystuje się również materiały polimerowe. Przykładami materiałów FGM, które występują w naturze są drewno palmowe, bambus, kości. Intensywny rozwój technologii druku 3D sprawił, że opracowano specjalną technologię szybkiego tworzenia materiałów FGM (ang. *Functionally Graded Rapid Prototyping*, FGRP), zob. np. [172, 238]. W ramach tej technologii do tworzenia elementów FGM wykorzystano na razie materiały polimerowe oraz beton. Badania doświadczalne i numeryczne belek wykonanych z betonu o zmieniającym się przestrzennie składzie opisano w pracy [148]. Natomiast przeglądu różnych metod wytwarzania implantów kości z materiałów FGM dokonano w [314].

W zamieszczonym poniżej krótkim przeglądzie prac poświęconych modelowaniu powłok FGM ograniczono się do prac, w których zmienność składu i właściwości przyjmuje się wzdłuż grubości. W przypadku powłok FGM analizę drgań własnych, analizę stateczności oraz analizę w zakresie geometrycznie nieliniowym wykonano w wielu pracach analitycznie lub numerycznie, zob. pracę przeglądową [327]. Jednak w większości tych prac analizowano deformację swobodnie podpartej kwadratowej płyty [125, 372], prostokątnej płyty [59, 377] lub okrągłej płyty [211]. Podczas gdy analizę geometrycznie nieliniową powłok FGM o złożonej geometrii przeprowadzono w niewielkiej liczbie prac. Wyniki analizy nieliniowej dla typowych powłokowych zadań testowych zaprezentowano w pracy [11] dla rozkładu materiału opisanego za pomocą funkcji potęgowej oraz w pracy [143] dla rozkładu materiału opisanego za pomocą funkcji sigmoidalnej.

W pracach [11, 59, 125, 143, 211, 372, 377] przeprowadzono analizę nieliniową względem środkowej powierzchni odniesienia. Wyznaczenie równań powłok FGM względem neutralnej powierzchni odniesienia zaproponowano po raz pierwszy w pracy [223]. Następnie w pracy [2] pokazano, że w

sformułowaniu powłok FGM określonym względem powierzchni neutralnej znika sprzężenie deformacji pomiędzy stanem membranowym i stanem zgięciowym. Z tego powodu Abrate zasugerował, że zachowanie powłok FGM powinno być opisane za pomocą takich samych równań jak w przypadku powłok jednorodnych. Porównanie wyników uzyskanych względem neutralnej i środkowej powierzchni odniesienia zaprezentowano na przykładzie okrągłej i kwadratowej płyty w pracy [380]. Prakash w analizie stateczności skośnych płyt [269] zaobserwował punkt bifurkacji na nieliniowych ścieżkach równowagi tylko w obliczeniach prowadzonych względem neutralnej powierzchni odniesienia. Wyniki analiz liniowych belkowych i powłokowych konstrukcji FGM w podejściu powierzchni neutralnej zaprezentowano w [191, 192]. Do obliczeń zastosowano efektywny 4-węzłowy element powłokowy, w sformułowaniu którego uwzględniono owinięcie, ale w ramach innej teorii powłok.

Analizę stateczności przekładkowych płyt FGM prowadzono w [113], a powłok cylindrycznych pod wpływem różnych obciążeń w [99]. Natomiast analizę pokrywczą kwadratowej płyty FGM na sprężystym podłożu zaprezentowano w pracy [330]. Analizę nieliniową podwójnie zakrzywionych powłok FGM spoczywających na nieliniowym podłożu sprężystym wykonano w [338]. Tymczasem wyniki nieliniowej analizy wybozeniowej usztywnionych powłok FGM obciążonych termicznie zaprezentowano w [328], a obciążonych mechanicznie w [95, 96]. Naturalne częstotliwości podwójnie zakrzywionych powłok wyznaczono w pracach [112, 114, 337], stosując różne sformułowania teoretyczne. Nieliniowe drgania płyt FGM spoczywających na dwuparametrowym sprężystym podłożu badano przed i po wybozeniu w [329]. Właściwości materiałowe płyt FGM złożonych z siedmiu warstw wyznaczono doświadczalnie w teście uderzenia w pracach [201, 202]. W pracach [193, 194, 345, 350] zaprezentowano sformułowanie elementów powłokowych dedykowanych analizie powłok o funkcyjnej zmienności materiału wzdłuż grubości. Efektywną teorię ścinania wyższego rzędu do analizy powłok FGM zaproponowano w pracy [25]

Dotychczasowe badania płyt i powłok o funkcyjnej zmienności materiału wzdłuż grubości koncentrowały się na analizach w zakresie sprężystym, zob. prace przeglądowe [171, 327]. Na początku XXI wieku opisano w literaturze (zob. np. [139, 229]) sposób identyfikacji parametrów materiałowych dla sprężysto–plastycznego modelu materiału. Wyniki analizy materiałowo nieliniowej przeprowadzonej dla obciążonej ciśnieniem rury FGM w płaskim stanie odkształcenia zaprezentowano w pracy [101]. Sprężysto–plastyczną nieliniową analizę stateczności cylindrycznych powłok FGM wykonano w [160, 161, 381]. Natomiast wyniki analiz sprężysto–plastycznych płyt FGM zaprezentowano w [181], a dysków FGM obciążonych ciśnieniem w [175]. W przeprowadzonych analizach do określenia efektywnych właściwości materiałowych wykorzystano zmodyfikowaną zasadę mieszanin (model Tamura–Tomota–Ozawa, zob. [331]).

## 1.4. Cel rozprawy

Na tym etapie możliwe jest już sformułowanie celu rozprawy:

Opracowanie efektywnych 4-węzłowych hybrydowo–mieszanych elementów skończonych wolnych od zjawiska blokady w ramach nieliniowej 6-parametrowej teorii powłok, sformułowanie równań konstytutywnych w teorii ośrodka Cosseratów do analizy geometrycznie nieliniowej powłok o funkcyjnej zmienności materiału wzdłuż grubości.

Biorąc pod uwagę doskonałą efektywność obliczeniową elementów opisanych w pracach [137, 349, 362], zdecydowano się sformułować autorskie elementy powłokowe na podstawie trójpolowej zasady wariacyjnej Hu–Washizu. W ramach nieliniowej 6-parametrowej teorii powłok elementy o niezależnym polu odkształceń, polu uogólnionych naprężeń oraz polu przemieszczeń nie były dotąd formułowane. W książce [67] opisano jedynie przykłady elementów hybrydowo–mieszanych opracowanych na podstawie dwupolowych funkcjonałów. Charakterystyczne dla nieliniowej 6-parametrowej teorii powłok są niesymetryczne miary odkształceń i uogólnionych naprężeń oraz uwzględnienie w naturalny sposób 6-tego stopnia swobody (obrotu owinięcia) w ramach sformułowania. Przegląd literatury wskazuje na to, że do tej pory nie zaproponowano hybrydowo–mieszanego elementu powłokowego o niesymetrycznych miarach zarówno odkształceń jak i uogólnionych naprężeń. Oczekuje się, że opracowane elementy pozwolą na zastosowanie w analizach nieliniowych bardzo dużych przyrostów oraz będą wymagały znacznie mniejszej liczby iteracji w porównaniu do obecnie wykorzystywanych elementów 4-węzłowych EANS4 [369] i 16-węzłowych CAME16 [62, 67]. Sformułowanie autor-

skich elementów na podstawie zasady wariacyjnej Hu–Washizu powinno pozwolić również na minimalizowanie efektu blokady i uzyskanie dokładnych rozwiązań nawet dla mało gęstych podziałów i siatek ES z dystorsją.

W ramach rozprawy zostaną opracowane różne typy elementów hybrydowo–mieszanych. Biorąc pod uwagę, że zjawisko blokady dotyczy przede wszystkim składowych membranowych i ścinania poprzecznego, oprócz elementów mieszanych zostaną zaproponowane elementy częściowo mieszane, w których zostanie zastosowana niejednolita interpolacja pól odkształceń i uogólnionych naprężeń. W celu minimalizacji blokady ścinania, podobnie jak w elementach powłokowych opisanych w pracach [137, 349, 362, 371], w interpolacji odkształceń ścinania poprzecznego zostanie użyta koncepcja ANS. W przykładach o nieregularnej dyskretyzacji zostanie zbadane czy w ramach 6–parametrowej teorii powłok korzystniejsze jest zastosowanie współrzędnych skorygowanych (zob. np. prace [137, 349]) czy współrzędnych skośnych [362, 378] w interpolacji niezależnych odkształceń i uogólnionych naprężeń. W liniowych i nieliniowych zadaniach testowych zostanie porównana zbieżność rozwiązań oraz dokładność wyników uzyskanych za pomocą różnych typów elementów.

Biorąc pod uwagę coraz większą popularność materiałów FGM i potencjalną możliwość ich zastosowania w konstrukcjach powłokowych, postanowiono rozszerzyć zbiór równań konstytutywnych zaimplementowanych w ramach teorii 6–parametrowej. Ze względu na złożoną mikrostrukturę materiałów FGM zdecydowano się sformułować równania konstytutywne w teorii ośrodka Cosseratów, zakładając płaski stan naprężenia ośrodka Cosseratów w warstwie powłoki. Stanowi to oryginalny element pracy względem praw konstytutywnych opisanych w literaturze. Podczas wyznaczania współczynnika korekcyjnego ścinania zostanie uwzględniona niejednorodność materiału na grubości powłoki. W rozprawie w celu określenia równań konstytutywnych przyjmuje się uproszczony model powłoki FGM wykonanej z materiału ceramicznego i metalu, których zawartość wzdłuż grubości opisano za pomocą funkcji potęgowej. Sprężyste równania konstytutywne zostaną wyznaczone analitycznie zarówno względem środkowej jak i neutralnej powierzchni odniesienia. Przegląd literatury wskazuje na to, że w nielicznych pracach analizowano nieliniowe zachowanie zakrzywionych i wielopłatowych powłok FGM w zakresie dużych przemieszczeń i obrotów. W związku z tym w rozprawie zostanie rozszerzona baza nieliniowych zadań testowych, w których analizowano powłoki o funkcyjnej zmienności materiału wzdłuż grubości. Obliczenia zostaną wykonane za pomocą wybranego autorskiego elementu hybrydowo–mieszanego. W analizie nieliniowej powłok FGM zostanie sprawdzony wpływ stałych ośrodka Cosseratów. Celem rozprawy jest również zbadanie dla jakiego typu powłok wybór powierzchni odniesienia ma zauważalny wpływ na wyniki.

## 1.5. Organizacja pracy

W rozprawie przyjęto następującą organizację pracy. W rozdziale drugim opisano podstawy nieliniowej 6–parametrowej teorii powłok potrzebne do sformułowania elementów skończonych w dalszej części pracy. W rozważaniach ograniczono się do statyki powłok, gdyż w rozprawie nie przeprowadzono analiz dynamicznych. Uzupełnienie rozdziału drugiego stanowi Dodatek A, w którym opisano formalnie grupę obrotów  $SO(3)$ , zastosowaną parametryzację grupy obrotów oraz interpolację tensora obrotu i wektora wirtualnego obrotu.

W rozdziale trzecim wprowadzono zwartą notację macierzowo–operatorową i dokonano przeglądu zasad wariacyjnych, w ramach którego omówiono zasadę wariacyjną Hu–Washizu. Następnie opisano modyfikację funkcjonału Hu–Washizu, potrzebną do sformułowania elementów częściowo mieszanych. Na końcu rozdziału dokonano linearyzacji zasad wariacyjnych, wyznaczając pierwszą i drugą wariację tych funkcjonałów, które wykorzystano w piątym rozdziale rozprawy.

Rozdział czwarty jest poświęcony równaniom konstytutywnym. Najpierw podano w nim prawo konstytutywne materiału liniowo–sprężystego wykorzystane w testach elementów skończonych. W rozdziale opisano zastosowaną metodę wyznaczania równań konstytutywnych w wyniku całkowania po grubości PSN ośrodka Cosseratów i zdefiniowano model powłoki FGM analizowany w rozprawie. Następnie sformulowano oryginalne równania konstytutywne powłok FGM względem środkowej powierzchni odniesienia oraz niezależnie względem neutralnej powierzchni odniesienia. Wprowadzenie całek potrzebnych do określenia równań zaprezentowano w Dodatku D.

Rozdział piąty szczegółowo omawia sposób formułowania autorskich elementów hybrydowo–mieszanych. Opis sformułowania elementów zaprezentowano oddzielnie dla elementów mieszanych i

elementów częściowo mieszanych. Zaproponowano różne warianty macierzy interpolacyjnych dla niesymetrycznych niezależnych odkształceń i uogólnionych naprężeń. Dla przyjętej interpolacji niezależnych pól spełnienie lokalnych równań równowagi oraz warunków nierozdzielności analizowano odpowiednio w Dodatku C.3 i C.4. W rozdziale piątym zapisano również układ równań na poziomie elementu na podstawie zlinearyzowanego warunku stacjonarności, w którym wykorzystano wariacje wyznaczone w rozdziale trzecim oraz równania konstytutywne sformułowane w rozdziale czwartym. Opisano sposób kondensacji pól niezależnych odkształceń i uogólnionych naprężeń na poziomie elementu oraz zastosowaną metodę aktualizacji zmiennych. Na końcu rozdziału zestawiono liczbę parametrów przyjętych w interpolacji niezależnych pól odkształceń i uogólnionych naprężeń dla zaproponowanych w rozprawie elementów mieszanych i częściowo mieszanych. Uzupełnienie rozdziału piątego stanowi Dodatek B, w którym omówiono wybrane aspekty procedury iteracyjno–przyrostowej oraz Dodatek C, w którym opisano m.in. całkowanie numeryczne, postać wybranych macierzy elementowych oraz uniwersalny sposób kondensacji układu równań.

W rozdziale szóstym zaprezentowano wyniki analiz dla autorskich elementów hybrydowo–mieszanych. Sprawdzone czy elementy te spełniają test wartości własnych i test łaty oraz w jakim stopniu są wrażliwe na dystorsję siatki podziału. W celu kompleksowego przetestowania elementów w zakresie nieliniowym przeprowadzono obliczenia dla przykładów o różnorodnej geometrii: powłoki płaskiej, powłoki o skręconej geometrii, powłoki o jednej krzywiznie, powłoki o dwóch krzywiznach oraz powłoki wielopłatowej. W przykładach badano zgodność wyników z rozwiązaniami odniesienia oraz zbieżność uzyskanych rozwiązań. Na końcu rozdziału dokonano oceny porównawczej zaproponowanych elementów mieszanych i częściowo mieszanych.

Rozdział siódmy przedstawia wyniki analiz powłok FGM w zakresie geometrycznie nieliniowym, wykonane za pomocą wybranego elementu mieszanego. W przykładach o zróżnicowanej geometrii zweryfikowano równania konstytutywne sformułowane w rozdziale czwartym. Zbadano wpływ stałych ośrodka Cosseratów, wykładnika w prawie potęgowym oraz wyboru powierzchni odniesienia na uzyskane wyniki.

Rozprawę podsumowano w rozdziale ósmym, w którym zamieszczono również wnioski z pracy oraz omówiono dalsze kierunki badań.

W rozprawie wykorzystano zarówno zapis absolutny jak i zapis wskaźnikowy pól wektorowych i tensorowych. W przypadku zapisu wskaźnikowego indeksy składowych wektorów i tensorów oznaczone literami alfabetu łacińskiego  $i, j, k, l, \dots$ , przyjmują wartości 1, 2, 3, chyba że zostało to zdefiniowane inaczej w tekście. Natomiast indeksy alfabetu greckiego  $\alpha, \beta, \lambda, \mu, \dots$ , przebiegają ciąg wartości 1, 2.

## Rozdział 2

# ZARYS NIELINIOWEJ 6-PARAMETROWEJ TEORII POWŁOK

### 2.1. Wprowadzenie

W bogatej literaturze poświęconej teorii powłok, zobacz np. [233, 256], wyróżnia się najczęściej dwa główne podejścia opisu geometrii powłok: wyprowadzane i bezpośrednie. W pierwszym podejściu powłokę traktuje się jako ciało trójwymiarowe, dla którego zasady mechaniki ośrodków ciągłych (MOC) sprowadza się do dwuwymiarowego zagadnienia mechaniki powłok. W celu redukcji zagadnienia trójwymiarowego stosuje się różne hipotezy upraszczające, np. kinematyczne, dynamiczne. Przykładowo w teorii Kirchhoffa-Love'a (zob. [187]) przyjmuje się założenie kinematyczne, że włókno proste i prostopadłe do powierzchni podstawowej w konfiguracji nieodkształconej pozostaje proste i prostopadłe w trakcie deformacji. Podejście wyprowadzane zostało opisane m.in. w pracach [227, 258, 373]. Natomiast w podejściu bezpośrednim powłoka jest definiowana jako dwuwymiarowy ośrodek ciągły o pewnych własnościach kinematycznych i dynamicznych. Następnie równania teorii powłok są formułowane na podstawie postulowanych praw fizycznych bezpośrednio na powierzchni podstawowej powłoki typu Cosseratów [82], o pewnej liczbie dyrektorów. Podejście bezpośrednie zostało rozwinięte w pracy [105] i następnie opisane m.in. w pracach [227, 283].

W rozprawie stosuje się nieliniową 6-parametrową teorię powłok, która została sformułowana w ramach podejścia mieszane. W podejściu tym, którego koncepcja została opisana m.in. w pracach [208, 275, 303], dwuwymiarowe równania teorii powłok uzyskuje się w wyniku ścisłego całkowania po grubości zasad MOC. W przeciwieństwie do podejścia wyprowadzanego i bezpośredniego, założenia upraszczające przyjmuje się tylko na etapie formułowania równań konstytutywnych. W pracach [208, 303] równania nieliniowej 6-parametrowej teorii powłok zostały sformułowane dla regularnych powłok względem powierzchni niematerialnej, ważonej według rozkładu masy po grubości w każdej konfiguracji bieżącej powłoki. Tymczasem równania względem dowolnej powierzchni materialnej zostały opisane w [70, 216]. Następnie w pracach [67, 69, 217, 260] sformułowanie to zostało rozszerzone, co umożliwiło statyczną i dynamiczną analizę nieregularnych wielopłatowych konstrukcji powłokowych. Wyprowadzenie równań nieliniowej 6-parametrowej teorii powłok z trójwymiarowych równań termomechaniki ośrodka ciągłego zaprezentowano w [259].

Podstawy sformułowania numerycznego rodziny przemieszczeniowych elementów skończonych w ramach 6-parametrowej teorii powłok opisano w [70]. Sformułowanie to zostało rozwinięte w pracach [62, 67, 69], w których omówiono implementację m.in. elementów skończonych o dwustopniowej interpolacji odkształceń (według koncepcji ANS [97]) i elementów częściowo mieszanych, sformułowanych na podstawie zasady wariacyjnej Hellingera-Reissnera. W pracach tych dokonano również analizy wymagających przykładów z zakresu statyki i stateczności. Wyniki symulacji zagadnień dynamiki nieregularnych powłok wielopłatowych w zakresie skończonych przemieszczeń i obrotów zaprezentowano w [66, 67, 75, 210]. Natomiast w pracach [77, 370] zaproponowano 4-węzłowy powłokowy element skończony o wzbogaconym polu odkształceń (EAS) jako przykład efektywnego elementu niskiego rzędu. Następnie sformułowanie elementu EAS rozszerzono o koncepcję dwustopniowej interpolacji odkształceń (ANS) dla poprzecznych odkształceń ścinających [369, 371].

W dalszej części rozdziału opisano najważniejsze elementy nieliniowej 6-parametrowej teorii powłok niezbędne do opracowania mieszanych i częściowo mieszanych elementów skończonych oraz zaproponowania równań konstytutywnych dla powłok o funkcyjnej zmienności materiału wzdłuż grubości. Ze względu na zakres rozprawy doktorskiej, zaprezentowano jedynie równania powłok w zakresie statycznym. W rozdziale pominięto dyskusję warunków skoku pól na krawędziach nieciągłości zakładając, że mogą się one pojawić tylko na brzegach elementu skończonego. Kompletny opis nieliniowej 6-parametrowej teorii powłok można znaleźć m.in. w pracy [67].

## 2.2. Podstawowe informacje

### 2.2.1. Główne cechy teorii

Główne cechy nieliniowej 6-parametrowej teorii powłok są następujące:

- wypadkowe dwuwymiarowe równania równowagi oraz statyczne warunki brzegowe dla ciała typu powłoka uzyskuje się przez bezpośrednie całkowanie po grubości równań równowagi ośrodka ciągłego typu Cauchy;
- model kinematyczny powłoki oraz kinematyczne warunki brzegowe wynikają w sposób jednoznaczny z dwuwymiarowej tożsamości całkowej, równoważnej ścisłym równaniom równowagi oraz statycznym warunkom brzegowym, której można nadać sens zasady prac wirtualnych na powierzchni podstawowej powłoki;
- w wyniku sprzężenia energetycznego w ramach zasady prac wirtualnych uzyskuje się naturalne powierzchniowe miary odkształceń, a modelem kinematycznym powłoki jest powierzchnia typu Cosseratów;
- niezależnymi kinematycznymi parametrami teorii powłok są 3 translacje i 3 obroty zdefiniowane na powierzchni podstawowej. W konsekwencji również szósty stopień swobody – owinięcie – jest uwzględniony w naturalny sposób i teoria umożliwia analizę powłok wielopłatowych oraz powłok modelujących mechanikę zjawisk nieciągłych na krzywych powierzchniowych;
- ze względu na to, że równania teorii są wyrażone w wielkościach przekrojowych, nie ma konieczności wykonywania całkowania po grubości, wymaganego dla elementów skończonych formułowanych np. w ramach podejścia wyprowadzanego;
- wszelkie założenia upraszczające przyjmuje się jedynie na etapie formułowania równań konstytutywnych, co jest korzystne z punktu widzenia implementacji elementów skończonych, gdyż zmiana założeń nie wymaga znaczących zmian w sformułowaniu elementu.

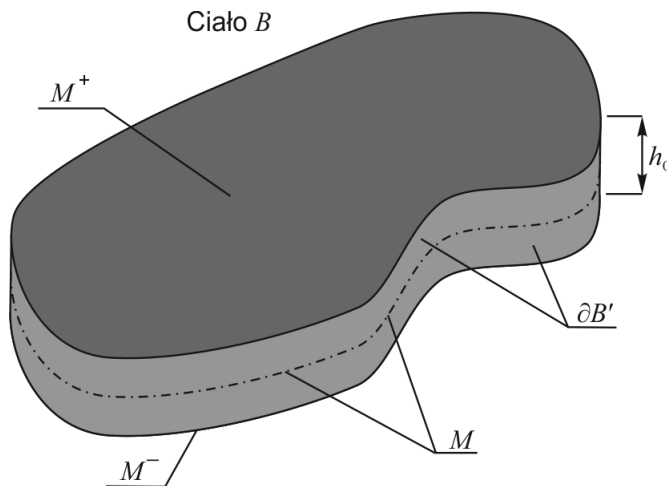
W dalszej części tego podrozdziału omówiono podstawowe pojęcia dla teorii powłok, natomiast w kolejnych podrozdziałach rozwinięto powyższe punkty.

### 2.2.2. Ciało typu powłoka

Zazwyczaj powłokę definiuje się jako trójwymiarowe ciało materialne, zajmujące w przestrzeni  $E^3$  obszar  $B$ , którego jeden wymiar – grubość  $h_0$  – jest znacząco mniejszy od dwóch pozostałych wymiarów [373]. Obszar ciała typu powłoka  $B$  jest ograniczony przez brzeg  $\partial B$ , w ramach którego wydziela się trzy powierzchnie: powierzchnię górną  $M^+$ , powierzchnię dolną  $M^-$  oraz powierzchnię boczną  $\partial B'$  (zob. rys. 2.1). W dalszych rozważaniach zakłada się, że grubość powłoki nie może być zerowa i w związku z tym powierzchnie na brzegu  $\partial B$  muszą spełniać następujące warunki:

$$\partial B = M^+ \cup M^- \cup \partial B', \quad M^+ \cap M^- = \emptyset, \quad (2.1)$$

które wykluczają możliwość istnienia punktów wspólnych dla powierzchni górnej i dolnej powłoki.



Rys. 2.1. Trójwymiarowe ciało typu powłoka

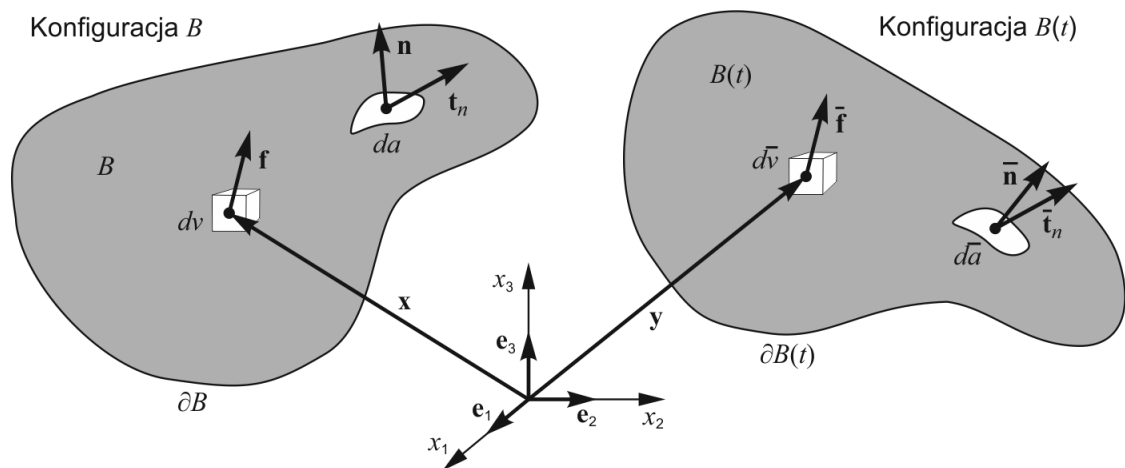


W rozważanej teorii przyjmuje się, że ciało trójwymiarowe typu powłoka jest zanurzone w przestrzeni euklidesowej  $E^3$ . Ciało w wyniku ruchu zmienia swoje położenie w przestrzeni  $E^3$ . Aby opisać ciało w ustalonej chwili czasu  $t$  wprowadza się pojęcie konfiguracji ciała  $B(t)$  (rys. 2.2). Wtedy ruch ciała można opisać za pomocą jednoparametrowej rodziny konfiguracji  $\{B(t)\}$ . W opisie względnym ruchu wybiera się dowolną konfigurację  $B$  (rys. 2.2), dalej nazywaną konfiguracją odniesienia, względem której opisuje się położenie cząstek ciała w pozostałych konfiguracjach. Najczęściej przyjmuje się konfigurację odniesienia jako konfigurację nieodkształconą, gdyż pozwala to na uproszczenie równań konstytutywnych w ramach stosowanego w niniejszej pracy opisu Lagrange'a. W dalszej części pracy przez „ciało  $B$ ” rozumie się pewną konfigurację ciała  $B$ .

Położenie wybranej cząstki ciała w dowolnym kartezjańskim układzie współrzędnych można opisać za pomocą składowych  $\{x_i\} \in R^3$ , wektora  $\mathbf{x} \in E^3$ . W rozprawie przyjmuje się, że położenie cząstki ciała w konfiguracji odniesienia jest opisane wektorem  $\mathbf{x}$ , natomiast w konfiguracji aktualnej (odkształconej) wektorem  $\mathbf{y}$  (zob. rys. 2.2). W konfiguracji odniesienia przez  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  oznaczono wektor gęstości sił objętościowych (masowych) dla nieskończenie małej objętości  $dv$ , a przez  $\mathbf{t}_n(\mathbf{x}, t)$  wektor gęstości sił kontaktowych oddziaływujących na nieskończenie mały element powierzchni  $da$  (rys. 2.2). W konfiguracji aktualnej wprowadzono analogiczne oznaczenia, stosując nadkreślenie w celu odróżnienia wielkości w opisie materialnym i przestrzennym, zob. np. [188, 236, 287]. Zgodnie z postulatem Cauchy'ego, wektor  $\mathbf{t}_n(\mathbf{x}, t)$  w dowolnym punkcie ciała zależy jedynie od wektora  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$  normalnego do nieskończenie małego elementu powierzchni  $da$  (rys. 2.2) i można zapisać go w następujący sposób:

$$\mathbf{t}_n(\mathbf{x}, t) = \mathbf{T}(\mathbf{x}, t)\mathbf{n}(\mathbf{x}). \quad (2.2)$$

Tensor naprężeń  $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$ , nazywany pierwszym tensorem naprężeń Pioli-Kirchhoffa, jest w ogólnym przypadku tensorem niesymetrycznym.



Rys. 2.2. Siły działające na ciało w konfiguracji odniesienia  $B$  oraz w konfiguracji aktualnej  $B(t)$

### 2.2.3. Powierzchnia podstawowa

W sformułowaniu mechaniki powłok bardzo ważną rolę odgrywa powierzchnia podstawowa [373], gdyż na niej formułuje się wszystkie równania teorii. W ogólnym przypadku powierzchnię podstawową wyróżnia się jako dowolną powierzchnię  $M$  (rys. 2.1), jednak w ramach rozważanej tu teorii powłok przyjmuje się ją jako powierzchnię materialną, znajdującą się między powierzchnią dolną i górną:  $M \subset [M^-, M^+]$ . Najczęściej zakłada się  $M$  jako powierzchnię środkową równoodległą od  $M^-$  i  $M^+$ . Jednak w niektórych przypadkach (zob. np. [260]) wskazane jest przyjęcie  $M$  jako powierzchni neutralnej, to znaczy powierzchni ważonej wzdłuż grubości według gęstości masy obszaru  $B$ , albo nawet jako powierzchni  $M^-$  lub  $M^+$ . W dalszej części rozdziału w celu rozróżnienia zapisu, wielkości dla cząstki ciała trójwymiarowego będą zapisywane czcionką prostą, np.  $\mathbf{x}$  i  $\mathbf{y}$ , a wielkości dla punktu na powierzchni podstawowej  $M$  powłoki czcionką pochyloną, np.  $\bar{\mathbf{x}}$  i  $\bar{\mathbf{y}}$ .

W rozprawie dodatkowo zakłada się, że powierzchnia podstawowa jest powierzchnią kawałkami regularną, to znaczy złożoną ze skończonej liczby płatów regularnych. Płat definiuje się jako spójną

i gładką powierzchnią klasy  $C^k$ ,  $k \geq 1$ , której brzeg składa się ze skończonej liczby krzywych Jordana nie zawierających punktów osobiwych. Szczegółową definicję płata regularnego oraz informacje dotyczące krzywej połączenia płatów można znaleźć m.in. w [62, 67, 217]. Dalsze rozważania ogranicza się do obszaru pojedynczego płata, przyjmując w nim założenia klasycznej MOC [141, 188, 236, 287].

#### 2.2.4. Parametryzacja powierzchni podstawowej

Powierzchnię odniesienia  $M$  powłoki można sparametryzować za pomocą współrzędnych ortogonalnych  $\zeta^i = (\zeta, \zeta)$ ,  $\zeta \equiv (\zeta^\alpha)$  (zob. rys. 2.3b) często pokrywających się ze współrzędnymi długości linii głównych krzywizn. W opisywanej teorii powłok na powierzchni  $M$  ortonormalną bazę wektorów bazowych  $\mathbf{t}_i^0$  dla współrzędnych  $\zeta^i$  definiuje się w następujący sposób:

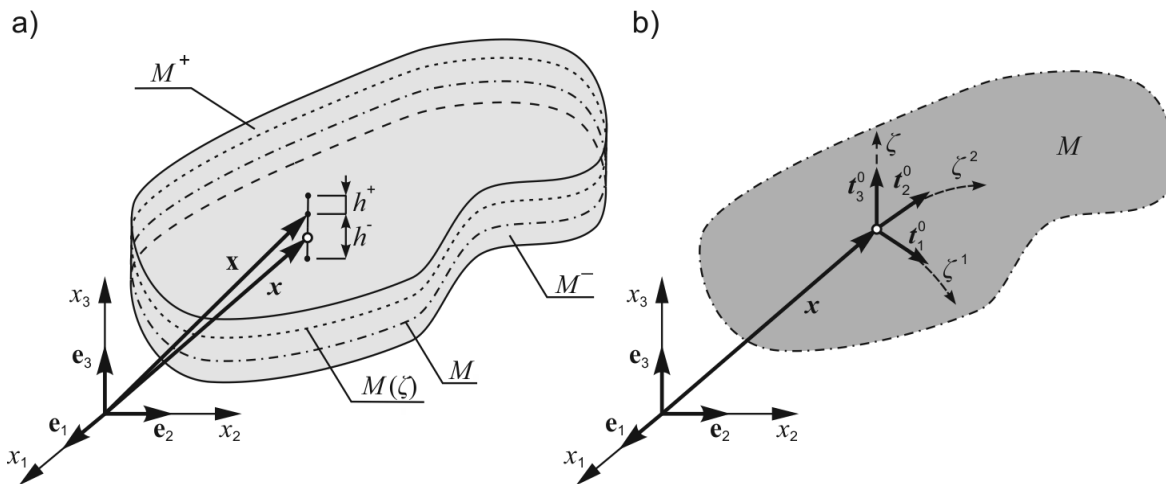
$$\mathbf{t}_\beta^0 = \mathbf{x}_{,\beta}, \quad \mathbf{t}^0 \equiv \mathbf{t}_3^0 = \mathbf{t}_1^0 \times \mathbf{t}_2^0, \quad (2.3)$$

gdzie  $(\cdot)_{,\beta} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial \zeta^\beta}$  jest pochodną cząstkową. Ze względu na to, że baza  $\mathbf{t}_i^0$  jest ortonormalna, to współrzędna  $\zeta$  mierzy odległość w kierunku normalnym do powierzchni odniesienia. Wektory kierunkowe  $\mathbf{t}_i^0$  można również wyznaczyć przez transformację pewnej ortonormalnej bazy  $\mathbf{e}_i \in E^3$  (rys. 2.3) za pomocą tzw. tensora struktury  $\mathbf{T}_0(\mathbf{x})$  powierzchni odniesienia

$$\mathbf{t}_i^0(\mathbf{x}) = \mathbf{T}_0(\mathbf{x})\mathbf{e}_i. \quad (2.4)$$

Tensor  $\mathbf{T}_0(\mathbf{x})$  należy do grupy obrotów  $SO(3)$ , której właściwości zostały opisane w Dodatku A.1.2, zatem równanie (2.4) opisuje obrót. Tensor krzywizny  $\mathbf{b}^0$  na powierzchni  $M$  we współrzędnych  $\zeta$  definiuje się następująco:

$$\mathbf{b}^0 = -\mathbf{t}_{,\beta}^0 \otimes \mathbf{t}_\beta^0 = b_{\alpha\beta}^0 \mathbf{t}_\alpha^0 \otimes \mathbf{t}_\beta^0, \quad b_{\alpha\beta}^0 = \mathbf{t}_{\alpha,\beta}^0 \cdot \mathbf{t}^0 = -\mathbf{t}_\alpha^0 \cdot \mathbf{t}_{,\beta}^0, \quad b_\beta^{0\alpha} = -\mathbf{t}^{0\alpha} \cdot \mathbf{t}_{,\beta}^0. \quad (2.5)$$



Rys. 2.3. Ciało typu powłoka: a) wektor wodzący cząstki ciała na powierzchni  $M(\zeta)$ , b) parametryzacja powierzchni odniesienia powłoki

Wykorzystując parametryzację powierzchni odniesienia  $M$ , położenie dowolnej cząstki ciała typu powłoka leżącej na powierzchni  $M(\zeta)$  (rys. 2.3a) można wyrazić za pomocą wektora wodzącego  $\mathbf{x}$  punktu na powierzchni odniesienia oraz współrzędnej  $\zeta$

$$\mathbf{x}(\zeta, \zeta) = \mathbf{x}(\zeta) + \zeta \mathbf{t}^0, \quad \zeta \in [-h^-, h^+]. \quad (2.6)$$

Natomiast położenie cząstki w konfiguracji aktualnej można wyrazić wzorem

$$\mathbf{y}(\zeta, \zeta) = \mathbf{y}(\zeta) + \bar{\zeta}(\zeta, \zeta), \quad (2.7)$$

gdzie za pomocą  $\bar{\zeta}$  oznaczono wektor określający położenie dowolnego punktu  $y \in B(t)$  względem odpowiadającego mu punktu  $y \in M(t)$  na powierzchni podstawowej. Sposób wyznaczenia wektora  $\bar{\zeta}$  opisano m.in. w pracy [67]. Podsumowując, w nieliniowej 6-parametrowej teorii punkt na powierzchni odniesienia jest jednoznacznie określony przez wektor wodzący  $x$  oraz tensor struktury  $T_0$ .

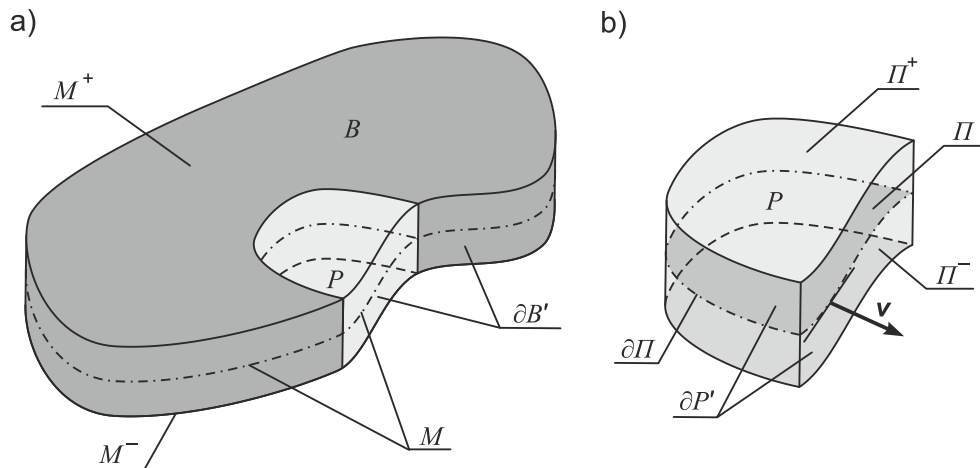
## 2.3. Całkowe równania równowagi powłok

### 2.3.1. Regularne podciało typu powłoka

W celu zapisania zasad mechaniki powłok, w ramach ciała  $B$  wyróżnia się jego pewną część  $P$  nazywaną podciałem typu powłoka (rys. 2.4a). Zgodnie z zasadami MOC każde podciało  $P$  jest ciałem, a więc posiada wszystkie cechy ciała. W związku z tym, brzeg  $\partial P$  podciała jest złożony z: powierzchni górnej  $\Pi^+ \subset M^+$ , powierzchni dolnej  $\Pi^- \subset M^-$  oraz powierzchni bocznej  $\partial P'$  (rys. 2.4b), która może mieć część wspólną z powierzchnią  $\partial B'$ . Część powierzchni podstawowej  $M$  zawartej w podciele  $P$  oznacza się przez  $\Pi$ , natomiast brzeg  $\Pi$  przez  $\partial \Pi$  (rys. 2.4b). Powierzchnię  $\Pi$  i brzeg  $\partial \Pi$  definiuje się następująco:

$$\Pi = M \cap P, \quad \partial \Pi = M \cap \partial P. \quad (2.8)$$

Ze względu na przyjęcie ortonormalnej bazy na powierzchni podstawowej (2.3), powierzchnia boczna  $\partial P'$  jest do niej prostopadła w każdym punkcie  $\partial \Pi$  (rys. 2.4b). Podciało typu powłoka musi mieć również grubość większą od zera, a więc zachodzą dla niego związki analogiczne do (2.1). Na brzegu  $\partial \Pi$  za pomocą  $\mathbf{v}$  określa się wektor zewnętrznie normalny do  $\partial \Pi$  (rys. 2.4b).



Rys. 2.4. Podciało typu powłoka  $P$ : a) jako część ciała  $B$ , b) definicja brzegu podciała  $\partial P$

### 2.3.2. Ogólna postać zasad zachowania

W zagadnieniach MOC obowiązują podstawowe zasady zachowania: masy, pędu oraz momentu pędu, które stanowią zbiór ogólnie słusznych i niekwestionowanych praw fizycznych [152, 287]. W statyce przyjmuje się, że dla ciała stałego zasada zachowania masy jest tożsamościowo spełniona, więc nie będzie dalej analizowana. Tymczasem zasady zachowania pędu i momentu pędu dla podciała  $P$  redukują się odpowiednio do równań równowagi sił  $\mathbf{F}_W(P)$  oraz równań równowagi momentów  $\mathbf{M}_W(P)$  względem inercjalnego układu odniesienia  $\mathbf{e}_i \in E^3$ ,

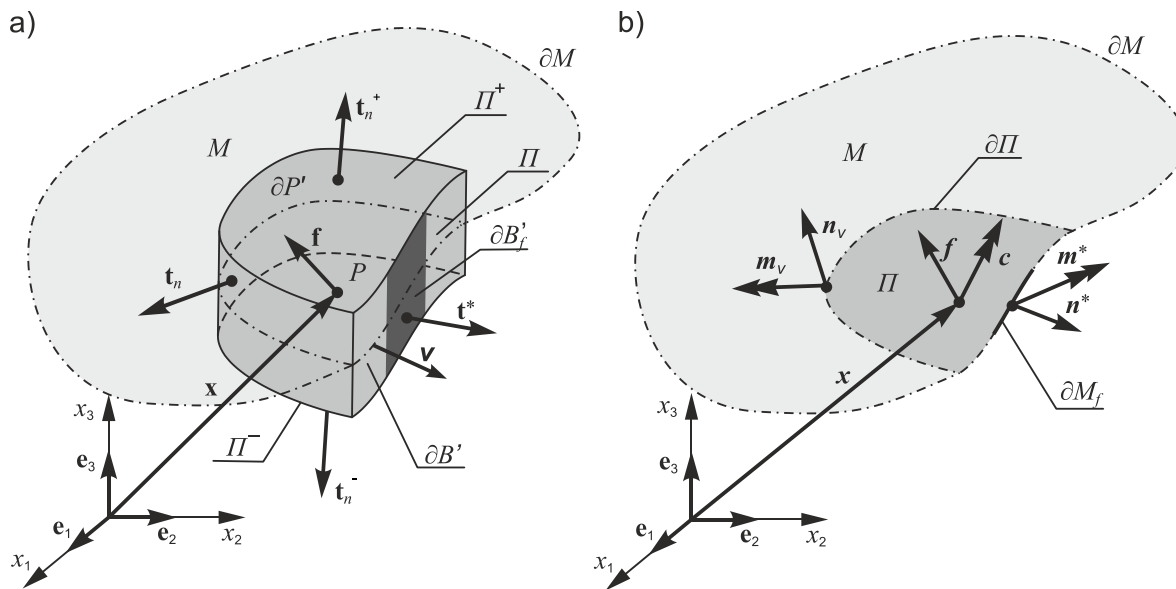
$$\mathbf{F}_W(P) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}_W(P) = \mathbf{0}. \quad (2.9)$$

W opisywanej teorii równania równowagi mechaniki powłok uzyskuje się w wyniku ścisłej redukcji trójwymiarowych równań równowagi ciała typu powłoka  $B$  do dwuwymiarowej ich postaci zapisanej na powierzchni  $M$  wyposażonej w tensor struktury  $T_0$ . Zatem warunki równowagi sił i momentów dla podciała  $P$  muszą być spełnione również na części powierzchni podstawowej  $\Pi$ , co można formalnie zapisać jako:

$$\mathbf{F}_W(\Pi) \equiv \mathbf{F}_W(P) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}_W(\Pi) \equiv \mathbf{M}_W(P) = \mathbf{0}. \quad (2.10)$$

### 2.3.3. Wyznaczenie całkowych równań równowagi

W rozpatrywanej tutaj nieliniowej 6-parametrowej teorii powłok stosuje się opis materialny (Lagrange'a), w którym wielkości sił działających na podciało w dowolnej chwili  $t$  są zapisywane w konfiguracji odniesienia. Zgodnie z regułą Lagrange'a [236, 287] oznacza to równoległe przesunięcie wektorów  $\bar{\mathbf{f}}$  i  $\bar{\mathbf{t}}_n$  do konfiguracji odniesienia (rys. 2.2). W równaniach równowagi dla podciała typu powłoka oprócz sił masowych  $\mathbf{f}$  oraz sił kontaktowych  $\mathbf{t}_n$ , które na powierzchni górnej i dolnej oznacza się odpowiednio przez  $\mathbf{t}_n^+$  i  $\mathbf{t}_n^-$ , uwzględnia się również wektor gęstości sił powierzchniowych  $\mathbf{t}^*$ , działający na pewnej części brzegu podciała  $\partial B'_f$  (rys. 2.5a). Na powierzchni odniesienia podciała  $\Pi$  definiuje się przekrojowe wektory: sił powierzchniowych  $\mathbf{f}$  oraz momentów powierzchniowych  $\mathbf{c}$  (rys. 2.5b). Natomiast na brzegu  $\partial\Pi$  wprowadza się przekrojowe wektory: sił wewnętrznych  $\mathbf{n}_v$  oraz momentów wewnętrznych  $\mathbf{m}_v$ , a na brzegu zewnętrznym  $\partial M_f$  przekrojową siłę  $\mathbf{n}^*$  i przekrojowy moment  $\mathbf{m}^*$  od obciążeń brzegowych (rys. 2.5b).



Rys. 2.5. Siły działające na podciało typu powłoka  $P$  w konfiguracji odniesienia (a), przekrojowe siły i momenty działające na powierzchni odniesienia  $\Pi$  podciała  $P$  (b)

W celu wyznaczenia wielkości przekrojowych, zdefiniowanych na powierzchni  $\Pi$ , odnosi się je do ich odpowiedników uzyskanych w wyniku całkowania dla trójwymiarowego podciała typu powłoka. W ten sposób określone siły przekrojowe zestawiono w tab. 2.1, a momenty przekrojowe w tab. 2.2.

Tabela 2.1. Zestawienie sił przekrojowych określonych na części powierzchni odniesienia powłoki  $\Pi$  i odpowiadających im sił działających na podciało typu powłoka  $P$

Rodzaj sił	Powierzchnia $\Pi$ powłoki	Podciało typu powłoka
siły powierzchniowe	$\iint_{\Pi} \mathbf{f} da$	$\iiint_P \mathbf{f} dv + \iint_{\Pi^+} \mathbf{t}_n^+ da^+ - \iint_{\Pi^-} \mathbf{t}_n^- da^-$
siły wewnętrzne	$\int_{\partial\Pi \cap \partial M_f} \mathbf{n}_v dl$	$\iint_{\partial P \cap \partial B'_f} \mathbf{t}_n da$
obciążenia brzegowe	$\int_{\partial\Pi \cap \partial M_f} \mathbf{n}^* dl$	$\iint_{\partial P \cap \partial B'_f} \mathbf{t}^* da$

Korzystając ze zdefiniowanych wielkości przekrojowych, całkowitą siłę i całkowity moment działające na dowolną część powierzchni odniesienia  $\Pi$  można wyrazić wzorami:

$$\mathbf{F}_w(\Pi) = \iint_{\Pi} \mathbf{f} da + \int_{\partial\Pi \cap \partial M_f} \mathbf{n}_v dl + \int_{\partial\Pi \cap \partial M_f} \mathbf{n}^* dl, \quad (2.11)$$

$$\mathbf{M}_w(\Pi) = \iint_{\Pi} (\mathbf{c} + \mathbf{y} \times \mathbf{f}) da + \int_{\partial\Pi \cap \partial M_f} (\mathbf{m}_v + \mathbf{y} \times \mathbf{n}_v) dl + \int_{\partial\Pi \cap \partial M_f} (\mathbf{m}^* + \mathbf{y} \times \mathbf{n}^*) dl. \quad (2.12)$$

Powyższe równania wraz z warunkami (2.10) wyrażają globalne (całkowe) równania równowagi dla powłok i zostały wyznaczone bez wprowadzania założeń upraszczających. Zatem są one wypadkowo ściśle dla powłok o dowolnej grubości.

Tabela 2.2. Zestawienie momentów przekrojowych zdefiniowanych na części powierzchni odniesienia powłoki  $\Pi$  i odpowiadających im momentów działających na podciało typu powłoka  $P$

Rodzaj momentu	Powierzchnia $\Pi$ powłoki	Podciało typu powłoka
momenty powierzchniowe	$\iint_{\Pi} (\mathbf{c} + \mathbf{y} \times \mathbf{f}) da$	$\iiint_P \mathbf{y} \times \mathbf{f} dv + \iint_{\Pi^+} \mathbf{y}^+ \times \mathbf{t}_n^+ da^+ - \iint_{\Pi^-} \mathbf{y}^- \times \mathbf{t}_n^- da^-$
momenty wewnętrzne	$\int_{\partial\Pi \cap \partial M_f} (\mathbf{m}_v + \mathbf{y} \times \mathbf{n}_v) dl$	$\iint_{\partial P \cap \partial B_f} \mathbf{y} \times \mathbf{t}_n da$
momenty obciążeń brzegowych	$\int_{\partial\Pi \cap \partial M_f} (\mathbf{m}^* + \mathbf{y} \times \mathbf{n}^*) dl$	$\iint_{\partial P \cap \partial B_f} \mathbf{y} \times \mathbf{t}^* da$

## 2.4. Lokalne równania równowagi powłok

W celu wyznaczenia lokalnych równań równowagi powłok na podstawie globalnych równań równowagi przyjmuje się pewne czysto matematyczne założenia opisane w pracy [67]. Przez analogię do postulatu Cauchy'ego dla naprężeń kontaktowych (2.2) wprowadza się na wewnętrznym brzegu powłoki tensor przekrojowych sił  $\mathbf{N}(\mathbf{x})$  i przekrojowych momentów  $\mathbf{M}(\mathbf{x})$  zdefiniowane następująco:

$$\mathbf{n}_v(\mathbf{x}) = \mathbf{N}(\mathbf{x})\mathbf{v}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{m}_v(\mathbf{x}) = \mathbf{M}(\mathbf{x})\mathbf{v}(\mathbf{x}). \quad (2.13)$$

Tensory sił przekrojowych  $\mathbf{N}$  i  $\mathbf{M}$  można wyrazić za pomocą wektorów przekrojowych  $\mathbf{n}^\alpha$  i  $\mathbf{m}^\alpha$  oraz ich składowych w reprezentacji przestrzennej (w bazie  $\mathbf{t}_i$ )

$$\mathbf{N} = \mathbf{n}^\alpha \otimes \mathbf{t}_\alpha^0 = (N^{\alpha\beta} \mathbf{t}_\beta + Q^\alpha \mathbf{t}) \otimes \mathbf{t}_\alpha^0, \quad \mathbf{M} = \mathbf{m}^\alpha \otimes \mathbf{t}_\alpha^0 = (\mathbf{t} \times M^{\alpha\beta} \mathbf{t}_\beta + M^\alpha \mathbf{t}) \otimes \mathbf{t}_\alpha^0. \quad (2.14)$$

Wektory  $\mathbf{n}^\alpha$  i  $\mathbf{m}^\alpha$  wyznacza się na podstawie wzoru (2.2) i pewnych zależności geometrycznych (zob. [62]) w wyniku całkowania po grubości, inaczej uzwarcenia wymiaru (zob. [19]), pierwszego tensora Pioli-Kirchhoffa  $\mathbf{T}$ ,

$$\mathbf{n}^\alpha = \int_{-h^-}^{h^+} \mathbf{T}^\alpha \mu d\zeta, \quad \mathbf{m}^\alpha = \int_{-h^-}^{h^+} \bar{\zeta} \times \mathbf{T}^\alpha \mu d\zeta. \quad (2.15)$$

W równaniach (2.15) za pomocą  $\mu$  oznaczono wyznacznik z tensora przeniesienia (ang. *shifter*) zdefiniowanego np. w pracach [227, 258], a  $\bar{\zeta}$  jest określony wzorem (2.7).

Zgodnie z twierdzeniem o dywergencji powierzchniowej [67, 141] dla tensora  $\mathbf{N}(\mathbf{x})$  zachodzi zależność

$$\int_{\partial\Pi} \mathbf{N} \mathbf{v} dl = \iint_{\Pi} \text{div} \mathbf{N} da. \quad (2.16)$$

Po podstawieniu zależności (2.13) i (2.16) do równania (2.11) przyjmuje ono postać

$$\mathbf{F}_w(\Pi) = \iint_{\Pi} \mathbf{f} da + \iint_{\Pi} \text{div} \mathbf{N} da - \int_{\partial\Pi \cap \partial M_f} \mathbf{N} \mathbf{v} dl + \int_{\partial\Pi \cap \partial M_f} \mathbf{n}^* dl. \quad (2.17)$$

Wobec dowolności wyboru  $\Pi$  uzyskuje się z (2.17) lokalne statyczne równanie równowagi

$$\text{div} \mathbf{N} + \mathbf{f} = \mathbf{0}, \quad (2.18)$$

które musi być spełnione w każdym punkcie na powierzchni odniesienia powłoki. Dodatkowo z równania (2.17) wynika naprężeniowy (statyczny) warunek brzegowy

$$\mathbf{n}^* - \mathbf{N} \mathbf{v} = \mathbf{0}. \quad (2.19)$$

W wyniku analogicznych przekształceń opisanych m.in. w pracach [67, 371] z równania (2.12) otrzymuje się lokalne równanie równowagi momentów

$$\operatorname{div} \mathbf{M} + \operatorname{ad}^{-1}(\mathbf{N}\mathbf{F}^T - \mathbf{F}\mathbf{N}^T) + \mathbf{c} = \mathbf{0} \quad (2.20)$$

oraz stowarzyszony z nim warunek brzegowy

$$\mathbf{m}^* - \mathbf{M}\mathbf{v} = \mathbf{0}. \quad (2.21)$$

We wzorze (2.20) za pomocą  $\mathbf{F} = \nabla \mathbf{y} = \mathbf{y}_{,\alpha} \otimes \mathbf{t}_\alpha^0$  oznaczono gradient deformacji powierzchni podstawowej, a za pomocą operatora  $\operatorname{ad}$  liniowe odwzorowanie przyporządkowujące każdemu wektorowi  $\mathbf{w} \in E$  w sposób wzajemnie jednoznaczny tensor skośnie symetryczny  $\mathbf{W} = \operatorname{ad}\mathbf{w} \in E \otimes E$  (zob. Dodatek A.1.5).

Lokalne równania równowagi (2.18) i (2.20) zgodnie z pracą [70] w zapisie wektorowym przyjmują postać:

$$\mathbf{n}^\alpha |_\alpha + \mathbf{f} = \mathbf{0}, \quad (2.22)$$

$$\mathbf{m}^\alpha |_\alpha + \mathbf{y}_{,\alpha} \times \mathbf{n}^\alpha + \mathbf{c} = \mathbf{0}, \quad (2.23)$$

gdzie  $(\cdot)|_\alpha = \frac{\partial(\cdot)}{\partial \zeta^\alpha}$  jest kowariantną pochodną na powierzchni  $M$  w kierunkach wektorów bazy  $\mathbf{t}_\alpha^0$ .

Równania (2.22) i (2.23) tworzą razem układ sześciu skalarnych cząstkowych równań różniczkowych. Na potrzeby dalszych rozważań wprowadza się dwuwymiarowy symbol permutacyjny  $e_{\alpha\beta}$ ,

$$e_{\alpha\beta} \equiv e^{\alpha\beta} = \{e_{11} = e_{22} = 0, \quad e_{12} = 1, \quad e_{21} = -1\}. \quad (2.24)$$

W reprezentacji materialnej wektory sił przekrojowych  $\mathbf{n}^\alpha = \mathbf{Q}^T \mathbf{n}^\alpha$ ,  $\mathbf{m}^\alpha = \mathbf{Q}^T \mathbf{m}^\alpha$  oraz wektory powierzchniowych sił i momentów  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{c}$  w składowych względem bazy  $\mathbf{t}_i^0$  przyjmują postać:

$$\mathbf{n}^\alpha = \hat{N}^{\alpha\beta} \mathbf{t}_\beta^0 + \hat{Q}^\alpha \mathbf{t}^0, \quad \mathbf{m}^\alpha = \mathbf{t}^0 \times \hat{M}^{\alpha\beta} \mathbf{t}_\beta^0 + \hat{M}^\alpha \mathbf{t}^0 = e_{\lambda\beta} \hat{M}^{\alpha\lambda} \mathbf{t}^{0\beta} + \hat{M}^\alpha \mathbf{t}^0, \quad (2.25)$$

$$\mathbf{f} = \hat{f}^\beta \mathbf{t}_\beta^0 + \hat{\mathbf{f}} \mathbf{t}^0, \quad \mathbf{c} = \mathbf{t}^0 \times \hat{c}^\beta \mathbf{t}_\beta^0 + \hat{\mathbf{c}} \mathbf{t}^0 = e_{\lambda\beta} \hat{c}^\lambda \mathbf{t}^{0\beta} + \hat{\mathbf{c}} \mathbf{t}^0. \quad (2.26)$$

Wtedy równania (2.22) i (2.23), po linearyzacji w zakresie małych przemieszczeń i obrotów [261], w składowych (2.25) i (2.26) można zapisać następująco:

$$\hat{N}^{\alpha\beta} |_\alpha - b_\alpha^\beta \hat{Q}^\alpha + \hat{f}^\beta = 0, \quad \hat{Q}^\alpha |_\alpha + b_{\alpha\beta} \hat{N}^{\alpha\beta} + \hat{\mathbf{f}} = 0, \quad (2.27)$$

$$\hat{M}^{\alpha\beta} |_\alpha - \hat{Q}^\beta + e^{\lambda\beta} b_{\alpha\lambda} \hat{M}^\alpha + \hat{\mathbf{c}}^\beta = 0, \quad \hat{M}^\alpha |_\alpha + e_{\alpha\beta} (\hat{N}^{\alpha\beta} - b_\lambda^\alpha \hat{M}^{\lambda\beta}) + \hat{\mathbf{c}} = 0. \quad (2.28)$$

Równania te zostaną użyte do sprawdzenia czy przyjęta interpolacja dla niezależnych uogólnionych naprężeń umożliwia spełnienie lokalnych warunków równowagi.

## 2.5. Słaba postać problemu brzegowego

Lokalne równania równowagi (2.18) i (2.20) można zapisać następująco:

$$\tilde{\mathbf{f}} = \operatorname{div} \mathbf{N} + \mathbf{f} = \mathbf{0}, \quad \tilde{\mathbf{c}} = \operatorname{div} \mathbf{M} + \operatorname{ad}^{-1}(\mathbf{N}\mathbf{F}^T - \mathbf{F}\mathbf{N}^T) + \mathbf{c} = \mathbf{0}, \quad (2.29)$$

a statyczne warunki brzegowe (2.19) i (2.21) w postaci:

$$\tilde{\mathbf{n}} = \mathbf{n}^* - \mathbf{N}\mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad \tilde{\mathbf{m}} = \mathbf{m}^* - \mathbf{M}\mathbf{v} = \mathbf{0}. \quad (2.30)$$

Stosując oznaczenia wprowadzone we wzorach (2.29) i (2.30), definiuje się następującą całkę:

$$G(\mathbf{w}; \Pi) = \iint_{\Pi} (\tilde{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{v} + \tilde{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{w}) da + \int_{\partial \Pi \cap \partial M_f} (\tilde{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v} + \tilde{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{w}) dl, \quad (2.31)$$

gdzie  $\mathbf{w} = (\mathbf{v}, \mathbf{w})$  są dowolnymi polami wektorowymi na powierzchni podstawowej  $M$  dla których całka ma sens. Całce  $G$  oraz polom  $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$  na razie nie nadaje się żadnej interpretacji fizycznej. Jednak zgodnie z przyjętą definicją całki, jeśli na powierzchni  $\Pi$  spełnione są lokalne równania równowagi oraz warunki brzegowe, to zachodzi  $G(\mathbf{w}, \Pi) = 0$  dla dowolnych pól wektorowych  $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ . W wyniku przekształceń opisanych w pracach [67, 371], całka (2.31) przyjmuje postać

$$G(\mathbf{w}; \Pi) = -\iint_{\Pi} [N \cdot (\nabla \mathbf{v} - \mathbf{W}F) + M \cdot \nabla \mathbf{w}] da + \iint_{\Pi} (f \cdot \mathbf{v} + c \cdot \mathbf{w}) da + \int_{\partial \Pi \cap \partial M_f} (\mathbf{n}^* \cdot \mathbf{v} + \mathbf{m}^* \cdot \mathbf{w}) dl + \int_{\partial \Pi \cap \partial M_d} (N \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + M \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) dl + \int_{\partial \Pi \cap \partial M} (N \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + M \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) dl = 0, \quad (2.32)$$

gdzie  $\mathbf{W}$  jest tensorem skośnie symetrycznym, tj.  $\mathbf{W} = \text{ad}(\mathbf{w})$ . W przekształceniach założono, że brzeg powierzchni podstawowej  $\partial M$  składa się z 2 części:  $\partial M_f$  (zob. rys. 2.5b) oraz  $\partial M_d$  na którym określono przemieszczeniowe warunki brzegowe. Tożsamość całkowa (2.32) jest w szczególności słuszna dla całej powierzchni podstawowej powłoki  $M$ .

W dalszej części podrozdziału przyjmuje się szczególną interpretację pól  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{w}(\mathbf{x})$  jako kinematycznie dopuszczalnych pól wirtualnych przesunięć i obrotów, które spełniają warunki brzegowe  $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{w}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  na brzegu  $\partial M_d$ . Wtedy dwa ostatnie człony w całce (2.32) się zerują i tożsamość całkową można zapisać w postaci

$$\iint_{\Pi} [N \cdot (\nabla \mathbf{v} - \mathbf{W}F) + M \cdot \nabla \mathbf{w}] da = \iint_{\Pi} (f \cdot \mathbf{v} + c \cdot \mathbf{w}) da + \int_{\partial \Pi \cap \partial M_f} (\mathbf{n}^* \cdot \mathbf{v} + \mathbf{m}^* \cdot \mathbf{w}) dl. \quad (2.33)$$

Teraz lewą stronę równania (2.33) można zinterpretować jako wewnętrzną pracę wirtualną, a prawą stronę jako zewnętrzną pracę wirtualną wykonaną przez obciążenia powierzchniowe i zewnętrzne. W związku z tym zależność (2.33) ma sens fizyczny zasady prac wirtualnych dla całej powłoki. Dodatkowo w pracach [62, 67, 217] wykazano, że następujące wielkości:

$$\delta E(\mathbf{x}) \equiv \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}) - \mathbf{W}(\mathbf{x})F(\mathbf{x}), \quad \delta \mathbf{K}(\mathbf{x}) \equiv \nabla \mathbf{w}(\mathbf{x}) \quad (2.34)$$

można interpretować jako wirtualne miary odkształceń powłoki, gdyż zgodnie z (2.33) są one energetycznie sprzężone z wypadkowymi siłami  $N$  i momentami  $M$ .

## 2.6. Kinematyka powłoki

W rozważanej teorii powłok model kinematyczny powłoki w konfiguracji odniesienia odpowiada kinematyce powierzchni Cosseratów wyposażonej w trzy ortonormalne direktory  $\mathbf{t}_i^0$  [67, 260]. Zatem konfiguracja odniesienia powłoki jest jednoznacznie zdefiniowana przez wektor wodzący  $\mathbf{x}$  oraz tensor struktury  $\mathbf{T}_0$ . Do określenia powierzchni podstawowej płyta powłoki w konfiguracji aktualnej (rys. 2.6) względem konfiguracji odniesienia używa się następujących zależności:

$$\mathbf{y}(\zeta) = \mathbf{x}(\zeta) + \mathbf{u}(\zeta), \quad (2.35)$$

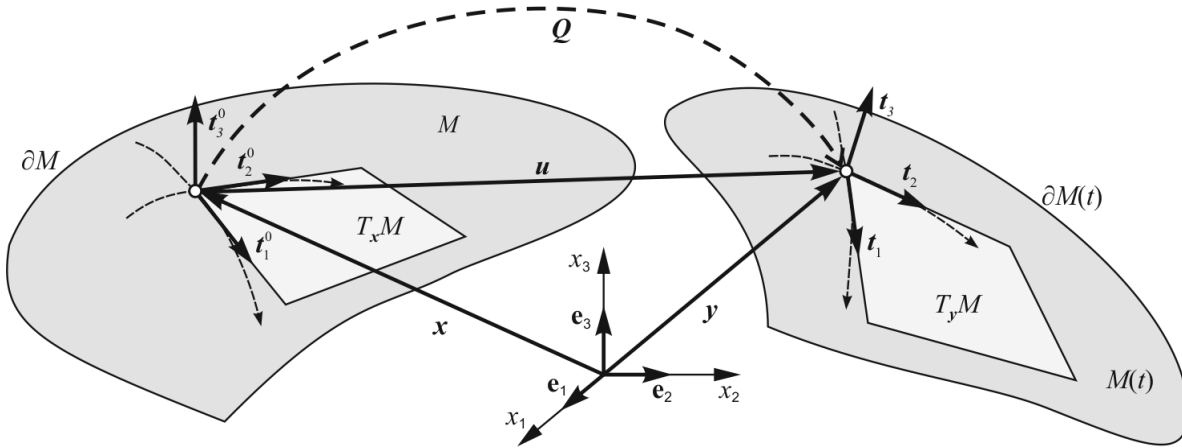
$$\mathbf{T}(\zeta) = \mathbf{Q}(\zeta)\mathbf{T}_0(\zeta), \quad (2.36)$$

gdzie  $\mathbf{y}$  jest wektorem wodzącym, a  $\mathbf{T}$  tensorem struktury w konfiguracji aktualnej. W związku z tym wzory (2.35) i (2.36) opisują deformację powłoki, która jest jednoznacznie określona przez wektorowe pole przesunięć  $\mathbf{u}(\zeta) \in E^3$  oraz właściwy tensor obrotu  $\mathbf{Q}(\zeta) \in SO(3)$ . Formalnie można zapisać, że konfiguracja  $B(t)$  powierzchni podstawowej powłoki jest zdefiniowana przez

$$U = B(M, g) = \{ \mathbf{u} = (\mathbf{u}, \mathbf{Q}) : M \rightarrow g = E^3 \times SO(3) \}. \quad (2.37)$$

Wektory kierunkowe powierzchni podstawowej  $\mathbf{t}_i$  w konfiguracji aktualnej (rys. 2.6) można wyznaczyć na podstawie wzoru (2.36), wykorzystując zależność (2.4)

$$\mathbf{t}_i(\zeta) = \mathbf{Q}(\zeta)\mathbf{t}_i^0 = \mathbf{T}(\zeta)\mathbf{e}_i = T_{ji}(\zeta)\mathbf{e}_j. \quad (2.38)$$



Rys. 2.6. Lokalna deformacja powierzchni podstawowej opisana przez pole przesunięć  $\mathbf{u}$  i tensor obrotu  $\mathbf{Q}$

## 2.7. Naturalne miary odkształceń

Naturalne miary odkształceń w postaci wektorów rozciągnięć i zgięć w ramach nieliniowej 6-parametrowej teorii powłok definiuje się w następujący sposób:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\beta = \mathbf{y}_{,\beta} - \mathbf{t}_\beta = \mathbf{u}_{,\beta} + (\mathbf{Q}^T - \mathbf{1})\mathbf{t}_\beta = \mathbf{u}_{,\beta} + (\mathbf{1} - \mathbf{Q})\mathbf{t}_\beta^0, \quad (2.39)$$

$$\boldsymbol{\kappa}_\beta = \text{ad}^{-1}(\mathbf{Q}_{,\beta} \mathbf{Q}^T). \quad (2.40)$$

Miary te określa się mianem naturalnych, gdyż ich pochodne krotacyjne

$$d\boldsymbol{\varepsilon}_\beta \equiv \mathbf{Q}(\delta(\mathbf{Q}^T \boldsymbol{\varepsilon}_\beta)), \quad d\boldsymbol{\kappa}_\beta \equiv \mathbf{Q}(\delta(\mathbf{Q}^T \boldsymbol{\kappa}_\beta)) \quad (2.41)$$

są równe wirtualnym miarom odkształceń (2.34), co pokazano m.in. w pracach [62, 67, 371]. Dodatkowo miary odkształceń dane wzorami (2.39)-(2.40) przyjmują wartości zerowe w konfiguracji odniesienia. Naturalne miary odkształceń rozpisane w składowych przyjmują postać

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\beta = \varepsilon_{\beta 1} \mathbf{t}_1 + \varepsilon_{\beta 2} \mathbf{t}_2 + \varepsilon_\beta \mathbf{t}, \quad (2.42)$$

$$\boldsymbol{\kappa}_\beta = \mathbf{t} \times (\kappa_{\beta 1} \mathbf{t}_1 + \kappa_{\beta 2} \mathbf{t}_2) + \kappa_\beta \mathbf{t}. \quad (2.43)$$

W analogiczny sposób na składowe można rozłożyć wirtualne miary odkształceń (2.34), które w zapisie wektorowym przyjmują postać:

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon}_\beta = \mathbf{v}_{,\beta} + \mathbf{y}_{,\beta} \times \mathbf{w}, \quad \delta \boldsymbol{\kappa}_\beta = \mathbf{w}_{,\beta}. \quad (2.44)$$

## 2.8. Warunki nierozdzielności odkształceń

W zagadnieniach statycznych rozważanej nieliniowej 6-parametrowej teorii powłok nieznanymi polami skalarnymi są  $\mathbf{u}$  (3 niewiadome),  $\mathbf{Q}$  (3 niewiadome),  $\mathbf{N}$  (6 niewiadomych) oraz  $\mathbf{M}$  (6 niewiadomych). Do wyznaczenia tych zmiennych wykorzystuje się lokalne równania równowagi (2.22) i (2.23) (6 równań) oraz równania konstytutywne (12 równań), opisane w rozdziale czwartym rozprawy, określające zależność między siłami przekrojowymi i odkształceniami. W trakcie rozwiązania zagadnienia brzegowego korzysta się również ze statycznych i kinematycznych warunków brzegowych. Natomiast odkształcenia wyznacza się na podstawie równań geometrycznych określonych wzorami (2.39) i (2.40).

Na powierzchni Cosseratów muszą być spełnione również równania ciągłości, które definiuje się w postaci warunków nierozdzielności odkształceń, zob. np. [122] w odniesieniu do ośrodka Cauchy'ego. Warunki te dla 6-parametrowej teorii powłok zostały zaproponowane w pracach [275, 303]. Podstawą ich sformułowania są następujące zależności:

$$e^{ab} \mathbf{y}_{|ab} = \mathbf{0}, \quad e^{ab} \mathbf{Q}_{|ab} = \mathbf{0}, \quad (2.45)$$



zgodnie z którymi kolejność różniczkowania cząstkowego pól  $\mathbf{y}$  (lub  $\mathbf{u}$ ) i  $\mathbf{Q}$  względem współrzędnych  $\zeta^a$  nie ma wpływu na wynik różniczkowania. W ramach rozważanej w niniejszej rozprawie teorii powłok warunki nierozdzielności zostały opisane m.in. w pracy [261] i przyjmują postać:

$$e^{\alpha\beta} \left( \boldsymbol{\varepsilon}_{\alpha|\beta} + \boldsymbol{\kappa}_\beta \times \boldsymbol{t}_\alpha \right) = \mathbf{0}, \quad e^{\alpha\beta} \left( \boldsymbol{\kappa}_{\alpha|\beta} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\kappa}_\alpha \times \boldsymbol{\kappa}_\beta \right) = \mathbf{0}, \quad (2.46)$$

Warunki (2.46) po linearyzacji związków kinematycznych względem małych przemieszczeń i obrotów [261] upraszczają się do postaci:

$$e^{\alpha\beta} \left( \boldsymbol{\varepsilon}_{\alpha|\beta} + \boldsymbol{\kappa}_\beta \times \boldsymbol{t}_\alpha \right) = \mathbf{0}, \quad e^{\alpha\beta} \boldsymbol{\kappa}_{\alpha|\beta} = \mathbf{0}. \quad (2.47)$$

Zależności (2.47) można zapisać w składowych względem bazy  $\boldsymbol{t}_i^0$ :

$$e^{\alpha\beta} \left( \hat{\varepsilon}_{\omega\lambda|\beta} - \hat{\varepsilon}_\alpha \boldsymbol{b}_{\beta\lambda} + e_{\omega\lambda} \boldsymbol{\kappa}_\beta \right) = 0, \quad e^{\alpha\beta} \left( \hat{\varepsilon}_{\alpha|\beta} + \hat{\varepsilon}_{\omega\lambda} \boldsymbol{b}_\beta^\lambda + \boldsymbol{\kappa}_{\alpha\beta} \right) = 0, \quad (2.48)$$

$$e^{\alpha\beta} \left( e^{\rho\lambda} \boldsymbol{\kappa}_{\alpha\rho|\beta} + \boldsymbol{b}_\alpha^\lambda \boldsymbol{\kappa}_\beta \right) = 0, \quad e^{\alpha\beta} \left( \boldsymbol{\kappa}_{\alpha|\beta} + e^{\lambda\rho} \boldsymbol{\kappa}_{\omega\lambda} \boldsymbol{b}_{\beta\rho} \right) = 0. \quad (2.49)$$

Warunki te zostaną sprawdzone w dalszej części rozprawy na etapie konstrukcji elementów skończonych w ramach sformułowania, w którym odkształcenia przyjmuje się za zmienne niezależne.



## Rozdział 3

# ZASADY WARIACYJNE

### 3.1. Rys historyczny

Rachunek wariacyjny jest działem analizy matematycznej, którego podstawowym zadaniem jest poszukiwanie wartości ekstremalnych matematycznych wyrażeń, nazywanych funkcjonalami. Zamieszczony poniżej rys historyczny rozwoju rachunku wariacyjnego został przygotowany głównie na podstawie prac [132, 200, 320]. Jego celem jest wprowadzenie do tematu zasad wariacyjnych, a nie wyczerpujące ujęcie tego obszernego zagadnienia.

Początki rachunku wariacyjnego można upatrywać w XVII wiecznych pracach: Torricellego, który zaproponował zasadę minimalnej energii dla układu dwóch połączonych ciał sztywnych oraz Fermata, który sformułował zasadę, zgodnie z którą światło pomiędzy dwoma punktami biegnie po drodze, która zajmuje minimalną lub maksymalną ilość czasu. Ważnym bodźcem do rozwoju rachunku wariacyjnego był problem wyznaczenia krzywej między dwoma punktami w płaszczyźnie pionowej, którą opadające ciało pod wpływem ciężaru własnego pokona w najkrótszym czasie. Wezwanie do rozwiązania tego zadania optymalizacji, zaproponowanego oryginalnie przez Galileusza w 1638 roku, opublikował w 1696 roku Johann Bernoulli. Rozwiązaniem tego problemu, określanego jako zadanie o brachistochronie, jest krzywa najszybszego spadku znana jako cycloida. Siedem nadesłanych rozwiązań zostało opublikowanych w pracy [207]. Leibniz w swoim rozwiązaniu problem ciągle zredukował do problemu dyskretnego, w którym krzywą najszybszego spadku przybliżał za pomocą trójkątnych funkcji testowych między trzema kolejnymi równoodległymi punktami podparcia. Ideę rozwiązania Leibniza można uważać za pierwszego prekursora metody elementów skończonych. Natomiast dyskretne przybliżone rozwiązanie autorstwa Jacoba Bernoulliego zostało później rozwinięte przez Eulera w jego książce „Methodus inveniendi lineas curvas” z 1743/1744 roku. Euler pokazał m.in., że badanie minimum funkcjonału postaci

$$J(y(x)) = \int_a^b F(x, y(x), y'(x)) dx, \quad (3.1)$$

z warunkami brzegowymi  $y(a) = A$ ,  $y(b) = B$  prowadzi do równań różniczkowych postaci

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0, \quad (3.2)$$

nazywanych równaniami Eulera. Fundamentalne dla rachunku wariacyjnego pojęcia wariacji funkcji i funkcjonału wprowadził do nauki Lagrange. Natomiast zastosowanie podczas definiowania funkcjonału nieokreślonych mnożników Lagrange’a umożliwiło uwzględnianie w nim dodatkowych warunków brzegowych. Badania Eulera, Lagrange’a, Legendre’a i innych matematyków pod koniec XVIII wieku uformowały podstawy rachunku wariacyjnego w zakresie badania pierwszej wariacji funkcjonału. Koncepcje Jacoba Bernoulliego oraz Leibniza w XIX wieku rozwinął Schellbach, prezentując w pracy [297] dyskretne analityczne rozwiązania dla 12 zadań optymalizacji.

W XVII i XVIII wieku zaczęto również tworzyć pierwsze modele matematyczne zjawisk przyrodniczych w postaci tzw. zasad wariacyjnych, zgodnie z którymi procesy przebiegają zawsze w taki sposób, że opisujące je funkcjonały przyjmują wartość minimalną lub maksymalną. Pierwszym znanym sformulowaniem zasady wariacyjnej jest przywołane wcześniej prawo Fermata. Tymczasem Leibniz jako pierwszy zaproponował  $mv^2$  jako miarę energii kinetycznej i sformułował zasadę, że jej zmiana musi być równa pracy obciążeń zewnętrznych. Jednak początkowo rachunek wariacyjny był mniej popularny niż formułowanie modeli matematycznych w postaci równań różniczkowych. W XIX wieku sytuacja ta zaczęła ulegać zmianie dzięki następującym zaletom analizy wariacyjnej:

- lepsze przystosowanie do rozwiązywania problemów o praktycznych zastosowaniach dzięki globalnemu charakterowi reprezentacji całkowej;
- większa efektywność w przybliżonym rozwiązywaniu zadań nieliniowych;
- zwarta forma i niezmienniczość zasad wariacyjnych.

W tym czasie Hamilton korzystając z zasady d'Alemberta sformułował precyzyjnie zasadę najmniejszego działania, a Ostrogradski określił wzór na przekształcenie całki objętościowej w całkę powierzchniową, znany jako wzór Gaussa-Ostrogradskiego. Zastosowanie rachunku wariacyjnego w mechanice teoretycznej, przyczyniło się w znaczący sposób do jej rozwoju. W 1877 roku Lord Rayleigh po raz pierwszy zastosował sformułowanie wariacyjne do przybliżonego rozwiązania problemu własnego w mechanice.

Na początku XX wieku zostały opracowane bezpośrednie metody rachunku wariacyjnego, które w znaczący sposób przyspieszyły rozwój metod wariacyjnych w naukach stosowanych. Jako pierwszy w 1909 roku Ritz zaproponował bezpośrednią metodę minimalizacji funkcjonałów postaci  $J[w(x)] =$

$$\int_a^b F(x, w, w', w'', \dots, w^{(k)}) dx, \text{ w której funkcję } w(x) \text{ zastąpił kombinacją liniową funkcji } f_i$$

$$w_n = f_0 + a_1 f_1 + a_2 f_2 + \dots + a_n f_n. \quad (3.3)$$

Parametry  $a_i$  zostały wyznaczone z warunków stacjonarności funkcjonału postaci  $\frac{\partial J[w_n]}{\partial a_i} = 0$ . Ritz

swoją metodę wykorzystał do rozwiązania równania ugięcia dla utwierdzonej płyty Kirchhoffa. Natomiast bezpośrednia wariacyjna metoda Rayleigha-Ritza pozwoliła na wyznaczenie najmniejszej wartości własnej w problemie własnym.

W XX wieku rachunek wariacyjny zastosowano również do badania równań różniczkowych. W ramach zadania odwrotnego rachunku wariacyjnego poszukiwano funkcjonału dla którego równanie różniczkowe byłoby równaniem Eulera. Początkowo znalezienie funkcjonału było możliwe tylko dla liniowych równań różniczkowych. Zadanie odwrotne rachunku wariacyjnego dla nieliniowych równań różniczkowych udało się rozwiązać dzięki twierdzeniu o biliniowym funkcjonale operatora potencjalnego oraz wprowadzeniu pojęcia gradientu funkcjonału, które po raz pierwszy pojawiło się u Couranta. Natomiast pierwszą definicję gradientu funkcjonału sformułował Golomb. Tymczasem metoda wariacyjna Bubnowa-Galerkina pozwala na rozwiązywanie dowolnych równań różniczkowych bez konieczności konstruowania funkcjonału w odróżnieniu od metody Ritza. Galerkin w pracy [123] zastosował tę metodę do rozwiązania eliptycznego problemu brzegowego dla belek i płyt.

Wszystkie przywołane do tej pory bezpośrednie metody rachunku wariacyjnego sformułowano na obszarze całej dziedziny problemu. W związku z tym wymagały najczęściej przyjęcia odpowiednich funkcji aproksymujących wysokiego rzędu, co w przypadku bardziej skomplikowanej geometrii i warunków brzegowych było bardzo trudne lub niemożliwe. W 1943 roku Courant jako pierwszy zaproponował przyjmować funkcje testowe (aproksymujące) na skończonych podobszarach dziedziny [83]. W ten sposób uogólnił metodę Ritza na przypadek dziedziny złożonej ze skończonej liczby podobszarów. Z tego powodu uważany jest przez społeczność matematyków za twórcę Metody Elementów Skończonych (MES). Inne modyfikacje metody Ritza w postaci schematów wariacyjno-różnicowych (siatkowych) znacząco przyczyniły się do rozwoju numerycznych metod rozwiązywania równań różniczkowych, takich jak np. MES, metoda spektralna, metoda elementów brzegowych.

W mechanice fundamentalną rolę odgrywa zasada prac wirtualnych, której genezy można upatrywać w pracy „Fizyka” autorstwa Arystotelesa. W pracy tej została zdefiniowana zasada równowagi dla dźwigni, zgodnie z którą pozostaje ona w równowadze jeśli działające na nią siły są odwrotnie proporcjonalne do prędkości. Powyższą zasadę doprecyzował Galileusz, który zauważył, że w zasadzie powinny być brane pod uwagę jedynie składowe prędkości na kierunku siły. Jednak autorstwo zasady prac wirtualnych jako fundamentalnej zasady równowagi w statyce przypisuje się Johannowi Bernoulliemu, gdyż on jako pierwszy zdefiniował ją używając iloczynu siły i wirtualnej prędkości na kierunku siły. Bernoulli zamiast używać proporcji określił, że układ sił znajduje się w równowadze jeśli suma tych iloczynów jest równa zero. Dopiero w XIX wieku zaczęto powszechnie stosować termin wirtualne przemieszczenia zamiast wirtualne prędkości. W tym wieku też Rankine wprowadził termin energia potencjalna, co pozwoliło na sformułowanie zasady zachowania energii potencjalnej dla obciążeń potencjalnych.

W zasadach zachowania energii potencjalnej oraz energii komplementarnej część z równań różniczkowych jest spełnionych w sposób przybliżony, a pozostałe równania w sposób ścisły. Chęć ujęcia wszystkich równań na tych samych warunkach w ramach sformułowania była główną motywacją do prac nad wielopolowymi zasadami wariacyjnymi. Najpierw w 1914 roku Hellinger zaproponował

sformułowanie problemu brzegowego mechaniki w postaci funkcjonału, który zależy od dwóch nieznanymi pól: przemieszczeń i sił [145]. Dalszy rozwój wielopolowych zasad wariacyjnych w mechanice przypada na okres po II wojnie światowej. Wtedy Reissner w pracy [276] rozszerzył sformułowanie Hellingera o warunki brzegowe, nadając ostateczną formę dwupolowej zasadzie wariacyjnej Hellingera-Reissnera. Natomiast trójpolową zasadę wariacyjną, w której niezależnymi polami są: przemieszczenia, odkształcenia oraz naprężenia zaproponowali niezależnie w 1955 roku Hu [156] i Washizu [355]. Obecnie używa się powszechnie nazwy zasada wariacyjna Hu-Washizu, chociaż w 1951 roku Fraeijs de Veubeke sformułował bardziej ogólną czteropolową zasadę wariacyjną, w której dodatkowym niezależnym polem były naprężenia brzegowe [121]. Jednak ze względu na to, że uczynił to w raporcie technicznym, poświęconym głównie analizie konstrukcji skrzydła, to praca ta została niezauważona przez współczesnych mu badaczy. W związku z tym Felippa [115] zaproponował, aby czteropolowy funkcjonał określać jako funkcjonał Fraeijs de Veubeke-Hu-Washizu.

## 3.2. Informacje wstępne

### 3.2.1. Wirtualne przemieszczenia

Zgodnie z podrozdziałem 2.6 deformacja powłoki jest jednoznacznie określona przez pole  $\mathbf{u} = (\mathbf{u}, \mathbf{Q})$ . W celu zdefiniowania reprezentacji stanów wirtualnych rozważa się pole  $\mathbf{u}(\eta)$  wzdłuż pewnej krzywej parametryzowanej przez  $\eta \in R$  o początku  $\mathbf{u}(\eta = 0) = \mathbf{u}$ , które można opisać w następujący sposób

$$\mathbf{u}(\eta) = \mathbf{u} + \eta \mathbf{v}, \quad \mathbf{Q}(\eta) = \exp(\eta \mathbf{W}) \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \exp(\eta \mathbf{W}) \quad (3.4)$$

Wykorzystując zależności (3.4), wirtualne przemieszczenia można obliczyć jako pochodne kierunkowe wzdłuż krzywej

$$\delta \mathbf{u} = \frac{d}{d\eta} \mathbf{u}(\eta)|_{\eta=0} = \mathbf{v}, \quad \delta \mathbf{Q} = \frac{d}{d\eta} \mathbf{Q}(\eta)|_{\eta=0} = \mathbf{W} \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \mathbf{W} \quad (3.5)$$

Zgodnie z zasadami akumulacji obrotów (zob. Dodatek A.2.3) skośnie symetryczny tensor  $\mathbf{W} = \text{ad } \mathbf{w}$  opisuje przyrost tensora obrotu w reprezentacji przestrzennej, a tensor  $\mathbf{W} = \text{ad } \mathbf{w}$  w reprezentacji materialnej. Biorąc pod uwagę zależności (2.35) i (2.38) opisujące globalną deformację powłoki, deformacja wirtualna w reprezentacji przestrzennej względem bazy  $\mathbf{t}_i$  przyjmuje postać:

$$\delta \mathbf{y} = \delta \mathbf{u} = \mathbf{v}, \quad \delta \mathbf{t}_i = \delta \mathbf{Q} \mathbf{t}_i^0 = \delta \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T \mathbf{t}_i = \mathbf{W} \mathbf{t}_i = \mathbf{w} \times \mathbf{t}_i \quad (3.6)$$

Zależności (3.5) i (3.6) pokazują, że wirtualne przemieszczenia są jednoznacznie opisane za pomocą dwóch pól wektorowych  $\mathbf{v}$  i  $\mathbf{w}$

$$\mathbf{w} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{array} \right\}. \quad (3.7)$$

W analogiczny sposób do (3.6) można zapisać wirtualną deformację w reprezentacji materialnej względem bazy  $\mathbf{t}_i^0$

$$\delta \mathbf{y} = \delta \mathbf{u} = \mathbf{Q} \mathbf{v}, \quad \delta \mathbf{t}_i = \delta \mathbf{Q} \mathbf{t}_i^0 = \mathbf{Q} \mathbf{W} \mathbf{t}_i^0 = \mathbf{Q} (\mathbf{w} \times \mathbf{t}_i^0). \quad (3.8)$$

### 3.2.2. Notacja macierzowo-operatorowa

W dalszej części rozprawy zastosowano konsekwentnie reprezentację przestrzenną oraz w celu uproszczenia zapisu notację macierzowo-operatorową, por. [62, 67, 371]. W notacji tej miary uogólnionych odkształceń zapisuje się następująco:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{E} \\ \mathbf{K} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\varepsilon}_\beta \\ \boldsymbol{\kappa}_\beta \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2 \\ \boldsymbol{\kappa}_1 \\ \boldsymbol{\kappa}_2 \end{array} \right\}, \quad (3.9)$$

a sprzężone z nimi energetycznie miary uogólnionych naprężeń w postaci

$$\mathbf{s} = \begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{n}^\beta \\ \mathbf{m}^\beta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{n}^1 \\ \mathbf{n}^2 \\ \mathbf{m}^1 \\ \mathbf{m}^2 \end{Bmatrix}. \quad (3.10)$$

W analogiczny sposób przedstawia się wektory obciążenia zewnętrznego (powierzchniowego)  $\mathbf{p}$ , wektory obciążenia brzegowego  $\mathbf{s}^*$  oraz wektory brzegowych sił wewnętrznych  $\mathbf{s}_V$ :

$$\mathbf{p} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{c} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{s}^* = \begin{Bmatrix} \mathbf{n}^* \\ \mathbf{m}^* \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{s}_V = \begin{Bmatrix} \mathbf{n}_V \\ \mathbf{m}_V \end{Bmatrix}. \quad (3.11)$$

Uwzględniając w (3.9) rozkład wektorów  $\boldsymbol{\varepsilon}_\beta$  i  $\boldsymbol{\kappa}_\beta$  na składowe, zob. wzory (2.42) i (2.43), wektor uogólnionych odkształceń można zapisać następująco

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \{ \varepsilon_{11} \ \varepsilon_{22} \ \varepsilon_{12} \ \varepsilon_{21} | \varepsilon_1 \ \varepsilon_2 | \kappa_{11} \ \kappa_{22} \ \kappa_{12} \ \kappa_{21} | \kappa_1 \ \kappa_2 \}^T = \{ \boldsymbol{\varepsilon}_m | \boldsymbol{\varepsilon}_s | \boldsymbol{\varepsilon}_b | \boldsymbol{\varepsilon}_d \}^T, \quad (3.12)$$

gdzie dokonano formalnego podziału wektora  $\boldsymbol{\varepsilon}$  na składowe:  $m$  – membranowe (ang. *membrane*),  $s$  – ścinania poprzecznego (ang. *shear*),  $b$  – zgięciowe (ang. *bending*),  $d$  – owinięcia (ang. *drilling*). W podobny sposób można rozłożyć na składowe wektor przekrojowych uogólnionych naprężeń

$$\mathbf{s} = \{ N^{11} \ N^{22} \ N^{12} \ N^{21} | Q^1 \ Q^2 | M^{11} \ M^{22} \ M^{12} \ M^{21} | M^1 \ M^2 \}^T = \{ \mathbf{s}_m | \mathbf{s}_s | \mathbf{s}_b | \mathbf{s}_d \}^T. \quad (3.13)$$

W dalszej części pracy oznaczenia  $\boldsymbol{\varepsilon}$  i  $\mathbf{s}$  będą używane dla niezależnych odkształceń i niezależnych uogólnionych naprężeń. Natomiast jeśli odkształcenia będą obliczane bezpośrednio z przemieszczeń na podstawie zależności (2.39) i (2.40), to w celu podkreślenia tego będzie stosowane oznaczenie  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1(\mathbf{u}) \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2(\mathbf{u}) \\ \boldsymbol{\kappa}_1(\mathbf{u}) \\ \boldsymbol{\kappa}_2(\mathbf{u}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{,1} + (\mathbf{Q}^T - \mathbf{1})\mathbf{t}_1 \\ \mathbf{u}_{,2} + (\mathbf{Q}^T - \mathbf{1})\mathbf{t}_2 \\ \text{ad}^{-1}(\mathbf{Q}_{,1} \mathbf{Q}^T) \\ \text{ad}^{-1}(\mathbf{Q}_{,2} \mathbf{Q}^T) \end{Bmatrix}. \quad (3.14)$$

Tymczasem oznaczenie  $\mathbf{s}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))$  wprowadza się dla wektora uogólnionych naprężeń wyznaczonych na podstawie odkształceń określonych wzorem (3.14).

Wzory (2.34) i (2.44) opisujące wirtualne miary odkształceń można przekształcić następująco:

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon}_\beta = \mathbf{v}_{,\beta} - \mathbf{w} \times \mathbf{y}_{,\beta} = \mathbf{v}_{,\beta} - \mathbf{w} \times (\mathbf{t}_\beta + \boldsymbol{\varepsilon}_\beta) = \mathbf{v}_{,\beta} + (\mathbf{t}_\beta + \boldsymbol{\varepsilon}_\beta) \times \mathbf{w}, \quad \delta \boldsymbol{\kappa}_\beta = \mathbf{w}_{,\beta}. \quad (3.15)$$

Zatem odkształcenia wirtualne w notacji macierzowo-operatorowej przyjmują postać

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \delta \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ \delta \boldsymbol{\varepsilon}_2 \\ \delta \boldsymbol{\kappa}_1 \\ \delta \boldsymbol{\kappa}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{v}_{,1} + (\mathbf{t}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_1) \times \mathbf{w} \\ \mathbf{v}_{,2} + (\mathbf{t}_2 + \boldsymbol{\varepsilon}_2) \times \mathbf{w} \\ \mathbf{w}_{,1} \\ \mathbf{w}_{,2} \end{Bmatrix}, \quad (3.16)$$

na podstawie której można zdefiniować operator macierzowy  $\mathbf{B}(\mathbf{u})$

$$\mathbf{B}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \mathbf{1}(\cdot)_{,1} & (\mathbf{t}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_1) \times (\cdot) \\ \mathbf{1}(\cdot)_{,2} & (\mathbf{t}_2 + \boldsymbol{\varepsilon}_2) \times (\cdot) \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}(\cdot)_{,1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}(\cdot)_{,2} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

opisujący zależność między wirtualnymi przemieszczeniami  $\mathbf{w}$  i wirtualnymi odkształceniami  $\delta\boldsymbol{\varepsilon}$

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}(\mathbf{u})\mathbf{w}. \quad (3.18)$$

W celu sformułowania powłokowych elementów częściowo mieszanych wprowadza się odpowiednio dla elementów typu A i B następujące wektory niezależnych odkształceń

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_A &= \{\varepsilon_{11} \ \varepsilon_{22} \ \varepsilon_{12} \ \varepsilon_{21}\}^T = \{\boldsymbol{\varepsilon}_m\}^T, \\ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_B &= \{\varepsilon_{11} \ \varepsilon_{22} \ \varepsilon_{12} \ \varepsilon_{21} | \varepsilon_1 \ \varepsilon_2\}^T = \{\boldsymbol{\varepsilon}_m | \boldsymbol{\varepsilon}_s\}^T, \end{aligned} \quad (3.19)$$

oraz dopełniające je wektory uogólnionych odkształceń wyznaczone na podstawie przemieszczeń

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{K}}_A(\mathbf{u}) &= \{\varepsilon_1 \ \varepsilon_2 | \kappa_{11} \ \kappa_{22} \ \kappa_{12} \ \kappa_{21} | \kappa_1 \ \kappa_2\}^T = \{\boldsymbol{\varepsilon}_s | \boldsymbol{\varepsilon}_b | \boldsymbol{\varepsilon}_d\}^T, \\ \bar{\mathbf{K}}_B(\mathbf{u}) &= \{\kappa_{11} \ \kappa_{22} \ \kappa_{12} \ \kappa_{21} | \kappa_1 \ \kappa_2\}^T = \{\boldsymbol{\varepsilon}_b | \boldsymbol{\varepsilon}_d\}^T. \end{aligned} \quad (3.20)$$

W analogiczny sposób definiuje się wektory uogólnionych niezależnych naprężeń

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{n}}_A &= \{N^{11} \ N^{22} \ N^{12} \ N^{21}\}^T = \{\mathbf{s}_m\}^T, \\ \bar{\mathbf{n}}_B &= \{N^{11} \ N^{22} \ N^{12} \ N^{21} | Q^1 \ Q^2\}^T = \{\mathbf{s}_m | \mathbf{s}_s\}^T, \end{aligned} \quad (3.21)$$

oraz dopełniające je wektory uogólnionych naprężeń obliczone na podstawie przemieszczeń po wykorzystaniu związków konstytutywnych

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{m}}_A(\mathbf{u}) &= \{Q^1 \ Q^2 | M^{11} \ M^{22} \ M^{12} \ M^{21} | M^1 \ M^2\}^T = \{\mathbf{s}_s | \mathbf{s}_b | \mathbf{s}_d\}^T, \\ \bar{\mathbf{m}}_B(\mathbf{u}) &= \{M^{11} \ M^{22} \ M^{12} \ M^{21} | M^1 \ M^2\}^T = \{\mathbf{s}_b | \mathbf{s}_d\}^T, \end{aligned} \quad (3.22)$$

odpowiednio dla elementów częściowo mieszanych typu A i B. W rozdziale piątym w celu uproszczenia zapisu pomija się indeks wskazujący typ elementu tam gdzie jest to możliwe.

W niniejszym rozdziale zależność między odkształceniami i siłami przekrojowymi przyjmuje się w ogólnej postaci

$$\mathbf{s} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (3.23)$$

gdzie za pomocą  $\mathbf{C}$  oznaczono macierz konstytutywną określoną w czwartym rozdziale poświęconym równaniom konstytutywnym.

### 3.3. Zasada przemieszczeń wirtualnych

W podrozdziale 2.5 pokazano, że wprowadzenie do tożsamości całkowitej lokalnych równań równowagi (2.18) i (2.20) oraz statycznych warunków brzegowych (2.19) i (2.21) za pomocą mnożników Lagrange'a  $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$  prowadzi do zasady prac wirtualnych, gdyż  $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$  można interpretować jako pola wirtualnych przemieszczeń (3.7). Zasada prac wirtualnych dana wzorem (2.33) we wprowadzonej notacji macierzowo-operatorowej dla kinematycznie dopuszczalnych pól  $\mathbf{u} \in \mathbf{U}_A$  i  $\mathbf{w} \in \mathbf{W}_A$  oraz po wykorzystaniu zależności (3.18) przyjmuje postać

$$G_i[\mathbf{u}; \mathbf{w}] = G_e[\mathbf{u}; \mathbf{w}], \quad (3.24)$$

gdzie

$$G_i[\mathbf{u}; \mathbf{w}] = \iint_M \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{s}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) da = \iint_M (\mathbf{B}(\mathbf{u})\mathbf{w})^T \mathbf{s}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) da, \quad (3.25)$$

$$G_e[\mathbf{u}; \mathbf{w}] = \iint_M \mathbf{w}^T \mathbf{p} da + \int_{\partial M_f} \mathbf{w}^T \mathbf{s}^* dl. \quad (3.26)$$

Występujące tu pole  $\mathbf{u}$  jest kinematycznie dopuszczalne, gdy należy do zbioru  $\mathbf{U}_A$  pól spełniających kinematyczne warunki brzegowe

$$U_A = \left\{ \mathbf{u} \in U \mid \mathbf{u} = \mathbf{u}^* \text{ na brzegu } \partial M_d \right\}, \quad (3.27)$$

gdzie  $\mathbf{u}^*$  oznacza pole przemieszczeń zadanych na brzegu  $\partial M_d$ . Natomiast pole wirtualnych przemieszczeń  $\mathbf{w}$  jest kinematycznie dopuszczalne, gdy należy do zbioru pól  $W_A$  spełniających jednorodne kinematyczne warunki brzegowe

$$W_A = \left\{ \mathbf{w} \in W \mid \mathbf{w} = \mathbf{0} \text{ na brzegu } \partial M_d \right\}. \quad (3.28)$$

Dodatkowo pola  $\mathbf{u}$  i  $\mathbf{w}$  muszą spełniać warunki regularności umożliwiające standardowe przekształcenia matematyczne. Warunki regularności wymagają, aby pola były ciągłe i różniczkowalne w punktach regularnych powierzchni  $M$  oraz posiadały ciągłe pierwsze pochodne cząstkowe wzdłuż brzegu.

Wyrażenie  $G_i[\mathbf{u}; \mathbf{w}]$  (3.25) można interpretować jako wirtualną pracę wewnętrzną, a wyrażenie  $G_e[\mathbf{u}; \mathbf{w}]$  (3.26) jako wirtualną pracę zewnętrzną wykonaną przez obciążenia powierzchniowe i brzegowe. Ze względu na to, że postać (3.24) zasady prac wirtualnych jest wyrażona tylko w przemieszczeniach, to w literaturze [62, 370] nazywana jest ona zasadą przemieszczeń wirtualnych.

Na podstawie zależności (3.24) możliwe jest zdefiniowanie dla zasady przemieszczeń wirtualnych następującego funkcjonału

$$G[\mathbf{u}; \mathbf{w}] \equiv G_i[\mathbf{u}; \mathbf{w}] - G_e[\mathbf{u}; \mathbf{w}] = 0. \quad (3.29)$$

Funkcjonał (3.29) stanowi podstawę do formułowania przemieszczeniowych elementów skończonych, dla których oprócz kinematycznych warunków brzegowych w sposób ścisły muszą być spełnione również zależności przemieszczenie–odkształcenie (3.14) oraz związki konstytutywne (3.23).

## 3.4. Przegląd zasad wariacyjnych

### 3.4.1. Wprowadzenie

W niniejszym podrozdziale na podstawie pracy [354] zostanie dokonany przegląd najważniejszych zasad wariacyjnych, pokazujący relacje między tymi zasadami. Opis zasad wariacyjnych w ramach liniowej teorii powłok z powierzchnią podstawową typu Cosseratów został przedstawiony m.in. w [17, 277]. Jako punkt startowy do niniejszych rozważań przyjmuje się zasadę przemieszczeń wirtualnych opisaną funkcjonałem (3.29).

Dla powłok hipersprężystych zakłada się istnienie funkcji skalarnej

$$\Phi = \Phi(\boldsymbol{\epsilon}) = \Phi(\mathbf{E}, \mathbf{K}) \quad (3.30)$$

nazywanej funkcją powierzchniową gęstości energii sprężystej (odkształcenia), której postaci w ramach nieliniowej 6-parametrowej teorii powłok badano w pracy [104]. Jeśli taka funkcja istnieje, to związek konstytutywny (3.23) przyjmuje postać

$$\mathbf{s} = \begin{Bmatrix} N \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} \equiv \partial_{\boldsymbol{\epsilon}} \Phi(\boldsymbol{\epsilon}) = \begin{Bmatrix} \partial_E \Phi(\mathbf{E}, \mathbf{K}) \\ \partial_K \Phi(\mathbf{E}, \mathbf{K}) \end{Bmatrix}. \quad (3.31)$$

Uwzględnienie zależności (3.31) w funkcjonałe (3.29) pozwala na sformułowanie rozszerzonej zasady prac wirtualnych

$$G^*[\mathbf{u}; \mathbf{w}] = \delta \iint_M \Phi(\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u})) da - \iint_M \mathbf{w}^T \mathbf{p} da - \int_{\partial M_f} \mathbf{w}^T \mathbf{s}^* dl. \quad (3.32)$$

### 3.4.2. Zasada zachowania energii potencjalnej

Sformułowanie zasady zachowania energii potencjalnej dodatkowo wymaga założenia, że działające na powłokę obciążenia  $\mathbf{p}$  i  $\mathbf{s}^*$  są potencjalne, tzn. istnieje potencjał obciążenia  $V$ , który spełnia równość

$$\delta V[\mathbf{u}; \mathbf{w}] = -G_e[\mathbf{u}; \mathbf{w}]. \quad (3.33)$$

Na podstawie zależności (3.26) i (3.33) potencjał obciążenia można zapisać za pomocą wzoru



$$V(\mathbf{u}) = -\iint_M \mathbf{u}^T \mathbf{p} da - \int_{\partial M_f} \mathbf{u}^T \mathbf{s}^* dl. \quad (3.34)$$

Podstawienie zależności (3.33) do funkcjonału (3.32) pozwala na zdefiniowanie zasady zachowania energii potencjalnej  $J: \mathbf{U}_A \rightarrow R$  w zwartej postaci

$$J(\mathbf{u}) = \iint_M \Phi(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) da + V(\mathbf{u}), \quad (3.35)$$

w której jedynymi zmiennymi niezależnymi są przemieszczenia  $\mathbf{u} \in \mathbf{U}_A$ . Potencjalność obciążenia zewnętrznego oraz istnienie funkcji energii sprężystej pozwoliło na wyeliminowanie wirtualnych przemieszczeń z funkcjonału (3.35) względem zasady prac wirtualnych. Jednak podczas formułowania elementów skończonych na podstawie funkcjonału (3.35) nadal w sposób ścisły muszą być spełnione: kinematyczne warunki brzegowe (3.27), zależności odkształcenie-przemieszczenie (3.14) oraz związki konstytutywne (3.23).

### 3.4.3. Zasada Hu-Washizu

W celu ograniczenia liczby równań, które w danym sformułowaniu muszą być spełnione w sposób ścisły, możliwe jest wprowadzenie relacji

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \quad (3.36)$$

do funkcjonału (3.35) przez wykorzystanie metody mnożników Lagrange'a. Zbadanie stacjonarności takiego funkcjonału prowadzi do spostrzeżenia, że poszukiwanym mnożnikiem Lagrange'a jest pole uogólnionych niezależnych naprężeń  $\mathbf{s}$ . Dodatkowo przyjmuje się, że funkcja energii sprężystej  $\Phi(\boldsymbol{\varepsilon})$  jest funkcją niezależnych odkształceń, a nie przemieszczeń  $\Phi(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))$  jak w (3.35). Wtedy możliwe jest sformułowanie trójpolowej zasady wariacyjnej Hu-Washizu, której funkcjonal przyjmuje postać

$$W(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{s}) = \iint_M (\Phi(\boldsymbol{\varepsilon}) + \mathbf{s}^T (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\varepsilon})) da + V(\mathbf{u}), \quad (3.37)$$

gdzie pola:  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{s})$  są traktowane jako niezależne. W zasadzie tej jedynymi dodatkowymi warunkami, które muszą być spełnione w sposób ścisły są kinematyczne warunki brzegowe dla pola  $\mathbf{u} \in \mathbf{U}_A$ . Zasada wariacyjna Hu-Washizu zostanie wykorzystana w dalszej części rozprawy do sformułowania mieszanych powłokowych elementów skończonych.

### 3.4.4. Zasada Fraeijs de Veubeke-Hu-Washizu

W najbardziej ogólnej zasadzie wariacyjnej również kinematyczne warunki brzegowe (3.27) są relaksowane metodą mnożników Lagrange'a. Z warunku stacjonarności funkcjonału wynika, że dodatkowym polem w porównaniu do funkcjonału (3.37) są wewnętrzne siły przekrojowe na brzegu  $\mathbf{s}_v$ . Zatem czteropolowy funkcjonal Fraeijs de Veubeke-Hu-Washizu (por. [17, 115]) przyjmuje następującą postać

$$\Pi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{s}, \mathbf{s}_v) = \iint_M (\Phi(\boldsymbol{\varepsilon}) + \mathbf{s}^T (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\varepsilon})) da - \iint_M \mathbf{u}^T \mathbf{p} da - \int_{\partial M_f} \mathbf{u}^T \mathbf{s}^* dl - \int_{\partial M_d} (\mathbf{u}^* - \mathbf{u})^T \mathbf{s}_v dl. \quad (3.38)$$

W tak zdefiniowanym funkcjonału wszystkie równania problemu brzegowego są zawarte w tożsamości całkowitej w sposób słaby, a więc żadne równanie nie jest wyróżnione.

### 3.4.5. Zasada Hellingera-Reissnera

Przegląd literatury dokonany w podrozdziale 1.2 wskazuje, że do formułowania hybrydowo-mieszanych elementów skończonych często wykorzystuje się dwupolową zasadę wariacyjną Hellingera-Reissnera. Funkcjonał tej zasady można uzyskać z funkcjonału Hu-Washizu przez eliminację z niego niezależnych odkształceń, które na podstawie zależności (3.23) można wyrazić wzorem

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{s}, \quad (3.39)$$

jeśli macierz konstytutywna jest odwracalna. Dodatkowo w przypadku materiału liniowo-sprężystego funkcję energii sprężystej można rozpisać następująco

$$\Phi(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T (\mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{s}. \quad (3.40)$$

Uwzględniając zależności (3.39) i (3.40) w (3.37) uzyskuje się funkcjonal Hellingera-Reissnera dla kinematycznie dopuszczalnych przemieszczeń i niezależnych uogólnionych naprężeń w postaci

$$H(\mathbf{u}, \mathbf{s}) = \iint_M \left( -\frac{1}{2} \mathbf{s}^T (\mathbf{C}^{-1} \mathbf{s}) + \mathbf{s}^T \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \right) da + V(\mathbf{u}). \quad (3.41)$$

W celu uproszczenia funkcjonału (3.41) na podstawie transformacji Legendre'a (zob. np. [382]) definiuje się gęstość energii komplementarnej

$$\Psi(\mathbf{s}) = \mathbf{s}^T \boldsymbol{\varepsilon} - \Phi(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T (\mathbf{C}^{-1} \mathbf{s}), \quad (3.42)$$

której wstawienie do (3.41) pozwala na zapisanie funkcjonału Hellingera-Reissnera następująco

$$H(\mathbf{u}, \mathbf{s}) = \iint_M \left( \mathbf{s}^T \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \Psi(\mathbf{s}) \right) da + V(\mathbf{u}). \quad (3.43)$$

Ze względu na to, że funkcjonal (3.43) zawiera funkcję  $\Psi(\mathbf{s})$  to zasadę Hellingera-Reissnera zalicza się do grupy komplementarnych zasad wariacyjnych. W zasadzie tej oprócz kinematycznych warunków brzegowych jedynie zależności odkształcenie-przemieszczenie (3.14) muszą być spełnione w sposób ścisły, gdyż pozostałe równania wynikają z warunku stacjonarności  $\delta H = 0$ .

W pracy [62] został opisany wariant odkształceniowy zasady Hellingera-Reissnera. W wariancie tym niezależnymi zmiennymi są odkształcenia i przemieszczenia, a związki konstytutywne (3.23) muszą być spełnione w sposób ścisły. Ta dwupolowa zasada wariacyjna została po raz pierwszy opisana przez Fraeijs de Veubeke, dlatego w pracy [115] zaproponowano, aby nazywać ją zasadą wariacyjną Fraeijs de Veubeke.

### 3.4.6. Zasady wariacyjne komplementarne

W celu określenia zasady wirtualnej pracy komplementarnej wprowadza się funkcje naprężeń  $\mathbf{F}$  za pracę [17] na podstawie których możliwe jest wyznaczenie uogólnionych naprężeń

$$\mathbf{s} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \boldsymbol{\zeta}}. \quad (3.44)$$

W zasadach komplementarnych zgodnie z pracą [17] odkształceniom  $\boldsymbol{\varepsilon}$  odpowiadają uogólnione naprężenia  $\mathbf{s}$ , a przemieszczeniom  $\mathbf{u}$  funkcje naprężeń  $\mathbf{F}$ . Wtedy zdefiniowanie tożsamości całkowitej metodą mnożników Lagrange'a na podstawie zależności odkształcenie-przemieszczenie (3.14) oraz kinematycznych warunków brzegowych (3.27) prowadzi do zasady wirtualnej pracy komplementarnej, którą można w ogólnej postaci zapisać następująco:

$$G[\mathbf{F}; \delta \mathbf{s}] \equiv G_i[\mathbf{F}; \delta \mathbf{s}] - G_e[\mathbf{F}; \delta \mathbf{s}] = \iint_M \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{s}(\mathbf{F}))^T \delta \mathbf{s} da - \int_{\partial M_d} \mathbf{u}^{*T} \delta \mathbf{s} \mathbf{v} dl = 0. \quad (3.45)$$

Dodatkowo dla tej zasady muszą być spełnione w sposób ścisły lokalne równania równowagi (2.18) i (2.20) oraz statyczne warunki brzegowe (2.19) i (2.21). Komplet równań dla problemu brzegowego uzupełniają związki konstytutywne (3.23).

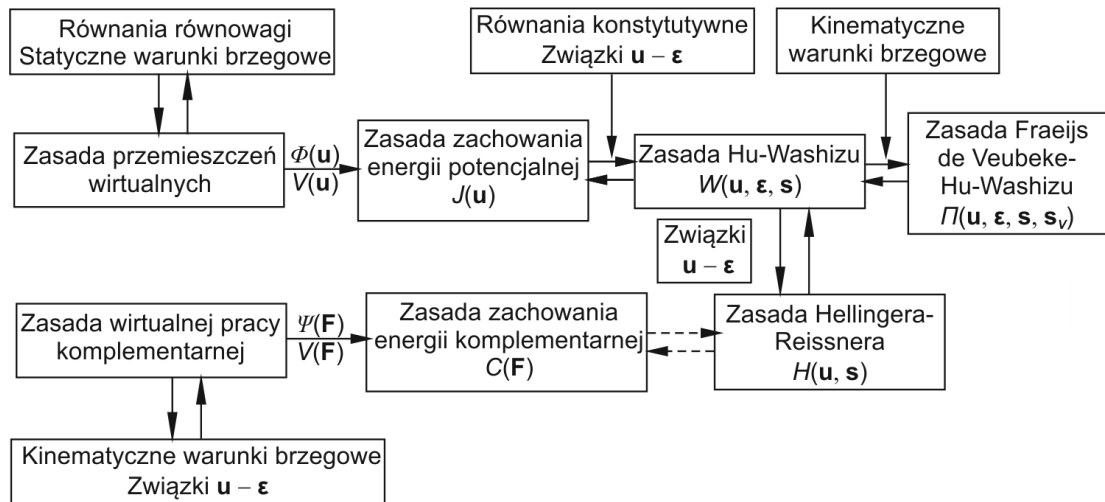
Jeśli istnieje funkcja gęstości energii komplementarnej  $\Psi(\mathbf{F})$  oraz zadane przemieszczenia na brzegu  $\mathbf{u}^*$  nie ulegają zmianie w trakcie analizy to możliwe jest sformułowanie funkcjonału

$$C(\mathbf{F}) = \iint_M \Psi(\mathbf{F}) da + V(\mathbf{F}) \quad (3.46)$$

dla zasady zachowania energii komplementarnej. W funkcjonale tym jedynymi niezależnymi zmiennymi są funkcje naprężeń  $\mathbf{F}$ . Dodatkowo dla tej zasady muszą być spełnione w sposób ścisły te same warunki co dla zasady wirtualnej pracy komplementarnej.

### 3.4.7. Relacje między zasadami wariacyjnymi

Relacje łączące omówione wyżej zasady wariacyjne zostały w sposób schematyczny zaprezentowane na rys. 3.1. Zasadę wariacyjną Hellingera-Reissnera oraz zasadę zachowania energii komplementarnej połączono liniami przerywanymi, gdyż w tym przypadku przejście z jednej zasady do drugiej wymaga większej liczby przekształceń. Jeśli w danej zasadzie wariacyjnej pewne warunki (równania) są spełnione w sposób ścisły, to w zasadzie do niej komplementarnej te warunki powinny być spełnione w sposób słaby. Zatem np. zasada zachowania energii komplementarnej jest zasadą komplementarną do zasady zachowania energii potencjalnej. Zasada prac wirtualnych, przemieszczeń wirtualnych oraz wirtualnej pracy komplementarnej jako tożsamości całkowe są ogólniejsze od pozostałych zasad wariacyjnych (zdefiniowanych jako warunki stacjonarności funkcjonału), gdyż nie wymagają istnienia odpowiedniego funkcjonału.



Rys. 3.1. Schemat pokazujący relacje między zasadami wariacyjnymi

W literaturze przedmiotu w celu zmniejszenia liczby niezależnych parametrów w obliczeniach zostały zaproponowane różne modyfikacje wielopolowych zasad wariacyjnych. W pracy [62] w ramach zmodyfikowanej zasady Hellingera-Reissnera jako niezależne przyjęto tylko wybrane składowe wektora uogólnionych naprężeń. Tymczasem zastosowanie koncepcji wzbogaconych odkształceń [309] w ramach zasady wariacyjnej Hu-Washizu pozwoliło na wyeliminowanie ze sformułowania niezależnych uogólnionych naprężeń po zlinearyzowaniu funkcjonału. W pracy [370] w zmodyfikowanym funkcjonału Hu-Washizu uwzględniono tylko membranowe i poprzeczne składowe odkształceń. Podczas gdy w kolejnej pracy [371] jako niezależne przyjęto jedynie składowe membranowe. Rodzinę zmodyfikowanych zasad wariacyjnych, w których zrelaksowano warunki ciągłości przemieszczeń pomiędzy elementami skończonymi zaproponowano w pracy [354].

### 3.5. Zmodyfikowana zasada wariacyjna Hu-Washizu

W celu sformułowania powłokowych elementów częściowo mieszanych w dalszej części pracy, poniżej zaproponowano zmodyfikowany funkcjonał Hu-Washizu inny niż w pracach [370, 371]. Funkcjonał tego nie wykorzystany do tej pory w ramach nieliniowej 6-parametrowej teorii powłok. W zmodyfikowanym funkcjonału Hu-Washizu, tylko część ze składowych wektora  $\boldsymbol{\varepsilon}$  i  $\boldsymbol{s}$  jest niezależna od przemieszczeń. W związku z tym dokonuje się dekompozycji wektora odkształceń (3.14)

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad \bar{\mathbf{K}}(\mathbf{u})\}^T \quad (3.47)$$

na część niezależną  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$  daną wzorem (3.19) oraz część zależną od przemieszczeń  $\bar{\mathbf{K}}(\mathbf{u})$  daną wzorem (3.20). W analogiczny sposób przeprowadza się dekompozycję wektora uogólnionych naprężeń

$$\boldsymbol{s} = \{\bar{\mathbf{n}} \quad \bar{\mathbf{m}}(\mathbf{u})\}^T \quad (3.48)$$

na część niezależną  $\bar{\mathbf{n}}$  i część zależną  $\bar{\mathbf{m}}(\mathbf{u})$  opisane odpowiednio wzorami (3.21) i (3.22).

Wykorzystując dekompozycję wektorów  $\boldsymbol{\varepsilon}$  (3.47) i  $\mathbf{s}$  (3.48) możliwe jest sformułowanie funkcjonału zmodyfikowanej zasady wariacyjnej Hu-Washizu w postaci

$$W(\mathbf{u}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, \bar{\mathbf{n}}) = \iint_M \left( \Phi(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, \bar{\mathbf{k}}(\mathbf{u})) + \bar{\mathbf{n}}^T (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u}) - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) \right) da + V(\mathbf{u}), \quad (3.49)$$

w której część niezależna odkształceń i naprężeń jest opisana za pomocą zasady wariacyjnej Hu-Washizu, a część zależna od przemieszczeń za pomocą zasady zachowania energii potencjalnej. Dzięki przeprowadzeniu w zmodyfikowanej zasadzie wariacyjnej odpowiadającej sobie dekompozycji wektorów  $\boldsymbol{\varepsilon}$  i  $\mathbf{s}$  zachowane jest sprzężenie energetyczne odkształceń i uogólnionych naprężeń.

### 3.6. Linearyzacja trójpolowej zasady wariacyjnej Hu-Washizu

#### 3.6.1. Wprowadzenie

Linearyzacja równań jest bardzo ważnym etapem w przyrostowo-iteracyjnym rozwiązaniu nieliniowego problemu brzegowego. W sformułowaniu słabym oznacza ona linearyzację wybranej zasady wariacyjnej. Linearyzacja zasady przemieszczeń wirtualnych, wykorzystywana w elementach przemieszczeniowych, została opisana w Dodatku B.1. W ramach procedury przyrostowo-iteracyjnej wprowadza się wektor

$$\Delta \mathbf{u} = (\Delta \mathbf{u}, \Delta \boldsymbol{\psi}) \in W_A, \quad (3.50)$$

styczny do krzywej  $\mathbf{u}(\eta)$  w punkcie  $\mathbf{u}$ , należący do tej samej przestrzeni stycznej co wektor  $\mathbf{w}$  dany wzorem (3.5). W odróżnieniu od wirtualnych przemieszczeń  $\mathbf{w}$  składowe wektora  $\Delta \mathbf{u}$  w dalszej części pracy interpretuje się jako rzeczywiste przyrosty przemieszczeń. Analogicznie do wektora  $\Delta \mathbf{u}$  definiuje się wektory styczne  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$ ,  $\Delta \mathbf{s}$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\eta) = \boldsymbol{\varepsilon} + \eta \Delta \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \mathbf{s}(\eta) = \mathbf{s} + \eta \Delta \mathbf{s}. \quad (3.51)$$

Pochodną kierunkową funkcjonału  $G[\mathbf{u}; \mathbf{w}]$  danego wzorem (3.29) w punkcie  $\mathbf{u} \in U_A$  i w kierunku  $\Delta \mathbf{u} \in W_A$  definiuje się następująco

$$\delta G[\mathbf{u}; \Delta \mathbf{u}, \mathbf{w}] = \left. \frac{d}{d\eta} G[\mathbf{u}(\eta); \mathbf{w}] \right|_{\eta=0}. \quad (3.52)$$

W podobny sposób definiuje się pochodne kierunkowe wariacji funkcjonału  $\delta W$  w kierunku  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$  i  $\Delta \mathbf{s}$

$$\delta^2 W[\boldsymbol{\varepsilon}(\eta); \Delta \boldsymbol{\varepsilon}, \delta \boldsymbol{\varepsilon}] = \left. \frac{d}{d\eta} \delta W[\boldsymbol{\varepsilon}(\eta); \delta \boldsymbol{\varepsilon}] \right|_{\eta=0}, \quad \delta^2 W[\mathbf{s}(\eta); \Delta \mathbf{s}, \delta \mathbf{s}] = \left. \frac{d}{d\eta} \delta W[\mathbf{s}(\eta); \delta \mathbf{s}] \right|_{\eta=0}. \quad (3.53)$$

#### 3.6.2. Pierwsza wariacja funkcjonału

Wykorzystując definicję pochodnej kierunkowej, pierwszą wariację funkcjonału (3.37) trójpolowej zasady wariacyjnej Hu-Washizu można zapisać następująco

$$\delta W(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{s}; \mathbf{w}, \delta \boldsymbol{\varepsilon}, \delta \mathbf{s}) = \iint_M \left( \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} \Phi + \mathbf{s}^T \delta \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \delta \mathbf{s}^T (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\varepsilon}) - \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{s} \right) da + \delta V[\mathbf{u}; \mathbf{w}], \quad (3.54)$$

gdzie wariacja potencjału obciążenia wynika z zależności (3.33). Sposób wyznaczenia składowych we wzorze (3.54) został zaprezentowany w tab. 3.1. Uwzględniając zależności (3.18) i (3.33), funkcjonał (3.54) można zapisać w następującej postaci:

$$\delta W(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{s}; \mathbf{w}, \delta \boldsymbol{\varepsilon}, \delta \mathbf{s}) = \iint_M \left( \mathbf{w}^T (\mathbf{B}(\mathbf{u})^T \mathbf{s} - \mathbf{p}) + \delta \mathbf{s}^T (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\varepsilon}) + \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T (\partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} \Phi - \mathbf{s}) \right) da + \int_{\partial M_f} \mathbf{w}^T (\mathbf{s}_\nu - \mathbf{s}^*) dl. \quad (3.55)$$

Wtedy z warunku stacjonarności funkcjonału

$$\delta W(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{s}; \mathbf{w}, \delta \boldsymbol{\varepsilon}, \delta \mathbf{s}) = 0, \quad \forall \mathbf{w} \in W_A, \quad (3.56)$$

oraz z dowolności  $\mathbf{w} \in W_A$  wynikają równania równowagi oraz statyczne warunki brzegowe, z dowolności  $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$  równania konstytutywne, a z dowolności  $\delta \mathbf{s}$  związki przemieszczenie–odkształcenie. Zależności te są równaniami Eulera-Lagrange'a dla warunku stacjonarności (3.56).

Tabela 3.1. Linearyzacja trójpolowej zasady wariacyjnej Hu-Washizu

<i>składnik</i> <i>kierunek</i>	$\Phi(\boldsymbol{\varepsilon})$	$\mathbf{s}^T \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$	$-\mathbf{s}^T \boldsymbol{\varepsilon}$
$\delta \mathbf{u}$	0	$\mathbf{s}^T \delta \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$	0
$\delta \boldsymbol{\varepsilon}$	$\delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} \Phi$	0	$-\delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{s}$
$\delta \mathbf{s}$	0	$\delta \mathbf{s}^T \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$	$-\delta \mathbf{s}^T \boldsymbol{\varepsilon}$

### 3.6.3. Druga wariacja funkcjonału

W celu dokończenia linearyzacji trójpolowej zasady wariacyjnej Hu-Washizu konieczne jest określenie drugiej wariacji funkcjonału (3.37). Wykorzystanie definicji pochodnej kierunkowej (3.53) dla wariacji funkcjonału  $\delta W$  prowadzi do zależności

$$\begin{aligned} \delta^2 W(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{s}; \mathbf{w}, \delta \boldsymbol{\varepsilon}, \delta \mathbf{s}, \Delta \mathbf{u}, \Delta \boldsymbol{\varepsilon}, \Delta \mathbf{s}) &= \delta \left\{ \iint_M \left( \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} \Phi + \mathbf{s}^T \delta \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \delta \mathbf{s}^T \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \delta \mathbf{s}^T \boldsymbol{\varepsilon} - \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{s} \right) da \right\} = \\ &= \iint_M \left( \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}}^2 \Phi \Delta \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{s}^T \Delta \delta \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \Delta \mathbf{s}^T \delta \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \delta \mathbf{s}^T \Delta \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \delta \mathbf{s}^T \Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \Delta \mathbf{s} \right) da \end{aligned} \quad (3.57)$$

Sposób wyznaczenia drugiej wariacji został szczegółowo opisany w tab. 3.2. Określenie pierwszej i drugiej wariacji funkcjonału (3.37) pozwala na zapisanie zlinearyzowanego warunku stacjonarności (3.56) w rozszerzonej postaci

$$\delta^2 W(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{s}; \mathbf{w}, \delta \boldsymbol{\varepsilon}, \delta \mathbf{n}, \Delta \mathbf{u}, \Delta \boldsymbol{\varepsilon}, \Delta \mathbf{n}) + \delta W(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{s}; \mathbf{w}, \delta \boldsymbol{\varepsilon}, \delta \mathbf{n}) = 0. \quad (3.58)$$

Tabela 3.2. Wyznaczenie drugiej wariacji funkcjonału trójpolowej zasady wariacyjnej Hu-Washizu

<i>składnik</i> <i>kierunek</i>	$\delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} \Phi$	$\mathbf{s}^T \delta \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$	$\delta \mathbf{s}^T \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$	$-\delta \mathbf{s}^T \boldsymbol{\varepsilon}$	$-\delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{s}$
$\Delta \mathbf{u}$	0	$\mathbf{s}^T \Delta \delta \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$	$\delta \mathbf{s}^T \Delta \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$	0	0
$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$	$\delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}}^2 \Phi \Delta \boldsymbol{\varepsilon}$	0	0	$-\delta \mathbf{s}^T \Delta \boldsymbol{\varepsilon}$	0
$\Delta \mathbf{s}$	0	$\Delta \mathbf{s}^T \delta \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$	0	0	$-\delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \Delta \mathbf{s}$

Podczas wyznaczania drugiej wariacji funkcjonału ograniczono się jedynie do części związanej z wirtualną energią wewnętrzną powłoki, gdyż w rozprawie doktorskiej zakłada się potencjalność obciążenia. W przypadku wystąpienia w konstrukcji obciążeń niekonserwatywnych drugą wariację dla potencjału obciążenia  $V(\mathbf{u})$  należałoby wyznaczyć w sposób opisany dla wariacji funkcjonału zewnętrznej pracy wirtualnej w Dodatku B.1.

## 3.7. Linearyzacja zmodyfikowanej zasady wariacyjnej Hu-Washizu

### 3.7.1. Pierwsza wariacja funkcjonału

Uwzględniając dekompozycję wektora odkształceń (3.47) i uogólnionych naprężeń (3.48) funkcję powierzchniową gęstości energii odkształcenia (3.30) można zapisać w postaci

$$\Phi(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, \bar{\mathbf{k}}(\mathbf{u})) = \frac{1}{2} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{C}_{11} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{C}_{12} \bar{\mathbf{k}}(\mathbf{u}) + \bar{\mathbf{k}}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{C}_{21} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{k}}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{C}_{22} \bar{\mathbf{k}}(\mathbf{u}). \quad (3.59)$$

Pierwsza wariacja zmodyfikowanej zasady wariacyjnej Hu-Washizu (3.49) jest dana wzorem

$$\delta W(\mathbf{u}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, \bar{\mathbf{n}}; \mathbf{w}, \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, \delta \bar{\mathbf{n}}) = \iint_M \left[ \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u})^T \bar{\mathbf{n}} + \delta \bar{\mathbf{k}}(\mathbf{u})^T \partial_{\bar{\mathbf{k}}} \Phi + \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T (\partial_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} \Phi - \bar{\mathbf{n}}) + \delta \bar{\mathbf{n}}^T (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u}) - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) \right] da + \delta V[\mathbf{u}; \mathbf{w}], \quad (3.60)$$

gdzie  $\partial_{\bar{\mathbf{k}}} \Phi$  oznacza pochodną cząstkową funkcji (3.59) względem składowych wektora  $\bar{\mathbf{k}}(\mathbf{u})$

$$\partial_{\bar{\mathbf{k}}}\Phi = \bar{\mathbf{m}}(\mathbf{u}) = \mathbf{C}_{21}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbf{C}_{22}\bar{\mathbf{k}}(\mathbf{u}), \quad (3.61)$$

natomiast pochodna cząstkowa  $\partial_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}\Phi$  po składowych wektora  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$  przyjmuje postać

$$\partial_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}\Phi = \mathbf{C}_{11}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbf{C}_{12}\bar{\mathbf{k}}(\mathbf{u}). \quad (3.62)$$

Sposób wyznaczenia pierwszej wariacji został szczegółowo rozpisany w tab. 3.3. Podobnie jak dla zasady wariacyjnej Hu-Washizu można pokazać, że dla warunku stacjonarności  $\delta W = 0$  zmodyfikowanej zasady (3.49) równaniami Eulera-Lagrange'a są: równania równowagi, statyczne warunki brzegowe, równania konstytutywne oraz związki przemieszczenie–odkształcenie. Jedyną różnicą jest to, że równania konstytutywne oraz związki przemieszczenie–odkształcenie w zmodyfikowanej zasadzie wariacyjnej Hu-Washizu są spełnione w sposób słaby tylko dla niezależnej części odkształceń i naprężeń.

Tabela 3.3. Linearyzacja zmodyfikowanej trójpolowej zasady wariacyjnej Hu-Washizu

<i>składnik kierunek</i>	$\Phi(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, \bar{\mathbf{k}}(\mathbf{u}))$	$\bar{\mathbf{n}}^T \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u})$	$-\bar{\mathbf{n}}^T \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$
$\delta \mathbf{u}$	$\delta \bar{\mathbf{k}}(\mathbf{u})^T \partial_{\bar{\mathbf{k}}}\Phi$	$\bar{\mathbf{n}}^T \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u})$	0
$\delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$	$\delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \partial_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}\Phi$	0	$-\delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \bar{\mathbf{n}}$
$\delta \bar{\mathbf{n}}$	0	$\delta \bar{\mathbf{n}}^T \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u})$	$-\delta \bar{\mathbf{n}}^T \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$

### 3.7.2. Druga wariacja funkcjonału

Drugą wariację dla zmodyfikowanego funkcjonału Hu-Washizu (3.49) można wyrazić wzorem

$$\begin{aligned} & \delta^2 W(\mathbf{u}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, \bar{\mathbf{n}}; \mathbf{w}, \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, \delta \bar{\mathbf{n}}, \Delta \mathbf{u}, \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, \Delta \bar{\mathbf{n}}) = \\ & = \iint_M \left( \Delta \delta \bar{\mathbf{k}}(\mathbf{u})^T \partial_{\bar{\mathbf{k}}}\Phi + \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \partial_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}\partial_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}\Phi \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \bar{\mathbf{n}}^T \Delta \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u}) + \Delta \bar{\mathbf{n}}^T \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u}) + \delta \bar{\mathbf{n}}^T \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u}) - \delta \bar{\mathbf{n}}^T \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} - \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \Delta \bar{\mathbf{n}} \right) da, \end{aligned} \quad (3.63)$$

w którym człon  $\delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \partial_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}\partial_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}\Phi \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$  wynika z jednej strony z funkcjonału Hu-Washizu, a z drugiej strony z zasady zachowania energii potencjalnej. Wykorzystując zależność  $\mathbf{C} = \partial_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}\partial_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}\Phi$  zachodzącą dla materiałów liniowo-sprężystych oraz wzór (3.59) człon ten można rozpisać w następujący sposób

$$\delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \partial_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}\partial_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}\Phi \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \left\{ \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad \delta \bar{\mathbf{k}}(\mathbf{u}) \right\} \begin{bmatrix} \partial_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}\Phi & \partial_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\bar{\mathbf{k}}}\Phi \\ \partial_{\bar{\mathbf{k}}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}\Phi & \partial_{\bar{\mathbf{k}}\bar{\mathbf{k}}}\Phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ \Delta \bar{\mathbf{k}}(\mathbf{u}) \end{Bmatrix} = \left\{ \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad \delta \bar{\mathbf{k}}(\mathbf{u}) \right\} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ \Delta \bar{\mathbf{k}}(\mathbf{u}) \end{Bmatrix}. \quad (3.64)$$

W powyższym wzorze  $\partial_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}\partial_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}\Phi$  oznacza drugą pochodną funkcji  $\Phi$  względem składowych wektora  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ . Sposób wyznaczenia drugiej wariacji został szczegółowo opisany w tab. 3.4. Warunek stacjonarności w postaci (3.58) dla zmodyfikowanej zasady wariacyjnej Hu-Washizu jest podstawą do formułowania częściowo mieszanych powłokowych elementów skończonych w dalszej części pracy.

Tabela 3.4. Wyznaczenie drugiej wariacji funkcjonału zmodyfikowanej zasady wariacyjnej Hu-Washizu

<i>składnik kierunek</i>	$\delta \bar{\mathbf{k}}(\mathbf{u})^T \partial_{\bar{\mathbf{k}}}\Phi$	$\delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \partial_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}\Phi$	$\bar{\mathbf{n}}^T \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u})$	$\delta \bar{\mathbf{n}}^T \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u})$	$-\delta \bar{\mathbf{n}}^T \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$	$-\delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \bar{\mathbf{n}}$
$\Delta \mathbf{u}$	$(\Delta \delta \bar{\mathbf{k}}(\mathbf{u}))^T \partial_{\bar{\mathbf{k}}}\Phi + \delta \bar{\mathbf{k}}(\mathbf{u})^T \partial_{\bar{\mathbf{k}}}\partial_{\bar{\mathbf{k}}}\Phi \Delta \bar{\mathbf{k}}(\mathbf{u})$	$\delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \partial_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}\partial_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}\Phi \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$	$\bar{\mathbf{n}}^T \Delta \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u})$	$\delta \bar{\mathbf{n}}^T \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u})$	0	0
$\Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$	$\delta \bar{\mathbf{k}}(\mathbf{u})^T \partial_{\bar{\mathbf{k}}}\partial_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}\Phi \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$	$\delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \partial_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}\partial_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}\Phi \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$	0	0	$-\delta \bar{\mathbf{n}}^T \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$	0
$\Delta \bar{\mathbf{n}}$	0	0	$\Delta \bar{\mathbf{n}}^T \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u})$	0	0	$-\delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \Delta \bar{\mathbf{n}}$

## Rozdział 4

# RÓWNANIA KONSTYTUTYWNE

### 4.1. Wprowadzenie

Celem rozdziału czwartego jest sformułowanie równań konstytutywnych powłok o funkcyjnej zmienności materiału wzdłuż grubości w teorii ośrodka Cosseratów. W związku z tym podano poniżej postulaty, jakie powinny spełniać równania konstytutywne. Następnie zaprezentowano podstawowe informacje odnośnie ośrodka Cosseratów. Ponadto, w rozdziale zdefiniowano analizowany model powłoki FGM i omówiono metody określania efektywnych parametrów materiałowych w warstwie. Równania konstytutywne powłok FGM wyznaczono w wyniku analitycznego całkowania wzdłuż grubości PSN ośrodka Cosseratów. Związki konstytutywne określono niezależnie względem środkowej oraz neutralnej powierzchni odniesienia. W rozdziale podano również prawo konstytutywne materiału liniowo-sprężystego, wykorzystane w rozdziale szóstym w testach elementów skończonych.

Równania konstytutywne opisują w mechanice ośrodków ciągłych (MOC) związki między składowymi tensora odkształceń i składowymi tensora naprężeń. Zatem umożliwiają one uwzględnienie wpływu właściwości materiałowych na rozwiązanie problemu brzegowego oraz uzupełniają bilans równań MOC, wyrównując liczbę niewiadomych i danych. W ramach mechaniki kontinuum związki konstytutywne najczęściej formułuje się na poziomie makro w wyniku pewnego uśrednienia opisu mikroskopowego. Ze względu na bardzo dużą różnorodność materiałów występujących w przyrodzie równania konstytutywne nie mają charakteru uniwersalnego w przeciwieństwie do równań równowagi czy zasad zachowania.

#### 4.1.1. Postulaty

W literaturze zob. [351] uznaje się, że fundamenty współczesnego modelu matematycznego materiału w mechanice kontinuum stworzył Walter Noll w 1958 roku. W pracy [232] sformułował on dwa podstawowe postulaty, które powinny spełniać równania konstytutywne w ich ogólnej postaci dla ruchu  $\vartheta$  i pola naprężeń  $S$ :

- postulat obiektywności materiałowej: jeśli reprezentacja  $\{\vartheta, S\}$  spełnia równania konstytutywne, to muszą być one również spełnione dla reprezentacji  $\{\vartheta', S'\}$  w dowolnym innym układzie odniesienia, zgodnie z tym postulatem właściwości materiałowe są niezależne od wyboru układu odniesienia;
- postulat determinizmu: pole naprężeń  $S$  pewnej cząstki ciała zależy jedynie od historii ruchu lokalnego otoczenia tej cząstki ciała.

Z tak zdefiniowanego postulatu determinizmu wydziela się w literaturze zob. np. [287, 351] postulat lokalności, zgodnie z którym stan naprężenia w pewnej cząstce ciała zależy jedynie od zmiennych niezależnych w pewnym niewielkim otoczeniu tej cząstki. Zatem ruch cząstek odległych od danej cząstki nie ma wpływu na jej stan naprężenia. Po wydzieleniu postulatu lokalności postulat determinizmu przyjmuje zwięzłą postać: że aktualny stan fizyczny ciała (np. pole naprężeń) zależy jedynie od historii stanu tego ciała, a nie od jego stanów przyszłych. Noll równania konstytutywne sformułował jako relację między ruchem i polem naprężeń. W niniejszej rozprawie są one formułowane dla powłoki jako związki pomiędzy odkształceniami i siłami przekrojowymi (uogólnionymi naprężeniami).

Postulat lokalności ma charakter ograniczający, gdyż istnieją materiały np. kryształy jonowe dla których nie jest on spełniony. Taki charakter ma również postulat obiektywności materiałowej, który może być spełniony tylko wtedy, gdy pola podlegające transformacji w trakcie zmiany układu odniesienia są polami obiektywnymi zob. [287]. Z tego powodu postulat ten był krytykowany za jego zbyt dużą restrykcyjność [226] oraz szeroko dyskutowany w literaturze zob. np. paragraf 5-ty w pracy [263] i cytowaną tam literaturę. Zatem w przeciwieństwie do zasad zachowania, które mają charakter ogólny, przedstawione powyżej reguły dla równań konstytutywnych dotyczą tylko pewnej klasy materiałów i dlatego są określane mianem postulatów. Przykładowo w teorii nielokalnej nie obowiązuje postulat lokalności. W ramach tej teorii dla danego punktu wybrane wielkości fizyczne np. odkształcenia uśredniają się z zastosowaniem funkcji wagowej ze skończonego otoczenia punktu, którego rozmiar zależy od długości charakterystycznej, zob. np. [34].

W pracy [351] poza trzema postulatami opisanymi powyżej sformułowano dodatkowe postulaty, które powinny być spełnione dla fizycznie ważnego modelu konstytutywnego, aby nie był on sprzeczny z równaniami równowagi bądź równaniami termodynamiki. Zgodnie z postulatem współobecności, zmienna niezależna występująca w jednym równaniu konstytutywnym powinna być obecna również w pozostałych równaniach konstytutywnych. Ewentualne pominięcie zmiennej w równaniu należy udowodnić np. przez pokazanie, że jej obecność jest sprzeczna z innymi prawami fizyki, por. [287]. Postulat ten stanowi istotną wskazówkę, że równania konstytutywne należy formułować w najbardziej ogólnej postaci i następnie dokonywać ewentualnych uproszczeń. W termodynamice kolejnym postulatem oryginalnie zaproponowanym w pracy [80] jest postulat uniwersalnej dyssypacji. Postulat ten stwierdza, że związki konstytutywne muszą spełniać zredukowaną nierówność dyssypacji dla wszystkich zmiennych niezależnych w ich dziedzinach. Ostatnim postulatem opisanym w [351] jest postulat symetrii materiałowej, zgodnie z którym symetria materiałowa pewnego ciała jest określona przez grupy symetrii punktów materialnych tego ciała. Pojęcie grupy symetrii wprowadził Noll w pracy [232], stosując nazwę grupa izotropii. Poszczególne rodzaje symetrii materiałowej mają odpowiednią interpretację fizyczną i z tego powodu postulat ten należy traktować jako wskazówkę przy formułowaniu równań konstytutywnych. W literaturze można znaleźć również inne postulaty, np. postulat zanikającej pamięci opisany w pracy [79].

#### 4.1.2. Przegląd literatury w ramach 6-parametrowej nieliniowej teorii powłok

Ze względu na bardzo obszerną literaturę poświęconą związkom konstytutywnym poniżej ograniczono się do przeglądu tego, co zostało dokonane w tym temacie w ramach 6-parametrowej nieliniowej teorii powłok. Równania konstytutywne dla liniowo-sprężystych powłok cienkich zostały zaproponowane w pracach [62, 70]. Model konstytutywny dla powłok gumopodobnych wykonanych z nieściśliwego materiału hipersprężystego został opisany w pracach [70, 214, 215]. Szczegółowe rozważania na temat równań konstytutywnych dla powłok hipersprężystych przeprowadzono w [67]. Natomiast w pracy [104] omówiono własności skalarnej funkcji gęstości energii sprężystej w ujęciu grup symetrii dla powłok wykonanych z różnych materiałów.

W ostatnich latach rozszerzono zakres równań konstytutywnych w ramach 6-parametrowej nieliniowej teorii powłok. W pracach [61, 76] przyrównano model Altenbacha i Eremeyeva [6] liniowo-sprężystej płyty Cosseratów z modelem konstytutywnym z pracy [70]. Na tej podstawie równania konstytutywne powłok liniowo-sprężystych uzyskały uogólnioną postać z dodatkowymi stałymi materiałowymi ośrodka Cosseratów. W pracy [46] zaproponowano sprężysto-plastyczne równania konstytutywne uzyskane w wyniku całkowania po grubości płaskiego stanu naprężeń (PSN) na powierzchni Cosseratów. Sposób implementacji algorytmu plastyczności w ramach 6-parametrowej nieliniowej teorii powłok został szczegółowo opisany w pracach [40, 41]. Wpływ stałych materiałowych ośrodka Cosseratów na wyniki został zbadany w zakresie sprężystym w [47] oraz w zakresie plastycznym w pracach [40, 41]. Równania konstytutywne powłok o funkcyjnej zmienności materiału wzdłuż grubości w zakresie sprężystym wyznaczono stosując tą samą procedurę całkowania po grubości PSN Cosseratów względem środkowej powierzchni odniesienia [90, 91] i neutralnej powierzchni odniesienia [45]. Wstępne wyniki analiz powłok FGM w zakresie plastycznym zaprezentowano w pracach [42–44].

Inną metodologię zastosowano do wyprowadzenia równań konstytutywnych w ramach podejścia równoważnej jednej warstwy dla powłok warstwowych. W pracach [64, 371] uogólniono równania konstytutywne ośrodka ortotropowego w PSN, wykorzystując jedynie 5 stałych fizycznych ortotropowego ośrodka Cauchy'ego. Następnie w ramach tego podejścia uogólnione zostały kryteria zniszczenia dla laminatów kompozytowych o niesymetrycznych miarach odkształceń [73, 313].

Równania konstytutywne zaproponowane w [70] wynikają z konsekwentnego pierwszego przybliżenia do energii odkształcenia [67]. Uwzględnienie drugiego przybliżenia funkcji gęstości energii odkształcenia pozwoliło na zaproponowanie nowych uściślonych równań konstytutywnych w układzie głównych krzywizn powłoki [265].



## 4.2. Materiał liniowo-sprężysty

Proces formułowania równań konstytutywnych w ramach 6-parametrowej nieliniowej teorii powłok został szczegółowo opisany np. w [67, 217]. W literaturze [152, 342] wykazano, że jednorodny, izotropowy materiał sprężysty jest także hipersprężysty, gdyż istnieje dla niego funkcja gęstości energii odkształcenia  $\Phi$ . W ramach konsekwentnego pierwszego przybliżenia do energii odkształcenia funkcja  $\Phi$  (3.30) przyjmuje postać

$$\Phi(\mathbf{E}, \mathbf{K}) = \frac{1}{2} \mathbf{E}^T \mathbf{C}_1 \mathbf{E} + \frac{1}{2} \mathbf{K}^T \mathbf{C}_2 \mathbf{K}, \quad (4.1)$$

gdzie  $\mathbf{C}_1$  i  $\mathbf{C}_2$  są macierzami sprężystości, a  $\mathbf{E}$  i  $\mathbf{K}$  są zdefiniowane w (3.9). Na podstawie funkcji  $\Phi$  możliwe jest wyznaczenie przekrojowych tensorów sił i momentów  $\mathbf{N}$  i  $\mathbf{M}$ , zob. zależności (3.31).

Zgodnie z pracą [70] jawna postać równań konstytutywnych (3.23) w ramach 6-parametrowej teorii powłok dla cienkich powłok liniowo-sprężystych jest następująca:

$$\begin{aligned} N^{11} &= C(\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22}) & M^{11} &= D(\kappa_{11} + \nu\kappa_{22}) \\ N^{22} &= C(\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{11}) & M^{22} &= D(\kappa_{22} + \nu\kappa_{11}) \\ N^{12} &= C(1-\nu)\varepsilon_{12} & M^{12} &= D(1-\nu)\kappa_{12} \\ N^{21} &= C(1-\nu)\varepsilon_{21} & M^{21} &= D(1-\nu)\kappa_{21} \\ Q^1 &= \frac{1}{2}\alpha_s C(1-\nu)\varepsilon_1 & M^1 &= \frac{1}{2}\alpha_t D(1-\nu)\kappa_1 \\ Q^2 &= \frac{1}{2}\alpha_s C(1-\nu)\varepsilon_2 & M^2 &= \frac{1}{2}\alpha_t D(1-\nu)\kappa_2 \end{aligned} \quad (4.2)$$

W powyższych związkach konstytutywnych wprowadzono oznaczenia  $C$  i  $D$  odpowiednio dla sztywności membranowej i zgięciowej:

$$C = \frac{Eh_0}{1-\nu^2}, \quad D = \frac{Eh_0^3}{12(1-\nu^2)}, \quad (4.3)$$

gdzie  $E$  oznacza moduł Younga,  $\nu$  jest współczynnikiem Poissona, a  $h_0$  oznacza grubość powłoki w konfiguracji odniesienia. W równaniach (4.2) użyto korekcyjnego współczynnika ścinania  $\alpha_s$  oraz współczynnika owinięcia  $\alpha_t$ , który jest unikalnym współczynnikiem korekcyjnym, charakterystycznym dla stosowanej w niniejszej rozprawie teorii powłok. Związki konstytutywne (4.2) zastosowano w większości prac poświęconych teorii 6-parametrowej, zob. np. [62, 66, 67, 69, 70, 75, 77, 369–371].

W pracy [72] w wyniku przyjęcia na grubości powłoki kwadratowego i sześciennego rozkładu poprzecznych naprężeń ścinających, spełniającego warunki dane w pracy [18], wyznaczono analitycznie wartości współczynników  $\alpha_s$  i  $\alpha_t$ :

$$\alpha_s = \frac{5}{6}, \quad \alpha_t = \frac{7}{10}. \quad (4.4)$$

Powyższe wartości współczynników nie zależą od grubości i geometrii powłoki, symetrii materiału oraz przyjęcia hipotez kinematycznych. Przegląd różnych metod określania współczynnika ścinania zaprezentowano w pracy [169]. Wartość współczynnika ścinania  $\alpha_s = 5/6$  jest często przyjmowana w literaturze dla powłok, zob. np. [163]. Jednak wartość ta została wyznaczona przy założeniu, że powłoka jest jednorodna na grubości, dlatego w paragrafie 4.5 niniejszej pracy opisano sposób obliczenia korekcyjnego współczynnika ścinania dla powłok o niejednorodnej strukturze na grubości.

Wartość współczynnika owinięcia  $\alpha_t = 0.7$  została po raz pierwszy zaproponowana przez Pietraszkiewicza [257] i następnie wyprowadzona w pracy [18]. Jednak w literaturze można znaleźć również inne wartości i oszacowania  $\alpha_t$ . W pracy [227] Naghdi użył wartości  $7/20$ , natomiast w pracach [62, 67, 70] pokazano numerycznie, że dla  $\alpha_t < 1$  współczynnik owinięcia ma bardzo ograniczony wpływ na wyniki analiz MES. Z przyrównania równań (4.2) dla momentów owinięcia  $M^1$ ,  $M^2$  z odpowiadającymi im równaniami w modelu Altenbacha i Eremeyeva [6] uzyskano w pracy [78] następujące oszacowanie  $\alpha_t$

$$\alpha_t = \frac{2-\nu}{1-\nu}. \quad (4.5)$$

Przyjmując, że współczynnik Poissona  $\nu \in [0, 0.5]$  z równania (4.5) uzyskuje się zakres zmienności współczynnika owinięcia  $\alpha, \in [2, 3]$ . Jednak oszacowanie to otrzymano na podstawie mocnego założenia o równoważności dwóch modeli konstytutywnych i dlatego nie może być traktowane jako ścisłe.

### 4.3. Równania konstytutywne dla liniowego ośrodka Cosseratów

#### 4.3.1. Przegląd literatury

W literaturze, zob. np. [105, 235], powszechnie uznaje się, że fundamenty nieliniowej teorii niesymetrycznej sprężystości opracowali bracia Cosseratowie [82]. W teorii ośrodka Cosseratów punkty uzyskały orientację, a deformacja ciała jest opisana nie tylko przez wektor przemieszczeń  $\mathbf{u}$ , ale również przez niezależny od niego wektor obrotu  $\boldsymbol{\varphi}$ . Wskutek tych założeń tensory odkształceń i naprężeń są niesymetryczne, a na ściankach różniczkowego elementu prostopadłościennego występują również naprężenia momentowe. Teoria ośrodka Cosseratów początkowo nie została doceniona i dopiero w latach 50-tych XX wieku wzbudziła szersze zainteresowanie badaczy. Na początku większość prac, zob. np. [235, 339, 343], skupiała się na tzw. pseudo-kontinuum Cosseratów, w którym deformacja jest opisana jedynie przez niezależny wektor przemieszczeń. Natomiast do ważniejszych prac poświęconych właściwej teorii ośrodka Cosseratów (mikropolarnej) zalicza się [85, 105, 108, 109, 174, 340]. Równania konstytutywne dla liniowo-sprężystego ośrodka Cosseratów zostały zaproponowane po raz pierwszy w pracach [106, 234]. Jednak Cowin [84] zwrócił uwagę, że Eringen w swojej pracy użył nieprawidłowej nierówności dla modułu ścinania i opisał wynikające z tego konsekwencje. Zestawienie notacji użytych we wcześniejszych pracach oraz stałych materiałowych ośrodka Cosseratów zamieszczono m.in. w pracach [85, 144, 371]. Fundamenty teorii mikropolarnej zostały kompleksowo opisane m.in. w książkach [103, 107]. Natomiast szerszy przegląd literatury poświęconej teorii Cosseratów można znaleźć w pracach [7, 144, 230, 371].

Prawa konstytutywne sformułowane w ramach teorii ośrodka Cosseratów są wykorzystywane do modelowania m.in. materiałów granulowanych [243, 346], skał [39, 324], konstrukcji murowych [244, 319] oraz ośrodków warstwowych [31, 94]. Specjalne związki konstytutywne zostały sformułowane dla polikryształów [118], materiałów kompozytowych [119, 120] oraz materiałów porowatych i wielofazowych [284, 336]. Ośrodek Cosseratów jest również wykorzystywany w biomechanice do modelowania kości [111, 133] i innych tkanek posiadających mikrostrukturę [289, 292]. Szerszy przegląd prac poświęconych modelowaniu płyt, powłok i brył w ramach teorii mikropolarnej został zamieszczony w pracy [7].

Zastosowanie ośrodka Cosseratów w MES pozwoliło na prawidłowe wymodelowanie pewnych zjawisk, dla których zastosowanie klasycznego ośrodka Cauchy'ego prowadzi do niewłaściwych wyników. W pracach [35, 36, 335] pokazano, że w przypadku analiz sprężysto-plastycznych materiału z osłabieniem implementacja ośrodka Cosseratów pozwoliła zminimalizować problem lokalizacji odkształceń postaciowych oraz problem wpływu dyskretyzacji na wyniki. Wykorzystanie elementów skończonych sformułowanych na podstawie teorii mikropolarnej [279] ułatwia modelowanie ośrodków warstwowych szczególnie w geotechnice, np. modelowanie wydobywania i stabilności bloków skalnych [88]. Zastosowanie teorii ośrodka Cosseratów pozwala również na efektywne modelowanie uplastycznienia ze zniszczeniem w konstrukcjach murowych [4, 55]. W pracy [341] pokazano, że dla tego typu konstrukcji teoria mikropolarna pozwala na dokładniejsze wymodelowanie deformacji niż klasyczny ośrodek Cauchy'ego. Ponadto w ośrodku Cosseratów w naturalny sposób można uwzględnić efekt skali [30, 285], występujący dla pewnej klasy materiałów niejednorodnych.

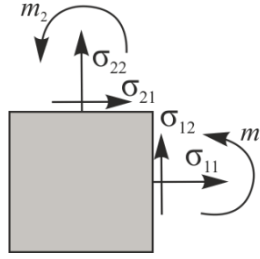
#### 4.3.2. Płaski stan naprężeń liniowego ośrodka Cosseratów

Sprężyste równania konstytutywne w ramach 6-parametrowej teorii powłok uzyskane w wyniku całkowania po grubości PSN na powierzchni Cosseratów zostały szczegółowo opisane w pracach [40, 47]. Poniżej omówiono przyjęte założenia oraz najważniejsze etapy wyprowadzenia tych równań wykorzystane w dalszej części rozdziału.

W celu sformułowania równań konstytutywnych zakłada się w warstwie powłoki płaski stan naprężenia w ośrodku Cosseratów, zob. np. [36]. W związku z tym, w każdej warstwie definiuje się wektor odkształceń  $\mathbf{e}$  i odpowiadający mu wektor naprężeń  $\boldsymbol{\sigma}$  w postaci

$$\mathbf{e}^T = \{\mathbf{e}_m \mid \mathbf{e}_d\} = \{e_{11} \ e_{22} \ e_{12} \ e_{21} \mid k_1 \ k_2\}, \quad \boldsymbol{\sigma}^T = \{\boldsymbol{\sigma}_m \mid \boldsymbol{\sigma}_d\} = \{\sigma_{11} \ \sigma_{22} \ \sigma_{12} \ \sigma_{21} \mid m_1 \ m_2\}. \quad (4.6)$$

Składowe wektora naprężeń na powierzchni Cosseratów zostały zaprezentowane na rys. 4.1.



Rys. 4.1. Składowe wektora naprężeń w płaskim stanie naprężenia Cosseratów

Zależność konstytutywną pomiędzy wektorami  $\boldsymbol{\sigma}$  i  $\mathbf{e}$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}_{cs} \mathbf{e}, \quad (4.7)$$

w PSN Cosseratów wyraża się za pomocą następującej macierzy

$$\mathbf{C}_{cs} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{mm} & \mathbf{C}_{md} \\ \mathbf{C}_{dm} & \mathbf{C}_{dd} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ea_1 & Ea_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ Ea_2 & Ea_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G\mu_1 & G\mu_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G\mu_2 & G\mu_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2Gl^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2Gl^2 \end{bmatrix}, \quad (4.8)$$

gdzie za pomocą  $G$  oznaczono moduł Kirchhoffa,  $a_1 = \frac{1}{1-\nu^2}$ ,  $a_2 = \nu a_1$ ,  $\mu_1 = \frac{1}{1-N^2}$ ,  $\mu_2 = \frac{1-2N^2}{1-N^2}$ .

W sformułowaniu wprowadza się dwie stałe ośrodka Cosseratów: długość charakterystyczną  $l$  oraz tzw. „Cosserat coupling number”  $N$ . Stałą  $l$  wprowadza się za pracą [36] i można ją wyrazić za pomocą długości charakterystycznej dla zginania  $l_b$  oraz dla skręcania  $l_t$ , (zob. [40])

$$l^2 = \frac{l_t^4 - 4l_b^2 l_t^2}{l_t^2 - 2l_b^2}. \quad (4.9)$$

Natomiast stałą  $N$  można wyznaczyć z następującego wzoru [170]

$$N^2 = \frac{G_c}{G_c + G}, \quad 0 \leq N \leq 1, \quad (4.10)$$

gdzie  $G_c$  oznacza dodatkowy moduł ścinania (rotacji). W przypadku założenia równoważności ośrodka Cauchy’ego i ośrodka Cosseratów uzyskuje się tożsamość  $G_c = G$ .

### 4.3.3. Równania konstytutywne

W niniejszej rozprawie dla włókna powłoki przyjmuje się założenia kinematyczne Reissnera-Mindlina. Zatem związek między odkształceniami membranowymi w dowolnej warstwie powłoki  $\mathbf{e}_m$ , a uogólnionymi odkształceniami na powierzchni odniesienia  $\boldsymbol{\varepsilon}$  jest następujący

$$\mathbf{e}_m = \boldsymbol{\varepsilon}_m + \zeta \boldsymbol{\varepsilon}_b, \quad \zeta \in [-h^-, h^+]. \quad (4.11)$$

Ponadto zakłada się stałą wartość odkształceń związanych z owinięciem na grubości powłoki

$$\mathbf{e}_d = \boldsymbol{\varepsilon}_d, \quad (4.12)$$

choć w pracy [265] pokazano, że istnieje pewna zależność między momentami owinięcia i odkształceniami membranowymi.

Wektory sił i momentów przekrojowych (3.13) uzyskuje się w wyniku całkowania po grubości odpowiednich naprężeń, zgodnie ze wzorami:

$$\mathbf{s}_m = \int_{-h^-}^{h^+} \boldsymbol{\sigma}_m d\zeta, \quad \mathbf{s}_b = \int_{-h^-}^{h^+} \zeta \boldsymbol{\sigma}_m d\zeta, \quad \mathbf{s}_d = \int_{-h^-}^{h^+} \boldsymbol{\sigma}_d d\zeta. \quad (4.13)$$

W całkach (4.13) założono, że wyznacznik z tensora przeniesienia  $\mu = 1$  (zob. (2.15)), co jest uzasadnione dla powłok cienkich i o małej krzywiznie. Natomiast siły przekrojowe dla ścinania poprzecznego wyznacza się na podstawie zależności

$$\mathbf{s}_s = \begin{bmatrix} \alpha_s G h_0 & 0 \\ 0 & \alpha_s G h_0 \end{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_s. \quad (4.14)$$

Uogólnione naprężenia uzyskane w wyniku całkowania po grubości PSN Cosseratów zostały zamieszczone w tab. 4.1 i porównane z tymi danymi wzorem (4.2).

Tabela 4.1. Porównanie równań konstytutywnych uzyskanych w wyniku całkowania po grubości PSN Cosseratów z równaniami dla ośrodka Cauchy'ego danymi wzorem (4.2)

Uogólnione naprężenia	Równania z prac [40, 47]	Równania z prac [62, 70]
$N^{11} =$	$C(\varepsilon_{11} + \nu \varepsilon_{22})$	$C(\varepsilon_{11} + \nu \varepsilon_{22})$
$N^{22} =$	$C(\varepsilon_{22} + \nu \varepsilon_{11})$	$C(\varepsilon_{22} + \nu \varepsilon_{11})$
$N^{12} =$	$\frac{C(1-\nu)}{2(1-N^2)} [\varepsilon_{12} + (1-2N^2)\varepsilon_{21}]$	$C(1-\nu)\varepsilon_{12}$
$N^{21} =$	$\frac{C(1-\nu)}{2(1-N^2)} [\varepsilon_{21} + (1-2N^2)\varepsilon_{12}]$	$C(1-\nu)\varepsilon_{21}$
$Q^1 =$	$\frac{1}{2} \alpha_s C(1-\nu)\varepsilon_1$	$\frac{1}{2} \alpha_s C(1-\nu)\varepsilon_1$
$Q^2 =$	$\frac{1}{2} \alpha_s C(1-\nu)\varepsilon_2$	$\frac{1}{2} \alpha_s C(1-\nu)\varepsilon_2$
$M^{11} =$	$D(\kappa_{11} + \nu \kappa_{22})$	$D(\kappa_{11} + \nu \kappa_{22})$
$M^{22} =$	$D(\kappa_{22} + \nu \kappa_{11})$	$D(\kappa_{22} + \nu \kappa_{11})$
$M^{12} =$	$\frac{D(1-\nu)}{2(1-N^2)} [\kappa_{12} + (1-2N^2)\kappa_{21}]$	$D(1-\nu)\kappa_{12}$
$M^{21} =$	$\frac{D(1-\nu)}{2(1-N^2)} [\kappa_{21} + (1-2N^2)\kappa_{12}]$	$D(1-\nu)\kappa_{21}$
$M^1 =$	$l^2 C(1-\nu)\kappa_1$	$\frac{1}{2} \alpha_t D(1-\nu)\kappa_1$
$M^2 =$	$l^2 C(1-\nu)\kappa_2$	$\frac{1}{2} \alpha_t D(1-\nu)\kappa_2$

Związki konstytutywne zestawione w tab. 4.1 są równoważne, jeśli stałe ośrodka Cosseratów spełniają następujące warunki

$$N = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad l = \sqrt{\frac{\alpha_t}{24}} h_0. \quad (4.15)$$

Powyższy związek dla współczynnika korekcyjnego  $\alpha_t$  można przekształcić do następującej postaci

$$\alpha_t = 24(l/h_0)^2, \quad (4.16)$$

na podstawie której  $\alpha_i$  można interpretować jako stałą związaną z długością charakterystyczną. Tabela 4.1 pokazuje, że gdyby równania konstytutywne dla momentów owinięcia przyjęto w postaci  $M^\alpha = \beta_i C(1-\nu)\kappa_\alpha$ , to współczynnik  $\beta_i$  zależałby jedynie od długości charakterystycznej. Zatem  $\beta_i$  można byłoby interpretować jako stałą materiałową, co w przypadku  $\alpha_i$  budzi pewne wątpliwości, gdyż jest wielkością bezwymiarową, zob. np. [98]. W pracy [47] zwrócono uwagę, że macierz konstytutywna wyrażona przez związki dane w tab. 4.1 dla  $N = 0$  i  $N = 1$  staje się osobliwa. Zatem w ramach nieliniowej 6-parametrowej teorii powłok stała  $N$  może przyjmować wartości tylko z przedziału  $(0,1)$ .

#### 4.3.4. Identyfikacja stałych materiałowych ośrodka Cosseratów

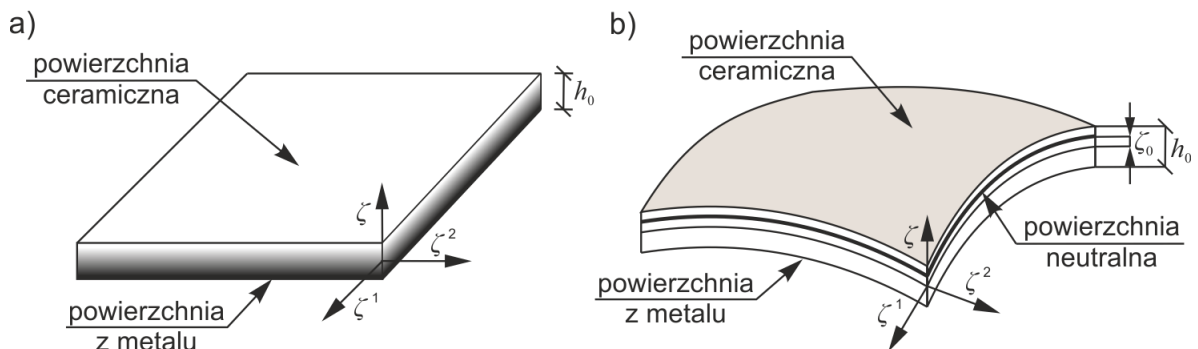
Głównym czynnikiem, który w znaczący sposób ogranicza obszary zastosowania ośrodka Cosseratów są problemy z wyznaczeniem dodatkowych stałych materiałowych dla tego ośrodka. Wobec braku zidentyfikowania tych stałych dla wielu rodzajów materiałów przyjmuje się je dowolnie lub stosując analizę parametryczną zob. np. [46, 228]. Dla ciał o strukturze kratowej możliwe jest wyznaczenie parametrów ośrodka Cosseratów na podstawie rozważań teoretycznych [133, 147]. Natomiast długość charakterystyczną dla ośrodków gruntowych można przyjmować jako średnią średnicę ziaren (zob. np. [34]), gdyż dodatkowe obrotowe stopnie swobody można interpretować jako obroty ziaren.

Pierwsze doświadczalne próby identyfikacji stałych ośrodka Cosseratów dla metali pokazały, że dla materiałów jednorodnych trudno jest zaobserwować efekty przewidziane przez teorię mikropolarną i wyznaczyć dodatkowe stałe materiałowe [100]. W związku z tym począwszy od lat 70-tych skupiono się na testach doświadczalnych materiałów posiadających mikrostrukturę np. kości, pianek polimerowych i pianek metalicznych. Testy te zostały opisane m.in. w pracach [144, 198, 199]. W celu identyfikacji stałych ośrodka Cosseratów najczęściej badano wpływ efektu skali na sztywność zgięciową i skrętną prętów o przekroju kołowym i prostokątnym. W badaniach eksperymentalnych mierzono również dyspersję fal oraz rozkład odkształceń w sąsiedztwie karbu. W ostatnich latach długość charakterystyczna i stała  $N$  zostały zidentyfikowane dla płaskich próbek z otworami o różnym kształcie [30, 219, 353]. Wyznaczone dotychczas stałe materiałowe ośrodka Cosseratów dla 4 różnych materiałów zostały zestawione w pracy [144]. Jednak bardzo ograniczona liczba materiałów oraz częściowa niekompletność stałych pokazują, że temat identyfikacji stałych ośrodka mikropolarnego wymaga wciąż dalszych intensywnych badań. Wyniki najnowszych badań doświadczalnych zostały zaprezentowane w pracach [285, 286].

### 4.4. Powłoki o funkcyjnej zmienności materiału wzdłuż grubości – informacje wstępne

#### 4.4.1. Rozkład materiału wzdłuż grubości

W niniejszej rozprawie dalsze rozważania ogranicza się do powłok o funkcyjnej zmienności materiału wzdłuż grubości zbudowanych z dwóch składowych materiałów. W takich powłokach struktura, skład i właściwości materiałowe zmieniają się w sposób ciągły na grubości powłoki. Na rys. 4.2 zaprezentowano zazwyczaj analizowany w literaturze rodzaj powłok FGM o górnej powierzchni wykonanej z materiału ceramicznego oraz dolnej powierzchni z metalu. Takie połączenie pozwala uzyskać powłokę o dużej wytrzymałości mechanicznej oraz odporności na działanie wysokich temperatur.



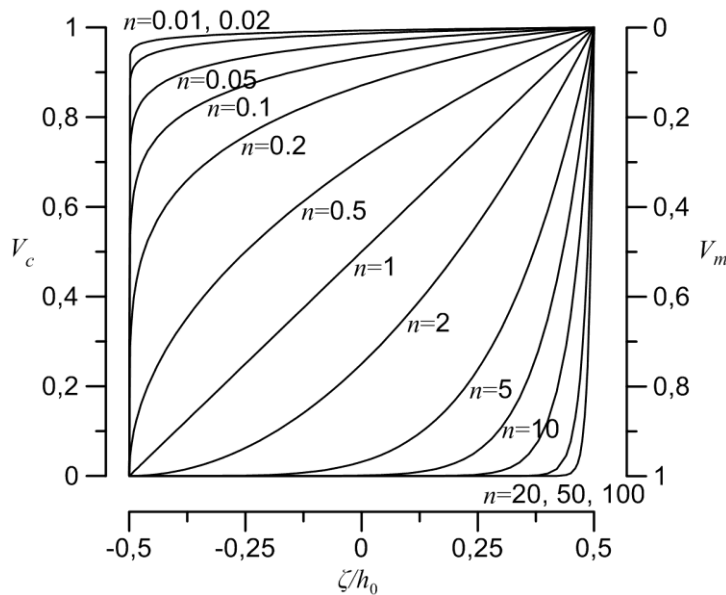
Rys. 4.2. Typ powłok FGM analizowanych w rozprawie, a) płyta wykonana z ceramiki i metalu, b) definicja powierzchni neutralnej dla zakrzywionej powłoki FGM

Równania zaprezentowane w dalszej części rozdziału wyprowadzono dla powłok z ceramiki i metalu, jednak można je zastosować również dla powłok wykonanych z dwóch innych materiałów.

W celu opisu analitycznego powłok FGM zakłada się, że zmienność zawartości objętościowej ceramiki  $V_c$  i metalu  $V_m$  wzdłuż grubości można opisać za pomocą funkcji potęgowej

$$V_c = \left( \frac{\zeta}{h_0} + \frac{1}{2} \right)^n, \quad V_m = 1 - V_c, \quad n \geq 0, \quad \zeta \in \left[ -\frac{1}{2}h_0, \frac{1}{2}h_0 \right], \quad (4.17)$$

gdzie  $n$  jest wykładnikiem potęgi, a  $\zeta$  współrzędną wzdłuż grubości względem powierzchni środkowej powłoki. W przypadkach granicznych: dla  $n = 0$  uzyskuje się powłokę jednorodną ceramiczną, a dla  $n = \infty$  powłokę jednorodną z metalu. Wpływ wykładnika  $n$  na rozkład zawartości składowych materiałów wzdłuż grubości zaprezentowano na rys. 4.3. W niektórych pracach, zob. np. [5, 58, 59, 143] zmienność materiału wzdłuż grubości opisano za pomocą innych funkcji: eksponentyjnej oraz sigmoidalnej.



Rys. 4.3. Rozkład zawartości objętościowej ceramiki  $V_c$  i metalu  $V_m$  na grubości powłoki w zależności od wartości wykładnika  $n$  w prawie potęgowym

#### 4.4.2. Metody określania efektywnych parametrów materiałowych

W związku z tym, że powłoki FGM powstają w wyniku wymieszania cząsteczek różnych składowych materiałów, to w celu wymodelowania tego typu powłok konieczne jest określenie w dowolnym punkcie wzdłuż grubości efektywnych parametrów materiałowych. Różne modele i oszacowania pozwalające na wyznaczenie tych parametrów zostały omówione m.in. w [201, 301]. Poniżej przedstawiono najczęściej stosowane w literaturze metody wyznaczania efektywnych właściwości materiałowych w warstwie  $P(\zeta)$  dla powłok FGM wykonanych z materiału ceramicznego i metalu.

Zgodnie z klasyczną zasadą mieszanin [201] parametry  $P(\zeta)$  powłoki, np. moduł Younga  $E$ , współczynnik Poissona  $\nu$ , moduł Kirchhoffa  $G$ , gęstość  $\rho$ , oblicza się jako średnią ważoną parametrów  $P_c$  ceramiki i parametrów  $P_m$  metalu

$$P(\zeta) = V_c(\zeta)P_c + V_m(\zeta)P_m. \quad (4.18)$$

Wzór (4.18) zaproponowany został na podstawie modelu Voigta [321], w którym zakłada się, że w punkcie powłoki występują takie same odkształcenia w obu składowych materiałach. Zatem model ten odpowiada połączeniu równoległemu składowych materiałów i jest używany do wyznaczania sztywności wzdłuż włókien dla laminatów wzmocnionych włóknami. Do określania właściwości w poprzek włókien stosuje się model Reussa [321], odpowiadający szeregowemu połączeniu składowych materiałów, w których występują jednakowe naprężenia. Zgodnie z modelem Reussa parametry materiałowe w dowolnym punkcie wzdłuż grubości powłoki FGM można wyznaczyć ze wzoru

$$P(\zeta) = \left( \frac{V_c(\zeta)}{P_c} + \frac{V_m(\zeta)}{P_m} \right)^{-1}. \quad (4.19)$$

Główną zaletą zasady mieszanin jest bardzo prosta postać wzorów (4.18) i (4.19). Przegląd literatury wskazuje na to, że wzór (4.18) jest przyjmowany w większości prac poświęconych analizie powłok FGM w zakresie sprężystym. Jednak ze względu na przyjęte założenia, wzory te pozwalają tylko w przybliżony sposób oszacować efektywne parametry w warstwie powłoki FGM.

W celu dokładniejszego opisu efektywnych właściwości materiału FGM w pracy [331] została zaproponowana zmodyfikowana zasada mieszanin, określana też jako model Tamura-Tomota-Ozawa (TTO). W zasadzie tej wprowadza się dodatkową stałą materiałową  $q$ , która określa stosunek różnicy naprężeń pomiędzy składowymi materiałami do różnicy odkształceń między tymi materiałami

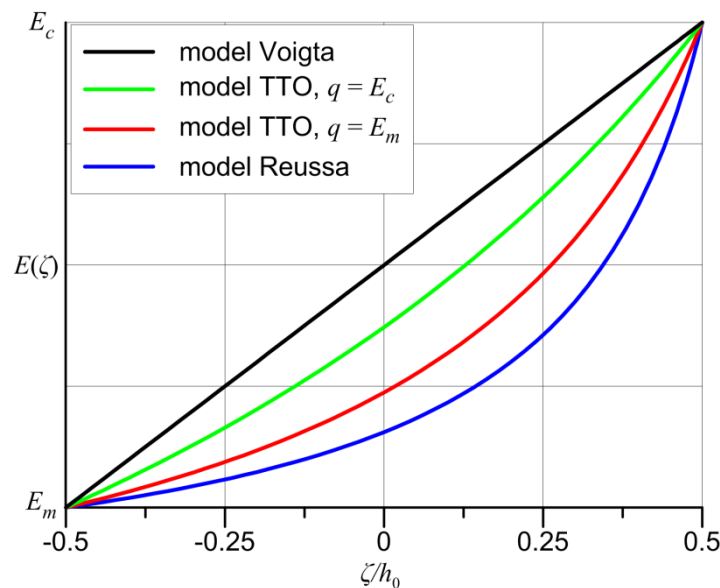
$$q = \frac{\sigma_c - \sigma_m}{|\varepsilon_c - \varepsilon_m|}, \quad 0 \leq q \leq \infty. \quad (4.20)$$

W pracach [116, 139, 229] opisano różne procedury identyfikacji parametru  $q$ , np. w ramach analizy odwrotnej. W modelu TTO moduł Younga w warstwie powłoki FGM wyznacza się z następującego wzoru

$$E(\zeta) = \left( \frac{q + E_c}{q + E_m} E_m V_m(\zeta) + E_c V_c(\zeta) \right) / \left( \frac{q + E_c}{q + E_m} V_m(\zeta) + V_c(\zeta) \right), \quad (4.21)$$

który dla  $q = 0$  upraszcza się do (4.19) tj. modelu Reussa, a dla  $q = \infty$  do (4.18) czyli modelu Voigta. Zmodyfikowaną zasadę mieszanin zaproponowano z myślą o dwufazowych mieszaninach, w których jedna faza jest sprężysta, a druga plastyczna. W związku z tym pozwala ona dobrze opisać powłokę FGM wykonaną ze sprężysto-plastycznego metalu i kruchej ceramiki. Z tego powodu w analizie sprężysto-plastycznej powłok o funkcyjnej zmienności materiału wzdłuż grubości najczęściej wykorzystuje się model TTO, zob. np. prace [173, 175, 181, 381]. Główną wadą zmodyfikowanej zasady mieszanin jest trudność w określeniu dodatkowej stałej materiałowej  $q$ .

Na rys. 4.4 dla wykładnika  $n = 1$  porównano jak zmienia się wartość modułu Younga na grubości powłoki FGM dla różnych modeli pozwalających określić efektywne parametry materiałowe. Na rys. 4.4. pokazano również, że model Voigta i model Reussa dają odpowiednio górne i dolne oszacowanie wartości  $E(\zeta)$ , podczas gdy model TTO pozwala uzyskać krzywe pośrednie. Na górnej i dolnej powierzchni powłoki wszystkie modele dają tę samą wartość modułu Younga, odpowiadającą wartości dla materiału jednorodnego. Wybór odpowiedniego modelu ma szczególne znaczenie dla powłok FGM charakteryzujących się dużą różnicą w sztywności między materiałem ceramicznym i metalem.



Rys. 4.4. Wpływ zastosowanego modelu na rozkład efektywnego modułu Younga na grubości powłoki dla  $n = 1$

Z pozostałych modeli opisanych w literaturze dla dwufazowych powłok FGM warto zwrócić uwagę na oszacowanie Hilla [150], które wymaga jednak rozwiązania układu równań nieliniowych oraz oszacowanie Mori-Tanaki [222], które może być stosowane jedynie w analizie sprężystej. W modelach Hilla i Mori-Tanaki zakłada się kształt inkluzji jednego materiału w macierzy drugiego, dzięki czemu modele te mają większe uzasadnienie fizyczne od omówionych powyżej zasad mieszanin. Efektywne parametry materiałowe powłoki FGM zależą głównie od mikrostruktury materiału, dlatego zastosowanie ośrodka Cosseratów stwarza możliwość bardziej wiarygodnego określenia tych parametrów na poziomie warstwy powłoki.

#### 4.5. Współczynnik korekcyjny ścinania dla powłok FGM

W niniejszej rozprawie do opisu ścinania poprzecznego stosuje się teorię ścinania pierwszego rzędu zob. np. [187]. W ramach tej teorii ważną rolę odgrywa korekcyjny współczynnik ścinania  $\alpha_s$ , który dla belek wyprowadzono m.in. w pracy [86], a dla powłok jednorodnych jest dany wzorem (4.4). W przypadku powłok FGM rozkład poprzecznych naprężeń ścinających nie jest symetryczną parabolą i dlatego wartość współczynnika  $\alpha_s = 5/6$  jest niewłaściwa. Metoda wyznaczania korekcyjnego współczynnika ścinania dla powłok warstwowych poddanych cylindrycznemu zginaniu została opisana m.in. w [288, 347]. Analogiczna metoda została zastosowana dla powłok FGM w pracach [231, 311]. Poniżej opisano sposób wyznaczenia współczynnika  $\alpha_s$  zastosowany w niniejszej rozprawie.

W wyprowadzeniu zakłada się stan cylindrycznego zginania powłoki i pomija wpływ krzywizny, przyjmując  $\mu = 1$ . Wtedy na podstawie lokalnych równań równowagi poprzeczne naprężenia ścinające w warstwie powłoki można wyrazić wzorem

$$\tau_{\alpha 3}(\zeta) = \frac{Q^\alpha}{D_{FGM}^n} f(\zeta), \quad (4.22)$$

gdzie  $Q^\alpha$  to przekrojowe siły tnące zob. (3.13), a za pomocą  $D_{FGM}^n$  oznaczono sztywność powłoki FGM na zginanie określoną względem neutralnej powierzchni odniesienia

$$D_{FGM}^n = \int_{-h_0/2}^{h_0/2} C_w(\zeta) (\zeta - \zeta_0)^2 d\zeta, \quad C_w(\zeta) = \frac{E(\zeta)}{1-\nu^2}. \quad (4.23)$$

We wzorze (4.23)  $C_w(\zeta)$  wyraża sztywność membranową warstwy powłoki, a  $\zeta_0$  określa położenie powierzchni neutralnej względem powierzchni środkowej (rys. 4.2b) i można ją wyznaczyć ze wzoru

$$\zeta_0 = \frac{\int_{-h_0/2}^{h_0/2} \zeta E(\zeta) d\zeta}{\int_{-h_0/2}^{h_0/2} E(\zeta) d\zeta}. \quad (4.24)$$

Natomiast funkcja  $f(\zeta)$  w zależności (4.22) opisuje rozkład poprzecznych naprężeń ścinających na grubości powłoki

$$f(\zeta) = \int_{-h_0/2}^{\zeta} C_w(z) (z - \zeta_0) dz. \quad (4.25)$$

Energię odkształcenia postaciowego przypadającą na jednostkę powierzchni odniesienia powłoki można wyrazić wzorem

$$U_\alpha = \frac{1}{2} \int_{-h_0/2}^{h_0/2} \tau_{\alpha 3}(\zeta) \gamma_{\alpha 3}(\zeta) d\zeta, \quad (4.26)$$

gdzie  $\gamma_{\alpha 3}$  jest odkształceniem postaciowym w dowolnym punkcie przekroju powłoki. Zatem na powierzchni odniesienia zachodzi  $\gamma_{\alpha 3} \equiv \varepsilon_\alpha$ , por. (3.12). Wartość  $\gamma_{\alpha 3}$  w dowolnej warstwie powłoki można wyznaczyć na podstawie poprzecznych naprężeń ścinających



$$\gamma_{\alpha 3}(\zeta) = \frac{\tau_{\alpha 3}(\zeta)}{G(\zeta)}. \quad (4.27)$$

W wyniku podstawienia (4.22) i (4.27) do wzoru (4.26) uzyskuje się zależność

$$U_\alpha = \frac{1}{2} \int_{-h_0/2}^{h_0/2} \frac{\tau_{\alpha 3}^2(\zeta)}{G(\zeta)} d\zeta = \frac{1}{2} \left( \frac{Q^\alpha}{D_{FGM}^n} \right)^2 \int_{-h_0/2}^{h_0/2} \frac{[f(\zeta)]^2}{G(\zeta)} d\zeta. \quad (4.28)$$

Definiując uśrednione na grubości powłoki odkształcenia postaciowe  $\bar{\gamma}_{\alpha 3}$  i uśredniony moduł Kirchhoffa  $\bar{G}$  w następujący sposób:

$$\bar{\gamma}_{\alpha 3} = \frac{Q^\alpha}{\alpha_s \bar{G}}, \quad \bar{G} = \int_{-h_0/2}^{h_0/2} G(\zeta) d\zeta, \quad (4.29)$$

energię odkształcenia postaciowego na jednostkę powierzchni odniesienia powłoki można wyrazić również jako pracę przekrojowej siły tnącej na uśrednionym stałym odkształceniu postaciowym

$$U_\alpha = \frac{1}{2} Q^\alpha \bar{\gamma}_{\alpha 3} = \frac{(Q^\alpha)^2}{2\alpha_s \bar{G}}. \quad (4.30)$$

Z przyrównania dwóch wzorów wyrażających energię odkształcenia postaciowego (4.28) i (4.30) uzyskuje się zależność pozwalającą wyznaczyć korekcyjny współczynnik ścinania

$$\alpha_s = \frac{(D_{FGM}^n)^2}{\bar{G} \int_{-h_0/2}^{h_0/2} \frac{[f(\zeta)]^2}{G(\zeta)} d\zeta} = \frac{\left( \int_{-h_0/2}^{h_0/2} C_w(\zeta) (\zeta - \zeta_0)^2 d\zeta \right)^2}{\int_{-h_0/2}^{h_0/2} G(\zeta) d\zeta \cdot \int_{-h_0/2}^{h_0/2} \frac{[f(\zeta)]^2}{G(\zeta)} d\zeta}. \quad (4.31)$$

Wartość  $\alpha_s$  dla dowolnego rozkładu materiału na grubości powłoki można wyznaczyć w wyniku całkowania numerycznego. W przypadku całkowania numerycznego wzdłuż grubości, można zastosować kwadraturę Gaussa-Legendre'a lub kwadraturę Gaussa-Lobatto-Legendre'a, które zostały omówione w Dodatku C.1.

W podrozdziałach 4.6 i 4.7 zakłada się, że moduł Younga i moduł Kirchhoffa dla warstwy powłoki FGM określa się na podstawie klasycznej zasady mieszanin (4.18), którą można zapisać w następującej postaci

$$P(\zeta) = P_r \left( \frac{\zeta}{h_0} + \frac{1}{2} \right)^n + P_m, \quad P_r = P_c - P_m. \quad (4.32)$$

Dla takiego rozkładu właściwości materiałowych wzdłuż grubości powłoki możliwe jest analityczne wyznaczenie większości całek we wzorze (4.31). W Dodatku D zaprezentowano szczegółowe wyprowadzenie całek funkcji zawierających parametry materiałowe  $P(\zeta)$ . Na podstawie wzoru (D.19) całka (4.23) przyjmuje postać

$$D_{FGM}^n = \frac{(C_c - C_m) h_0^3}{(n+1)(n+2)} \left[ n \left( \frac{1}{2} - \frac{\zeta_0}{h_0} \right)^2 + 2 \left( \frac{\zeta_0}{h_0} \right)^2 + \frac{1-n}{2(n+3)} \right] + \frac{C_m h_0^3}{12} \left( 1 + 12 \frac{\zeta_0^2}{h_0^2} \right). \quad (4.33)$$

Natomiast uwzględnienie we wzorze (4.24) zależności (D.1) i (D.5) i wykonanie prostych przekształceń pozwala wyznaczyć  $\zeta_0$  ze wzoru

$$\zeta_0 = \frac{h_0}{2} \frac{n(E_c - E_m)}{(n+2)[E_c + nE_m]}. \quad (4.34)$$

Uśredniony moduł Kirchhoffa na podstawie wzoru (D.1) można wyrazić następująco

$$\bar{G} = \frac{(G_c - G_m)h_0}{n+1} + G_m h_0. \quad (4.35)$$

Tymczasem funkcję  $f(\zeta)$  wyznaczoną w Dodatku D, zob. wzór (D.23), można zapisać w postaci

$$f(\zeta) = C_m \left( \frac{\zeta^2}{2} - \zeta \zeta_0 \right) + C_1 (\zeta - \zeta_0) \left( \frac{\zeta}{h_0} + \frac{1}{2} \right)^{n+1} + C_2 \left( \frac{\zeta}{h_0} + \frac{1}{2} \right)^{n+2} + C_3, \quad (4.36)$$

gdzie:  $C_1 = \frac{C_r h_0}{n+1}$ ,  $C_2 = -\frac{C_r h_0^2}{(n+1)(n+2)}$ ,  $C_3 = -\frac{C_m}{2} \left( \frac{h_0^2}{4} + h_0 \zeta_0 \right)$ ,  $C_m = \frac{E_m}{1-\nu^2}$ ,  $C_r = \frac{E_c - E_m}{1-\nu^2}$ . Zatem

we wzorze (4.31) jedynie całka  $\int_{-h_0/2}^{h_0/2} \frac{[f(\zeta)]^2}{G(\zeta)} d\zeta$  została wyznaczona numerycznie, gdyż autorowi niniejszej rozprawy nie udało się jej wyznaczyć analitycznie.

## 4.6. Równania konstytutywne powłok FGM określone względem środkowej powierzchni odniesienia

### 4.6.1. Założenia

Równania konstytutywne dla powłok o funkcyjnej zmienności materiału wzdłuż grubości powłoki w ramach nieliniowej 6-parametrowej teorii powłok zostały zaproponowane w pracach [90, 91, 93] autora niniejszej rozprawy. W tych pracach macierz konstytutywna została wyznaczona względem środkowej powierzchni odniesienia dla powłoki wykonanej z materiału ceramicznego i metalu. W wyprowadzeniach przyjęto stałą wartość współczynnika Poissona  $\nu$ , gdyż w pracy [59] zaobserwowano niewielki wpływ uwzględnienia zmienności  $\nu$  wzdłuż grubości powłoki na uzyskane wyniki. Ponadto założono stałą wartość parametrów ośrodka Cosseratów  $l$  i  $N$  na grubości powłoki. Natomiast moduł Younga i moduł Kirchhoffa w dowolnym punkcie na grubości powłoki wyznaczono na podstawie modelu Voigta zgodnie ze wzorem (4.32). Podczas obliczeń sił przekrojowych pominięto wpływ krzywizny zakładając, że wyznacznik z tensora przeniesienia  $\mu = 1$ . We wcześniejszych pracach [90, 91, 93] dla korekcyjnego współczynnika ścinania przyjmowano wartość  $\alpha_s = 5/6$ . W niniejszej rozprawie rozszerza się te prace, stosując wzór (4.31) do wyznaczenia  $\alpha_s$ .

### 4.6.2. Pomocnicze całki określone na grubości powłoki FGM

W celu uproszczenia dalszego zapisu, wprowadza się następujące oznaczenia:

$$C_{FGM} = \frac{1}{1-\nu^2} \int_{-h_0/2}^{h_0/2} E(\zeta) d\zeta = \frac{h_0}{1-\nu^2} \left( \frac{E_r}{n+1} + E_m \right) = \frac{E_0 h_0}{1-\nu^2}, \quad (4.37)$$

$$B_{FGM}^s = \frac{1}{1-\nu^2} \int_{-h_0/2}^{h_0/2} E(\zeta) \zeta d\zeta = \frac{E_r h_0^2}{1-\nu^2} \left( \frac{1}{n+2} - \frac{1}{2(n+1)} \right), \quad (4.38)$$

$$D_{FGM}^s = \frac{1}{1-\nu^2} \int_{-h_0/2}^{h_0/2} E(\zeta) \zeta^2 d\zeta = \frac{h_0^3}{12(1-\nu^2)} \left[ E_r \left( \frac{3}{n+1} - \frac{12}{n+2} + \frac{12}{n+3} \right) + E_m \right] = \frac{E_2^s h_0^3}{12(1-\nu^2)}, \quad (4.39)$$

dla sztywności powłoki FGM odpowiednio membranowej, sprzęgającej (stan membranowy i zgięciowy) oraz sztywności na zginanie. We wzorach (4.37) i (4.39) wprowadzono dla powłoki FGM zastępcze moduły  $E_0$  i  $E_2^s$

$$E_0 = \frac{E_c - E_m}{n+1} + E_m, \quad E_2^s = (E_c - E_m) \left( \frac{3}{n+1} - \frac{12}{n+2} + \frac{12}{n+3} \right) + E_m, \quad (4.40)$$

które odpowiadają modułowi Younga dla powłoki jednorodnej odpowiednio w stanie membranowym i zgięciowym. Ponadto we wzorach (4.38) i (4.39) użyto indeksu górnego  $s$  w celu podkreślenia, że sztywności te zostały wyznaczone dla powłoki FGM względem środkowej powierzchni odniesienia. W oznaczeniu  $C_{FGM}$  indeks górny pominięto, gdyż sztywność membranowa nie zależy od przyjętej powierzchni odniesienia. Sposób wyprowadzenia powyższych całek zawierających moduł Younga został zaprezentowany w Dodatku D, zob. równania (D.1), (D.5) i (D.11).

#### 4.6.3. Równania konstytutywne

Podczas wyznaczania równań konstytutywnych dla powłoki FGM tak samo jak w podrozdziale 4.3 zakłada się w warstwie powłoki PSN Cosseratów (4.8). Wtedy na podstawie założeń kinematycznych Reissnera-Mindlina (4.11) i zależności  $\mathbf{C}_{md} = \mathbf{0}$  (zob. (4.8)) można wyznaczyć siły przekrojowe membranowe i zgięciowe:

$$\mathbf{s}_m = \int_{-h_0/2}^{h_0/2} \boldsymbol{\sigma}_m d\zeta = \int_{-h_0/2}^{h_0/2} (\mathbf{C}_{mm} \mathbf{e}_m + \mathbf{C}_{md} \mathbf{e}_d) d\zeta = \int_{-h_0/2}^{h_0/2} \mathbf{C}_{mm} (\boldsymbol{\varepsilon}_m + \zeta \boldsymbol{\varepsilon}_b) d\zeta = \mathbf{H}_m (C_{FGM}^s \boldsymbol{\varepsilon}_m + B_{FGM}^s \boldsymbol{\varepsilon}_b), \quad (4.41)$$

$$\mathbf{s}_b = \int_{-h_0/2}^{h_0/2} \boldsymbol{\sigma}_m \zeta d\zeta = \int_{-h_0/2}^{h_0/2} (\mathbf{C}_{mm} \mathbf{e}_m + \mathbf{C}_{md} \mathbf{e}_d) \zeta d\zeta = \int_{-h_0/2}^{h_0/2} \mathbf{C}_{mm} (\boldsymbol{\varepsilon}_m + \zeta^2 \boldsymbol{\varepsilon}_b) d\zeta = \mathbf{H}_m (B_{FGM}^s \boldsymbol{\varepsilon}_m + D_{FGM}^s \boldsymbol{\varepsilon}_b), \quad (4.42)$$

gdzie

$$\mathbf{H}_m = \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_1(1-\nu)/2 & \mu_2(1-\nu)/2 \\ 0 & 0 & \mu_2(1-\nu)/2 & \mu_1(1-\nu)/2 \end{bmatrix}. \quad (4.43)$$

Momenty owinięcia określa się wykorzystując zależność (4.12) i  $\mathbf{C}_{dm} = \mathbf{0}$  (zob. (4.8))

$$\mathbf{s}_d = \int_{-h_0/2}^{h_0/2} \boldsymbol{\sigma}_d d\zeta = \int_{-h_0/2}^{h_0/2} (\mathbf{C}_{dm} \mathbf{e}_m + \mathbf{C}_{dd} \mathbf{e}_d) d\zeta = \int_{-h_0/2}^{h_0/2} \mathbf{C}_{dd} \boldsymbol{\varepsilon}_d d\zeta = (1-\nu) l^2 C_{FGM} \mathbf{I}_2 \boldsymbol{\varepsilon}_d, \quad (4.44)$$

gdzie  $\mathbf{I}_2$  jest macierzą jednostkową o wymiarze  $2 \times 2$ . Natomiast siły przekrojowe dla ścinania poprzecznego wyznacza się następująco

$$\mathbf{s}_s = \int_{-h_0/2}^{h_0/2} \boldsymbol{\sigma}_s d\zeta = \int_{-h_0/2}^{h_0/2} \mathbf{C}_{ss} \boldsymbol{\varepsilon}_s d\zeta = \frac{1}{2} \alpha_s C_{FGM} (1-\nu) \mathbf{I}_2 \boldsymbol{\varepsilon}_s, \quad (4.45)$$

gdzie

$$\mathbf{C}_{ss} = \begin{bmatrix} \alpha_s G(\zeta) & 0 \\ 0 & \alpha_s G(\zeta) \end{bmatrix}. \quad (4.46)$$

Uzyskane w ten sposób równania konstytutywne w składowych zestawiono poniżej

$$\begin{aligned}
N^{11} &= C_{FGM} (\varepsilon_{11} + \nu \varepsilon_{22}) + B_{FGM}^s (\kappa_{11} + \nu \kappa_{22}) \\
N^{22} &= C_{FGM} (\varepsilon_{22} + \nu \varepsilon_{11}) + B_{FGM}^s (\kappa_{22} + \nu \kappa_{11}) \\
N^{12} &= \frac{1-\nu}{2(1-N^2)} \left( C_{FGM} [\varepsilon_{12} + (1-2N^2)\varepsilon_{21}] + B_{FGM}^s [\kappa_{12} + (1-2N^2)\kappa_{21}] \right) \\
N^{21} &= \frac{1-\nu}{2(1-N^2)} \left( C_{FGM} [\varepsilon_{21} + (1-2N^2)\varepsilon_{12}] + B_{FGM}^s [\kappa_{21} + (1-2N^2)\kappa_{12}] \right) \\
Q^1 &= \frac{1}{2} \alpha_s C_{FGM} (1-\nu) \varepsilon_1 \\
Q^2 &= \frac{1}{2} \alpha_s C_{FGM} (1-\nu) \varepsilon_2 \\
M^{11} &= D_{FGM}^s (\kappa_{11} + \nu \kappa_{22}) + B_{FGM}^s (\varepsilon_{11} + \nu \varepsilon_{22}) \\
M^{22} &= D_{FGM}^s (\kappa_{22} + \nu \kappa_{11}) + B_{FGM}^s (\varepsilon_{22} + \nu \varepsilon_{11}) \\
M^{12} &= \frac{1-\nu}{2(1-N^2)} \left( D_{FGM}^s [\kappa_{12} + (1-2N^2)\kappa_{21}] + B_{FGM}^s [\varepsilon_{12} + (1-2N^2)\varepsilon_{21}] \right) \\
M^{21} &= \frac{1-\nu}{2(1-N^2)} \left( D_{FGM}^s [\kappa_{21} + (1-2N^2)\kappa_{12}] + B_{FGM}^s [\varepsilon_{21} + (1-2N^2)\varepsilon_{12}] \right) \\
M^1 &= l^2 C_{FGM} (1-\nu) \kappa_1 \\
M^2 &= l^2 C_{FGM} (1-\nu) \kappa_2
\end{aligned} \tag{4.47}$$

Równania (4.54) dla skrajnych wartości wykładnika  $n = 0$  i  $n = \infty$  upraszczają się do równań dla powłoki jednorodnej odpowiednio ceramicznej i z metalu, zob. równania z prac [40, 47] zestawione w tab. 4.1. Tożsamość ta wynika z tego, że dla tych wartości  $n$  zachodzi  $C_{FGM} = C$ ,  $B_{FGM}^s = 0$ ,  $D_{FGM}^s = D$ . Tymczasem przyrównanie momentów owinięcia ze wzorów (4.2) i (4.54) prowadzi do tożsamości

$$l^2 C_{FGM} = \frac{1}{2} \alpha_t D, \tag{4.48}$$

która w wyniku dalszych przekształceń przyjmuje ostateczną postać

$$\alpha_t = 24 \left( \frac{l}{h_0} \right)^2 \frac{E_r / (n+1) + E_m}{E}. \tag{4.49}$$

## 4.7. Równania konstytutywne powłok FGM określone względem neutralnej powierzchni odniesienia

### 4.7.1. Założenia

Efektom kontynuacji badań nad równaniami konstytutywnymi powłok FGM było zaproponowanie równań względem neutralnej powierzchni odniesienia w pracy [45] autora niniejszej rozprawy. W podejściu powierzchni neutralnej zastosowano takie same założenia, jak w podrozdziale 4.6.1.

### 4.7.2. Pomocnicze całki określone na grubości powłoki FGM

Rzędna  $\zeta_0$  określająca położenie powierzchni neutralnej powłoki względem powierzchni środkowej (rys. 4.2b) jest określona wzorem (4.34). Z definicji powierzchni neutralnej wynika, że sztywność sprzęgająca stan membranowy i zgięciowy  $B_{FGM}^n = 0$ . W Dodatku D (zob. wzór (D.19)) wyprowadzono sztywność powłoki FGM na zginanie względem neutralnej powierzchni odniesienia, którą można zapisać w następujący sposób

$$\begin{aligned}
D_{FGM}^n &= \frac{1}{1-\nu^2} \int_{-h_0/2}^{h_0/2} E(\zeta) (\zeta - \zeta_0)^2 d\zeta = \frac{E_2^n h_0^3}{12(1-\nu^2)} = \\
&= \frac{h_0^3}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{12E_r}{(n+1)(n+2)} \left[ n \left( \frac{1}{2} - \frac{\zeta_0}{h_0} \right)^2 + 2 \left( \frac{\zeta_0}{h_0} \right)^2 + \frac{1-n}{2(n+3)} \right] + E_m \left( 1 + 12 \frac{\zeta_0^2}{h_0^2} \right) \right), \quad (4.50)
\end{aligned}$$

por. wzory (4.23), (4.33). W celu ułatwienia porównania sztywności na zginanie wyznaczonych względem różnych powierzchni odniesienia we wzorze (4.50) wprowadzono zastępczy moduł  $E_2^n$

$$E_2^n = \frac{12(E_c - E_m)}{(n+1)(n+2)} \left[ n \left( \frac{1}{2} - \frac{\zeta_0}{h_0} \right)^2 + 2 \left( \frac{\zeta_0}{h_0} \right)^2 + \frac{1-n}{2(n+3)} \right] + E_m \left( 1 + 12 \frac{\zeta_0^2}{h_0^2} \right), \quad (4.51)$$

który odpowiada modułowi Younga w powłoce jednorodnej oraz modułowi  $E_2^s$ , zob. wzór (4.40).

### 4.7.3. Równania konstytutywne

W celu określenia równań konstytutywnych przyjmuje się PSN Cosseratów w warstwie powłoki oraz założenia Reissnera-Mindlina, zgodnie z którymi

$$\mathbf{e}_m = \boldsymbol{\varepsilon}_m + (\zeta - \zeta_0) \boldsymbol{\varepsilon}_b. \quad (4.52)$$

Wtedy siły przekrojowe membranowe i zgięciowe uzyskuje się w wyniku całkowania naprężeń membranowych na grubości powłoki

$$\begin{aligned}
\mathbf{s}_m &= \int_{-h_0/2}^{h_0/2} \boldsymbol{\sigma}_m d\zeta = \int_{-h_0/2}^{h_0/2} (\mathbf{C}_{mm} \mathbf{e}_m + \mathbf{C}_{md} \mathbf{e}_d) d\zeta = \int_{-h_0/2}^{h_0/2} \mathbf{C}_{mm} [\boldsymbol{\varepsilon}_m + (\zeta - \zeta_0) \boldsymbol{\varepsilon}_b] d\zeta = \mathbf{H}_m C_{FGM} \boldsymbol{\varepsilon}_m, \quad (4.53) \\
\mathbf{s}_b &= \int_{-h_0/2}^{h_0/2} \boldsymbol{\sigma}_m (\zeta - \zeta_0) d\zeta = \int_{-h_0/2}^{h_0/2} (\mathbf{C}_{mm} \mathbf{e}_m + \mathbf{C}_{md} \mathbf{e}_d) (\zeta - \zeta_0) d\zeta = \\
&= \int_{-h_0/2}^{h_0/2} \mathbf{C}_{mm} [(\zeta - \zeta_0) \boldsymbol{\varepsilon}_m + (\zeta - \zeta_0)^2 \boldsymbol{\varepsilon}_b] d\zeta = \mathbf{H}_m D_{FGM}^n \boldsymbol{\varepsilon}_b \quad , \quad (4.54)
\end{aligned}$$

gdzie wykorzystano zależności  $\mathbf{C}_{md} = \mathbf{0}$  i  $B_{FGM}^n = 0$ . Momenty owinięcia i poprzeczne siły tnące wyznacza się tak samo jak w podrozdziale 4.6.3, odpowiednio zgodnie ze wzorami (4.44) i (4.45).

Wyznaczone w ten sposób równania konstytutywne powłok FGM względem neutralnej powierzchni odniesienia przyjmują postać

$$\begin{aligned}
N^{11} &= C_{FGM} (\varepsilon_{11} + \nu \varepsilon_{22}) & M^{11} &= D_{FGM}^n (\kappa_{11} + \nu \kappa_{22}) \\
N^{22} &= C_{FGM} (\varepsilon_{22} + \nu \varepsilon_{11}) & M^{22} &= D_{FGM}^n (\kappa_{22} + \nu \kappa_{11}) \\
N^{12} &= \frac{1-\nu}{2(1-N^2)} C_{FGM} [\varepsilon_{12} + (1-2N^2) \varepsilon_{21}] & M^{12} &= \frac{1-\nu}{2(1-N^2)} D_{FGM}^n [\kappa_{12} + (1-2N^2) \kappa_{21}] \\
N^{21} &= \frac{1-\nu}{2(1-N^2)} C_{FGM} [\varepsilon_{21} + (1-2N^2) \varepsilon_{12}] & M^{21} &= \frac{1-\nu}{2(1-N^2)} D_{FGM}^n [\kappa_{21} + (1-2N^2) \kappa_{12}] \\
Q^1 &= \frac{1}{2} \alpha_s C_{FGM} (1-\nu) \varepsilon_1 & M^1 &= l^2 C_{FGM} (1-\nu) \kappa_1 \\
Q^2 &= \frac{1}{2} \alpha_s C_{FGM} (1-\nu) \varepsilon_2 & M^2 &= l^2 C_{FGM} (1-\nu) \kappa_2
\end{aligned} \quad (4.55)$$

Dla skrajnych wartości wykładnika  $n = 0$  i  $n = \infty$ , ze względu na  $C_{FGM} = C$  i  $D_{FGM}^n = D$  równania (4.55) upraszczają się do równań dla powłoki jednorodnej, zob. równania z prac [40, 47] zestawione w tab. 4.1.

#### 4.8. Porównanie równań konstytutywnych powłok FGM określonych względem powierzchni środkowej i powierzchni neutralnej

Równania konstytutywne powłok FGM uzyskane w sposób analityczny w podrozdziałach 4.6. i 4.7. zostały zestawione w tab. 4.2, gdzie wprowadzono współczynniki  $\mu_1 = \frac{1}{1-N^2}$  i  $\mu_2 = \frac{1-2N^2}{1-N^2}$ .

Tabela 4.2. Porównanie równań konstytutywnych powłok FGM wyznaczonych względem środkowej powierzchni odniesienia i neutralnej powierzchni odniesienia

Uogólnione naprężenia	Równania konstytutywne względem warstwy środkowej	Równania konstytutywne względem warstwy neutralnej
$N^{11} =$	$C_{FGM}(\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22}) + B_{FGM}^s(\kappa_{11} + \nu\kappa_{22})$	$C_{FGM}(\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22})$
$N^{22} =$	$C_{FGM}(\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{11}) + B_{FGM}^s(\kappa_{22} + \nu\kappa_{11})$	$C_{FGM}(\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{11})$
$N^{12} =$	$\frac{1-\nu}{2} [C_{FGM}(\mu_1\varepsilon_{12} + \mu_2\varepsilon_{21}) + B_{FGM}^s(\mu_1\kappa_{12} + \mu_2\kappa_{21})]$	$\frac{1-\nu}{2} C_{FGM}(\mu_1\varepsilon_{12} + \mu_2\varepsilon_{21})$
$N^{21} =$	$\frac{1-\nu}{2} [C_{FGM}(\mu_1\varepsilon_{21} + \mu_2\varepsilon_{12}) + B_{FGM}^s(\mu_1\kappa_{21} + \mu_2\kappa_{12})]$	$\frac{1-\nu}{2} C_{FGM}(\mu_1\varepsilon_{21} + \mu_2\varepsilon_{12})$
$Q^1 =$	$\frac{1}{2}\alpha_s C_{FGM}(1-\nu)\varepsilon_1$	$\frac{1}{2}\alpha_s C_{FGM}(1-\nu)\varepsilon_1$
$Q^2 =$	$\frac{1}{2}\alpha_s C_{FGM}(1-\nu)\varepsilon_2$	$\frac{1}{2}\alpha_s C_{FGM}(1-\nu)\varepsilon_2$
$M^{11} =$	$D_{FGM}^s(\kappa_{11} + \nu\kappa_{22}) + B_{FGM}^s(\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22})$	$D_{FGM}^n(\kappa_{11} + \nu\kappa_{22})$
$M^{22} =$	$D_{FGM}^s(\kappa_{22} + \nu\kappa_{11}) + B_{FGM}^s(\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{11})$	$D_{FGM}^n(\kappa_{22} + \nu\kappa_{11})$
$M^{12} =$	$\frac{1-\nu}{2} [D_{FGM}^s(\mu_1\kappa_{12} + \mu_2\kappa_{21}) + B_{FGM}^s(\mu_1\varepsilon_{12} + \mu_2\varepsilon_{21})]$	$\frac{1-\nu}{2} D_{FGM}^n(\mu_1\kappa_{12} + \mu_2\kappa_{21})$
$M^{21} =$	$\frac{1-\nu}{2} [D_{FGM}^s(\mu_1\kappa_{21} + \mu_2\kappa_{12}) + B_{FGM}^s(\mu_1\varepsilon_{21} + \mu_2\varepsilon_{12})]$	$\frac{1-\nu}{2} D_{FGM}^n(\mu_1\kappa_{21} + \mu_2\kappa_{12})$
$M^1 =$	$l^2 C_{FGM}(1-\nu)\kappa_1$	$l^2 C_{FGM}(1-\nu)\kappa_1$
$M^2 =$	$l^2 C_{FGM}(1-\nu)\kappa_2$	$l^2 C_{FGM}(1-\nu)\kappa_2$

Główną różnicą między równaniami konstytutywnymi porównanymi w tab. 4.2 jest brak wyrazów sprzęgających stan membranowy i zgięciowy w podejściu warstwy neutralnej. W związku z tym równania konstytutywne wyznaczone względem warstwy neutralnej mają taką samą postać jak równania dla powłoki jednorodnej z prac [40, 47] zaprezentowane w tab. 4.1, a jedyna różnica wynika z innej sztywności membranowej  $C_{FGM}$  i zgięciowej  $D_{FGM}^n$  dla powłoki FGM. Zdefiniowane we wzorach (4.40) i (4.51) zastępcze moduły  $E_0$  i  $E_2^s$  ( $E_2^n$ ) ułatwiają porównanie sztywności odpowiednio membranowej i zgięciowej powłoki FGM ze sztywnością powłoki jednorodnej. Ze względu na to, że sztywność  $C_{FGM}$  nie zależy od przyjętej powierzchni odniesienia, to związki konstytutywne dla ścinania poprzecznego i momentów owinięcia są takie same w podejściu warstwy środkowej i neutralnej. Przyczyną dodatkowych różnic w związkach konstytutywnych jest inna wartość sztywności powłoki na zginanie obliczona względem warstwy środkowej (4.39) i względem warstwy neutralnej (4.50). Zastępcze moduły  $E_2^s$  (4.40) i  $E_2^n$  (4.51) umożliwiają łatwe porównanie sztywności zgięciowych wyznaczonych względem różnych powierzchni odniesienia. Równania konstytutywne powłok FGM określone względem warstwy neutralnej są łatwiejsze do implementacji w sformułowaniu hybrydowo-mieszanym MES ze względu na brak członów sprzęgających stan zgięciowy i membranowy.

## Rozdział 5

# HYBRYDOWO-MIESZANE ELEMENTY POWŁOKOWE

### 5.1. Wstęp do MES

Celem rozdziału piątego jest szczegółowe omówienie sposobu formułowania autorskich elementów mieszanych i częściowo mieszanych. W niniejszym podrozdziale zamieszczono krótki wstęp do Metody Elementów Skończonych (MES), będący wprowadzeniem do dalszej części rozdziału poświęconej hybrydowo-mieszanym powłokowym elementom skończonym. Podstawy i koncepcja MES zostały w wyczerpujący sposób omówione m.in. w książkach [21, 26, 163, 180, 272, 384].

W ramach MES układ ciągłego typu o nieskończonej liczbie stopni swobody jest zastępowany układem dyskretnym o skończonej liczbie stopni swobody. Aproksymacja skończenie elementowa polega na zastosowaniu metody Rayleigha-Ritza (Bubnowa-Galerkina) do niepokrywających się podobszarów dziedziny tzw. elementów skończonych. Jako bazę aproksymacyjną MES przyjmuje się najczęściej funkcje wielomianowe określone lokalnie wewnątrz elementów skończonych. Siatka dyskretyzacyjna powstaje w wyniku podziału dziedziny na elementy skończone i odpowiedniego doboru węzłów, w których definiuje się stopnie swobody. Węzły przyjmuje się w wierzchołkach elementów skończonych i ewentualnie dodatkowo na brzegu oraz wewnątrz danego elementu. Formalny opis warunków jakie musi spełniać siatka dyskretyzacyjna został opisany m.in. w pracy [38].

W niniejszej rozprawie zakłada się, że powierzchnia podstawowa  $\Pi$  podciała typu powłoka jest podzielona na czworokątne 4-węzłowe powłokowe elementy skończone, oznaczone przez  $\Pi_{(e)}$ . Globalnymi niewiadomymi w sformułowaniu słabym zagadnienia brzegowego (zob. rozdział trzeci) jest pole wektorowe translacji  $\mathbf{u}$  oraz pole tensorów obrotu  $\mathbf{Q}$ . Zadaniem MES jest znalezienie rozwiązania przybliżonego  $\mathbf{u}^h = (\mathbf{u}^h, \mathbf{Q}^h)$  dla przyjętej siatki elementów skończonych. Za pomocą  $h$  oznaczono charakterystyczny parametr (wymiar) dyskretyzacji taki, że dla  $h \rightarrow 0$  zachodzi  $\mathbf{u}^h \rightarrow \mathbf{u}$ . Aproksymację skończenie wymiarową dla całej dziedziny uzyskuje się w wyniku zastosowania odpowiedniej interpolacji w ramach elementów skończonych. W rozważanych 4-węzłowych elementach powłokowych pole przemieszczeń  $\mathbf{u}$  interpoluje się za pomocą liniowych funkcji kształtu, które zapewniają ciągłość klasy  $C^0$ . Natomiast metoda interpolacji zastosowana dla tensora obrotu  $\mathbf{Q}$  składa się z kilku kroków i została opisana w Dodatku A.3. Dla powierzchni podstawowej powłoki podzielonej na podobszary – elementy skończone pierwszą i drugą wariację funkcjonału można zapisać w postaci

$$\begin{aligned} \delta W(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{s}; \mathbf{w}, \delta \boldsymbol{\varepsilon}, \delta \mathbf{s}) &= \sum_{j=1}^{N_e} \delta W^{(e)}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{s}; \mathbf{w}, \delta \boldsymbol{\varepsilon}, \delta \mathbf{s}), \\ \delta^2 W(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{s}; \mathbf{w}, \delta \boldsymbol{\varepsilon}, \delta \mathbf{s}, \Delta \mathbf{u}, \Delta \boldsymbol{\varepsilon}, \Delta \mathbf{s}) &= \sum_{j=1}^{N_e} \delta^2 W^{(e)}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{s}; \mathbf{w}, \delta \boldsymbol{\varepsilon}, \delta \mathbf{s}, \Delta \mathbf{u}, \Delta \boldsymbol{\varepsilon}, \Delta \mathbf{s}), \end{aligned} \quad (5.1)$$

gdzie indeks górny ( $e$ ) oznacza wielkość elementową, a  $N_e$  liczbę elementów skończonych. Zatem zlinearyzowany warunek stacjonarności dla funkcjonału Hu-Washizu (3.58) przyjmuje postać

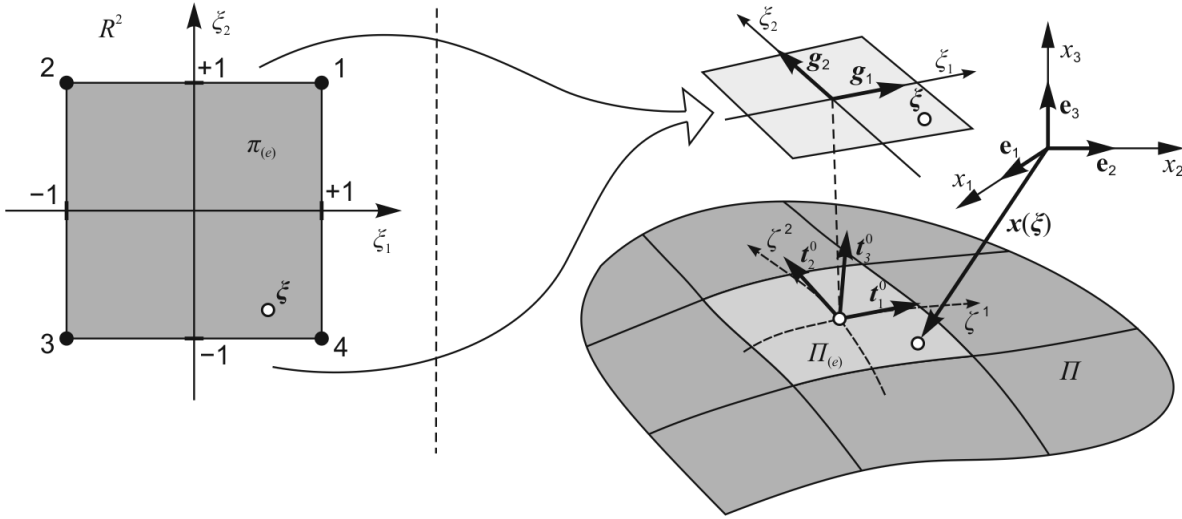
$$\sum_{j=1}^{N_e} \left( \delta W^{(e)}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{s}; \mathbf{w}, \delta \boldsymbol{\varepsilon}, \delta \mathbf{s}) + \delta^2 W^{(e)}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{s}; \mathbf{w}, \delta \boldsymbol{\varepsilon}, \delta \mathbf{s}, \Delta \mathbf{u}, \Delta \boldsymbol{\varepsilon}, \Delta \mathbf{s}) \right) = 0. \quad (5.2)$$

Ze względu na sumowanie występujące w zależności (5.2) dalsze rozważania można ograniczyć do pojedynczego powłokowego elementu skończonego.

### 5.2. Interpolacja funkcji wektorowych

W rozprawie 4-węzłowy element powłokowy  $\Pi_{(e)}$  na powierzchni podstawowej  $\Pi$  definiuje się jako gładkie odwzorowanie standardowego elementu skończonego  $\pi_{(e)} = [-1, +1] \times [-1, +1]$  określonego w przestrzeni  $R^2$  (rys. 5.1). Odwzorowanie to jako przekształcenie afiniczne, zob. np. [38], jest złożone

niem odwzorowania liniowego i translacji, które zachowuje proste, ale nie zachowuje równości kątów oraz długości odcinków. We wzorcowym (standardowym) elemencie definiuje się współrzędne naturalne  $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ , zob. rys. 5.1.



Rys. 5.1. Odwzorowanie standardowego elementu  $\pi_{(e)}$  w element powłokowy  $\Pi_{(e)}$  na powierzchni odniesienia

Interpolację funkcji wektorowych takich jak: wektor wodzący w konfiguracji odniesienia  $\mathbf{x}(\xi)$ , wektor wodzący w konfiguracji aktualnej  $\mathbf{y}(\xi)$ , wektor przemieszczeń translacyjnych  $\mathbf{u}(\xi)$  oraz wektor wirtualnych przesunięć  $\mathbf{v}(\xi)$  przeprowadza się zgodnie z klasyczną dla MES procedurą (zob. np. [21, 384]). Standardową interpolację klasy  $C^0$  dla funkcji wektorowej  $\mathbf{z}$  w 4-węzłowym elemencie skończonym można wyrazić wzorem

$$\tilde{\mathbf{z}}(\xi) = \sum_{a=1}^4 L_a(\xi) \mathbf{z}_a, \quad (5.3)$$

gdzie  $\mathbf{z}_a$  jest zbiorem wartości funkcji wektorowej w węzłach elementu, a  $L_a(\xi)$  są tzw. funkcjami kształtu, spełniającymi warunek  $L_a(\xi^b) = \delta_{ab}$  ( $a, b = 1, 2, 3, 4$ ), w którym  $\xi^b$  są współrzędnymi węzła o numerze  $b$ . We wzorze (5.3) za pomocą falki oznaczono wartość interpolowaną funkcji  $\mathbf{z}$ , jednak w dalszej części pracy oznaczenie to pominięto w celu uproszczenia zapisu. Zgodnie z podejściem izoparametrycznym w pracy zakłada się takie same funkcje kształtu dla geometrii i pola niewiadomych (przemieszczeń). W rozważanym 4-węzłowym elemencie powłokowym funkcje kształtu przyjmuje się w postaci iloczynu liniowych wielomianów Lagrange'a

$$L_a(\xi) = \frac{1}{2} \left( 1 + \xi_1^a \xi_1 \right) \frac{1}{2} \left( 1 + \xi_2^a \xi_2 \right), \quad a = 1, 2, 3, 4, \quad (5.4)$$

gdzie za pomocą  $\xi_1^a$ ,  $\xi_2^a$  oznaczono współrzędne węzła o numerze  $a$  w elemencie wzorcowym. Zatem dla numeracji węzłów zaprezentowanej na rys. 5.1 biliniowe funkcje kształtu przyjmują postać

$$\begin{aligned} L_1(\xi) &= \frac{1}{4} (1 + \xi_1) (1 + \xi_2), & L_3(\xi) &= \frac{1}{4} (1 - \xi_1) (1 - \xi_2), \\ L_2(\xi) &= \frac{1}{4} (1 - \xi_1) (1 + \xi_2), & L_4(\xi) &= \frac{1}{4} (1 + \xi_1) (1 - \xi_2). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Na podstawie zależności (5.4) można wyznaczyć bezpośrednio pochodne funkcji kształtu po współrzędnych naturalnych

$$(L_a(\xi))_{,\xi_1} = \frac{1}{4} \xi_1^a (1 + \xi_2^a \xi_2), \quad (L_a(\xi))_{,\xi_2} = \frac{1}{4} \xi_2^a (1 + \xi_1^a \xi_1). \quad (5.6)$$



### 5.3. Reguła transformacyjna

W rozważanej teorii powłok do określenia miar odkształceń (zob. wzory (2.39), (2.40)) i innych zależności na powierzchni podstawowej powłoki potrzebne jest wyznaczenie pochodnych funkcji wektorowych względem współrzędnych krzywoliniowych (fizycznych)  $\zeta^a$  (rys. 5.1). Ze względu na przyjęcie interpolacji funkcji wektorowych we współrzędnych naturalnych, niemożliwe jest bezpośrednio obliczenie pochodnych względem współrzędnych fizycznych. Z tego powodu potrzebna jest reguła transformacyjna pozwalająca określić pochodne po współrzędnych  $\zeta^a$  przez pochodne po współrzędnych  $\xi_a$ . W tym celu wykorzystuje się zależność (5.3) zgodnie z którą wektor wodzący niezdeformowanej powierzchni odniesienia powłoki interpoluje się następująco

$$\mathbf{x}(\xi) = \sum_{a=1}^4 L_a(\xi) \mathbf{x}_a \quad (5.7)$$

oraz regułę różniczkowania funkcji złożonej na podstawie której relację (2.3) zapisuje się w postaci

$$\mathbf{t}_\beta^0(\xi) = \frac{\partial \mathbf{x}(\xi)}{\partial \zeta^\beta} = \frac{\partial \mathbf{x}(\xi)}{\partial \xi_a} \frac{\partial \xi_a}{\partial \zeta^\beta}. \quad (5.8)$$

Wektory bazowe  $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2$  (rys. 5.1) współrzędnych naturalnych na powierzchni odniesienia powłoki można określić na podstawie wzorów

$$\mathbf{g}_1(\xi) = \frac{\partial \mathbf{x}(\xi)}{\partial \xi_1} = \frac{1}{4} \sum_{a=1}^4 \xi_1^{z^a} (1 + \xi_2^{z^a} \xi_2) \mathbf{x}_a, \quad \mathbf{g}_2(\xi) = \frac{\partial \mathbf{x}(\xi)}{\partial \xi_2} = \frac{1}{4} \sum_{a=1}^4 \xi_2^{z^a} (1 + \xi_1^{z^a} \xi_1) \mathbf{x}_a. \quad (5.9)$$

W ogólnym przypadku wektory  $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2$  nie są ortogonalne oraz nie są wektorami jednostkowymi. W zależności (5.8) pochodne  $\zeta_{\alpha,\beta}$  po współrzędnych krzywoliniowych są nieznanne i ich określenie wymaga dalszych przekształceń. W tym celu wykorzystuje się ortonormalność wektorów  $\mathbf{t}_\beta^0$  (5.8), którą zakłada się w rozważanej teorii powłok (zob. wzór (2.3))

$$\mathbf{t}_\alpha^0(\xi) \cdot \mathbf{t}_\beta^0(\xi) = \frac{\partial \xi_a}{\partial \zeta^\alpha} \frac{\partial \mathbf{x}(\xi)}{\partial \xi_a} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}(\xi)}{\partial \xi_b} \frac{\partial \xi_b}{\partial \zeta^\beta} = \delta_{\alpha\beta}. \quad (5.10)$$

Powyższe równanie w postaci macierzowej po uwzględnieniu wzorów (5.9) przyjmuje postać

$$\begin{bmatrix} \xi_{1,1} & \xi_{2,1} \\ \xi_{1,2} & \xi_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{t}_1^0 & \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{t}_2^0 \\ \mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{t}_1^0 & \mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{t}_2^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.11)$$

W celu uproszczenia dalszego zapisu definiuje się macierz Jacobiego  $\mathbf{J}$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \zeta^1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \zeta^1}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial \zeta^2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \zeta^2}{\partial \xi_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{t}_1^0 & \mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{t}_1^0 \\ \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{t}_2^0 & \mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{t}_2^0 \end{bmatrix}, \quad (5.12)$$

której wyznacznik nazywa się jakobianem i oznacza za pomocą  $j = \det \mathbf{J}$ . Macierz Jacobiego można interpretować jako macierz transformacji między wektorami bazowymi dla współrzędnych fizycznych i współrzędnych naturalnych, gdyż zachodzi

$$\begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{J}^T \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1^0 \\ \mathbf{t}_2^0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1^0 \\ \mathbf{t}_2^0 \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-T} \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_2 \end{bmatrix}. \quad (5.13)$$

Składowe macierzy Jacobiego można łatwo wyznaczyć na podstawie zależności (2.4) i (5.9), gdyż w ramach rozważanej teorii powłok współrzędne wektora wodzącego  $\mathbf{x}$  oraz tensor struktury  $\mathbf{T}_0$  są da-

nymi w MES. Zatem na podstawie zależności (5.11) możliwe jest wyznaczenie pochodnych  $\xi_{\alpha,\beta}$  przez odwrócenie macierzy Jacobiego

$$\begin{bmatrix} \xi_{1,1} & \xi_{2,1} \\ \xi_{1,2} & \xi_{2,2} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-T} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{21} \\ -J_{12} & J_{11} \end{bmatrix} = \frac{1}{j} \begin{bmatrix} \mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{t}_2^0 & -\mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{t}_2^0 \\ -\mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{t}_1^0 & \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{t}_1^0 \end{bmatrix}. \quad (5.14)$$

Zależności (5.6) i (5.14) pozwalają na określenie pochodnych funkcji kształtu po współrzędnych fizycznych na podstawie reguły różniczkowania funkcji złożonej

$$(L_a)_{,\beta} = \frac{\partial L_a(\xi)}{\partial \zeta^\beta} = \frac{\partial L_a(\xi)}{\partial \zeta_1^\beta} \frac{\partial \zeta_1}{\zeta^\beta} + \frac{\partial L_a(\xi)}{\partial \zeta_2^\beta} \frac{\partial \zeta_2}{\zeta^\beta} = (L_a(\xi))_{,\xi_1} \xi_{1,\beta} + (L_a(\xi))_{,\xi_2} \xi_{2,\beta}. \quad (5.15)$$

Wzór (5.15) umożliwia dla funkcji wektorowych interpolowanych zgodnie ze wzorem (5.3) obliczenie pochodnych względem współrzędnych  $\zeta^\beta$ , gdyż  $\mathbf{z}_{,\beta} = \sum_{a=1}^4 (L_a)_{,\beta} \mathbf{z}_a$ .

Zależności (5.12)–(5.14) pozwalają również na zapisanie reguły transformacji między kowariantnymi składowymi fizycznymi miar odkształceń  $\varepsilon_{\alpha\beta}$ ,  $\varepsilon_\alpha$  (2.42) a składowymi odkształceń  $\bar{\varepsilon}_{\alpha\beta}$ ,  $\bar{\varepsilon}_\alpha$  w układzie elementu wzorcowego  $\{\xi, \mathbf{t}^0\}$  w następującej postaci

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \zeta_{\mu,\alpha} \zeta_{\lambda,\beta} \bar{\varepsilon}_{\mu\lambda}, \quad \varepsilon_\alpha = \zeta_{\mu,\alpha} \bar{\varepsilon}_\mu, \quad \bar{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \zeta_{,\alpha}^\mu \zeta_{,\beta}^\lambda \varepsilon_{\mu\lambda}, \quad \bar{\varepsilon}_\alpha = \zeta_{,\alpha}^\mu \varepsilon_\mu. \quad (5.16)$$

Regułę transformacji między kontrawariantnymi składowymi fizycznymi sił przekrojowych  $N^{\alpha\beta}$ ,  $Q^\alpha$  (2.14) oraz składowymi sił  $\bar{N}^{\alpha\beta}$ ,  $\bar{Q}^\alpha$  we współrzędnych naturalnych definiuje się następująco

$$N^{\alpha\beta} = \zeta_{,\lambda}^\alpha \zeta_{,\mu}^\beta \bar{N}^{\lambda\mu}, \quad Q^\alpha = \zeta_{,\lambda}^\alpha \bar{Q}^\lambda, \quad \bar{N}^{\alpha\beta} = \zeta_{\alpha,\lambda} \zeta_{\beta,\mu} N^{\lambda\mu}, \quad \bar{Q}^\alpha = \zeta_{\alpha,\lambda} Q^\lambda. \quad (5.17)$$

Wobec założenia o ortonormalności bazy  $\mathbf{t}_i^0$  pole powierzchni różniczkowego elementu na powierzchni odniesienia powłoki jest dane wzorem

$$da = d\zeta^1 d\zeta^2 = j(\xi) d\xi_1 d\xi_2. \quad (5.18)$$

Zatem dla 4-węzłowego standardowego elementu powłokowego (rys. 5.1) pole powierzchni można wyznaczyć na podstawie całki

$$A_{(e)} = \iint_{\Pi_{(e)}} da = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 j(\xi) d\xi_1 d\xi_2. \quad (5.19)$$

Dla przyjętych biliniowych funkcji kształtu (5.4) jacobian można zapisać w postaci

$$j(\xi) = j_0 + j_1 \xi_1 + j_2 \xi_2. \quad (5.20)$$

Wtedy łatwo można wykazać, że w wyniku całkowania zależności (5.19) uzyskuje się

$$A_{(e)} = 4j_0, \quad (5.21)$$

gdzie za pomocą  $j_0$  oznaczono wartość jacobianu (5.20) w środku elementu skończonego.

## 5.4. Skorygowane współrzędne naturalne i współrzędne skośne

### 5.4.1. Wprowadzenie

W przypadku czworokątnych elementów powłokowych o nieregularnym kształcie, znacząco odbiegającym od kwadratu, dokładność obliczeń za pomocą MES spada wraz ze zwiększaniem dystorsji siatki elementów skończonych. Zjawisko to związane jest z tym, że interpolację funkcji wektorowych definiuje się we współrzędnych naturalnych w kwadratowym elemencie wzorcowym (rys. 5.1). W przypadku hybrydowo-mieszanych elementów skończonych odpowiednie skorygowanie współrzędnych naturalnych pozwala ograniczyć negatywny wpływ dystorsji siatki na wyniki analiz MES.

### 5.4.2. Skorygowane współrzędne naturalne

Opisaną poniżej metodę korygowania współrzędnych naturalnych w interpolacji niezależnych uogólnionych naprężeń i niezależnych odkształceń zastosowano m.in. w [98, 304, 307, 349]. Metoda ta wywodzi się z podejścia zaproponowanego w pracy [334] dla elementów niedostosowanych. W metodzie tej skorygowane współrzędne naturalne  $\xi_\alpha^s$  przyjmuje się w postaci

$$\xi_\alpha^s = \xi_\alpha - \bar{\xi}_\alpha, \quad (5.22)$$

gdzie za pomocą  $\bar{\xi}_\alpha$  oznaczono współrzędne naturalne środka ciężkości pola powierzchni 4-węzłowego elementu skończonego. Metoda ta pozwala uwzględnić fakt, że środek ciężkości elementu czworokątnego o nieregularnym kształcie nie pokrywa się ze środkiem elementu zdefiniowanym na przecięciu prostych łączących środki przeciwległych boków. Współrzędne  $\bar{\xi}_\alpha$  wyznacza się z definicji środka ciężkości pola powierzchni

$$\bar{\xi}_\alpha = \frac{1}{A_{(e)}} \iint_{\Pi_{(e)}} \xi_\alpha da. \quad (5.23)$$

Podstawienie zależności (5.9) do wzoru (5.12) oraz skorzystanie z tego, że współrzędne fizyczne węzła o numerze  $k$  (rys. 5.1) można wyrazić następująco

$$\mathbf{x}_k = \zeta_k^a \mathbf{t}_\alpha^0 \Rightarrow \zeta_k^a = \mathbf{x}_k \cdot \mathbf{t}_\alpha^0, \quad (5.24)$$

pozwala na zapisanie składowych macierzy Jacobiego w postaci

$$\begin{aligned} J_{11} &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^4 \zeta_1^k (1 + \zeta_2^k \zeta_2) \zeta_k^1 = a_1 + a_3 \zeta_2, & J_{12} &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^4 \zeta_2^k (1 + \zeta_1^k \zeta_1) \zeta_k^1 = a_2 + a_3 \zeta_1, \\ J_{21} &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^4 \zeta_1^k (1 + \zeta_2^k \zeta_2) \zeta_k^2 = b_1 + b_3 \zeta_2, & J_{22} &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^4 \zeta_2^k (1 + \zeta_1^k \zeta_1) \zeta_k^2 = b_2 + b_3 \zeta_1, \end{aligned} \quad (5.25)$$

gdzie współczynniki  $a_i$ ,  $b_i$  dane są wzorami

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_1^1 \\ \zeta_1^2 \\ \zeta_1^3 \\ \zeta_1^4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_2^1 \\ \zeta_2^2 \\ \zeta_2^3 \\ \zeta_2^4 \end{bmatrix}. \quad (5.26)$$

Wykorzystanie zależności (5.25) podczas obliczania jacobianu pozwala zapisać współczynniki ze wzoru (5.20) w następującej postaci

$$j_0 = a_1 b_2 - a_2 b_1, \quad j_1 = a_1 b_3 - a_3 b_1, \quad j_2 = a_3 b_2 - a_2 b_3. \quad (5.27)$$

Podstawienie zależności (5.18), (5.20) i (5.21) do wzoru (5.23) umożliwiło analityczne wyznaczenie współrzędnych środka ciężkości

$$\bar{\xi}_1 = \frac{1}{A_{(e)}} \iint_{\Pi_{(e)}} \xi_1 da = \frac{1}{A_{(e)}} \iint_{\pi_{(e)}} \xi_1 (j_0 + j_1 \zeta_1 + j_2 \zeta_2) d\zeta_1 d\zeta_2 = \frac{j_1}{3A_{(e)}} \zeta_1^3 \Big|_{-1}^1 \zeta_2^1 \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{3} \frac{j_1}{j_0}, \quad (5.28)$$

$$\bar{\xi}_2 = \frac{1}{A_{(e)}} \iint_{\Pi_{(e)}} \xi_2 da = \frac{1}{A_{(e)}} \iint_{\pi_{(e)}} \xi_2 (j_0 + j_1 \zeta_1 + j_2 \zeta_2) d\zeta_1 d\zeta_2 = \frac{j_2}{3A_{(e)}} \zeta_2^3 \Big|_{-1}^1 \zeta_1^1 \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{3} \frac{j_2}{j_0}. \quad (5.29)$$

Podczas całkowania w (5.28)-(5.29) skorzystano z tego, że człony zawierające  $\xi_\alpha$  w parzystej potędze się zerują. W dalszej części rozprawy współrzędne  $\xi^s$  będą określane skrótowo jako współrzędne skorygowane.

### 5.4.3. Współrzędne skośne

Zastosowanie współrzędnych skośnych zamiast współrzędnych naturalnych w interpolacji niezależnych odkształceń i naprężeń zaproponowano w pracach [363, 364, 378]. Współrzędne skośne definiuje się w stałej bazie naturalnej  $\mathbf{g}_1^c, \mathbf{g}_2^c$  określonej w środku elementu skończonego

$$\mathbf{g}_1^c = \mathbf{g}_1(\zeta_1 = 0, \zeta_2 = 0) = \frac{1}{4} \sum_{a=1}^4 \zeta_1^a \mathbf{x}_a, \quad \mathbf{g}_2^c = \mathbf{g}_2(\zeta_1 = 0, \zeta_2 = 0) = \frac{1}{4} \sum_{a=1}^4 \zeta_2^a \mathbf{x}_a. \quad (5.30)$$

W bazie  $\mathbf{g}_1^c, \mathbf{g}_2^c$  przeprowadza się transformację niezależnych odkształceń i naprężeń, gdyż naturalne wektory bazowe  $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2$  (5.9) zmieniają się wewnątrz czworokątnych elementów skończonych nie będących równoległobokami. W celu poprawy interpolacji dla elementów o nieregularnym kształcie współrzędne skośne  $x_s, y_s$  zdefiniowano w ten sposób, aby wektor  $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_c$  opisujący położenie dowolnego punktu względem środka elementu  $\mathbf{x}_c$  wyrażony we współrzędnych powierzchniowych  $\bar{\zeta}^a$  był równy wektorowi zapisanemu we współrzędnych skośnych

$$\bar{\mathbf{x}} = \bar{\zeta}^1 \mathbf{t}_1^0 + \bar{\zeta}^2 \mathbf{t}_2^0 = (\zeta^1 - \zeta_c^1) \mathbf{t}_1^0 + (\zeta^2 - \zeta_c^2) \mathbf{t}_2^0 = x_s \mathbf{g}_1^c + y_s \mathbf{g}_2^c, \quad (5.31)$$

gdzie za pomocą  $\zeta_c^1, \zeta_c^2$  oznaczono współrzędne fizyczne środka elementu. W wyniku obustronnego wymnożenia skalarnego równania (5.31) przez wektory  $\mathbf{t}_1^0$  i  $\mathbf{t}_2^0$  uzyskuje się poniższą zależność opisującą transformację między współrzędnymi skośnymi i współrzędnymi fizycznymi

$$\begin{bmatrix} \bar{\zeta}^1 \\ \bar{\zeta}^2 \end{bmatrix} = \mathbf{J}_0 \begin{bmatrix} x_s \\ y_s \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_0 = \begin{bmatrix} J_{11}^0 & J_{12}^0 \\ J_{21}^0 & J_{22}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1^c \cdot \mathbf{t}_1^0 & \mathbf{g}_2^c \cdot \mathbf{t}_1^0 \\ \mathbf{g}_1^c \cdot \mathbf{t}_2^0 & \mathbf{g}_2^c \cdot \mathbf{t}_2^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}, \quad (5.32)$$

gdzie  $\mathbf{J}_0$  oznacza macierz Jacobiego obliczoną w środku elementu (por. wzory (5.12) i (5.25)).

W wyniku przekształcenia zależności (5.32) współrzędne skośne można wyznaczyć z równania

$$\begin{bmatrix} x_s \\ y_s \end{bmatrix} = \mathbf{J}_0^{-1} \begin{bmatrix} \bar{\zeta}^1 \\ \bar{\zeta}^2 \end{bmatrix}. \quad (5.33)$$

Współrzędne  $\bar{\zeta}^a$  po interpolacji (5.7) i uwzględnieniu zależności (5.26) można wyrazić następująco

$$\begin{bmatrix} \bar{\zeta}^1 \\ \bar{\zeta}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \zeta^1 - \zeta_c^1 \\ \zeta^2 - \zeta_c^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \zeta_1 + a_2 \zeta_2 + a_3 \zeta_1 \zeta_2 \\ b_1 \zeta_1 + b_2 \zeta_2 + b_3 \zeta_1 \zeta_2 \end{bmatrix}, \quad (5.34)$$

tymczasem odwrócona macierz Jacobiego (5.32) jest dana wzorem

$$\mathbf{J}_0^{-1} = \frac{1}{j_0} \begin{bmatrix} J_{22}^0 & -J_{12}^0 \\ -J_{21}^0 & J_{11}^0 \end{bmatrix} = \frac{1}{j_0} \begin{bmatrix} b_2 & -a_2 \\ -b_1 & a_1 \end{bmatrix}. \quad (5.35)$$

Po podstawieniu (5.34) i (5.35) do (5.33) uzyskuje się analityczny wzór na współrzędne skośne

$$\begin{bmatrix} x_s \\ y_s \end{bmatrix} = \frac{1}{j_0} \begin{bmatrix} b_2 & -a_2 \\ -b_1 & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \zeta_1 + a_2 \zeta_2 + a_3 \zeta_1 \zeta_2 \\ b_1 \zeta_1 + b_2 \zeta_2 + b_3 \zeta_1 \zeta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \zeta_1 + k_1 \zeta_1 \zeta_2 \\ \zeta_2 + k_2 \zeta_1 \zeta_2 \end{bmatrix}, \quad (5.36)$$

gdzie stałe  $k_1$  i  $k_2$  po skorzystaniu z zależności (5.27) można zapisać następująco

$$k_1 = \frac{j_2}{j_0}, \quad k_2 = \frac{j_1}{j_0}. \quad (5.37)$$

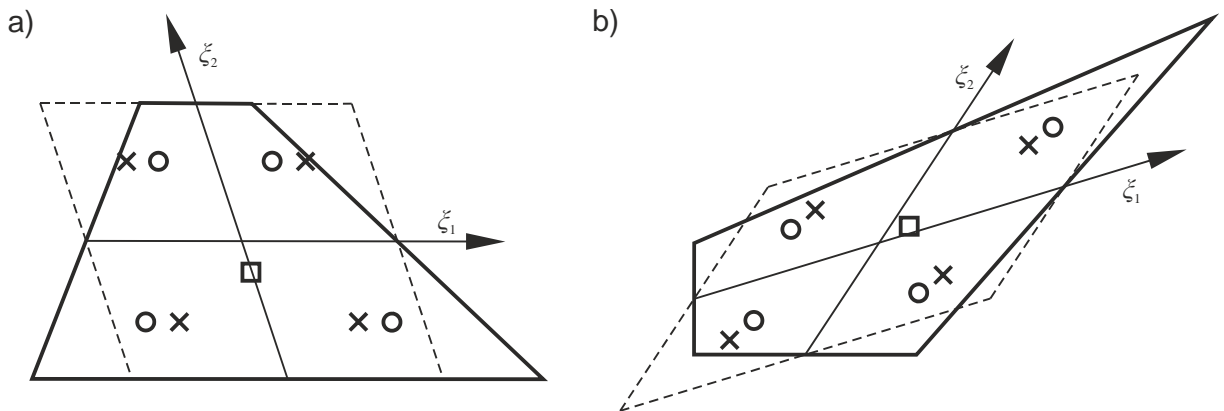
#### 5.4.4. Porównanie, interpretacja graficzna

Skorygowane współrzędne naturalne  $\xi_\alpha^s$  i współrzędne skośne  $\{x_s, y_s\}$  będą stosowane zamiennie w dalszej części rozprawy, dlatego w celu ujednoczenia zapisu wprowadza się wspólne dla nich oznaczenie  $\xi^*$ . Dla rozważanego 4-węzłowego elementu podczas całkowania numerycznego kluczowe znaczenie mają wartości tych współrzędnych w punktach całkowania Gaussa dla  $\xi_1^s, \xi_2^s = \pm 1/\sqrt{3}$

$$\xi_1^s = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3} \frac{j_1}{j_0}, \quad \xi_2^s = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3} \frac{j_2}{j_0}, \quad (5.38)$$

$$x_s = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \pm \frac{1}{3} \frac{j_2}{j_0}, \quad y_s = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \pm \frac{1}{3} \frac{j_1}{j_0}. \quad (5.39)$$

Pomimo zbliżonej postaci wzorów (5.38) i (5.39), współrzędne skorygowane i współrzędne skośne przyjmują inne wartości w punktach całkowania dla elementów o nieregularnym kształcie. Podczas gdy dla współrzędnych  $\xi_\alpha^s$  poprawki  $\bar{\xi}_\alpha$  zgodnie ze wzorami (5.28) i (5.29) przyjmują stałe wartości w elemencie, to dla współrzędnych skośnych danych wzorem (5.36) korekta względem współrzędnych naturalnych rośnie wraz z oddalaniem się od środka elementu skończonego. W związku z tym w skorygowanych współrzędnych naturalnych interpolacja niezależnych odkształceń i uogólnionych naprężeń jest wykonywana względem środka ciężkości elementu zaznaczonego kwadracikiem na rys. 5.2. Tymczasem położenie punktów całkowania we współrzędnych naturalnych (krzyżyki) i współrzędnych skośnych (kółka) porównano na rys. 5.2 dla elementów skończonych o nieregularnym kształcie. Lokalizacja punktów Gaussa we współrzędnych naturalnych wymaga skorygowania, gdyż odpowiadają one fikcyjnemu równoległobokowi narysowanemu linią przerywaną na rys. 5.2, a nie rzeczywistemu kształtowi elementu. W przypadku elementów skończonych o kształcie równoległoboku  $j_1 = 0$  i  $j_2 = 0$ , więc zastosowanie w interpolacji współrzędnych  $\xi^*$  nie powoduje zmiany wyników względem klasycznej interpolacji we współrzędnych naturalnych.



Rys. 5.2. Porównanie położenia punktów całkowania Gaussa we współrzędnych naturalnych (krzyżyki) i współrzędnych skośnych (kółka), lokalizacja środka ciężkości (kwadrat) dla elementów o nieregularnym kształcie

### 5.5. Dwustopniowa interpolacja odkształceń ścinania poprzecznego

Zastosowanie reguły pełnego całkowania dla cienkościennych konstrukcji powłokowych modelowanych za pomocą elementów 4-węzłowych sprawia, że są one w szczególny sposób podatne na blokadę związaną ze ścinaniem poprzecznym. W pracy [97] zaproponowano zastosowanie podejścia ANS (ang. *Assumed Natural Strain*) polegającego na dwustopniowej interpolacji odkształceń ścinania poprzecznego, co pozwoliło w znaczący sposób ograniczyć zjawisko blokady. Implementacja tej metody w ramach rozważanej teorii powłok składa się z następujących kroków:

- w punktach pomiarowych A, B, C, D zdefiniowanych w elemencie wzorcowym (zob. rys. 5.3a) wyznacza się wartości odkształceń  $\{\varepsilon_\beta|_P^{BI}\}$  i wierszy macierzy  $\{\mathbf{B}_{\varepsilon_\beta}|_P^{BI}\}$  związanych ze składowymi odkształceniami ścinania poprzecznego, indeks górny *BI* (*Bezpośrednia Interpolacja*) oznacza, że

dane wielkości oblicza się bezpośrednio na podstawie interpolowanych przemieszczeń (5.3) za pomocą wzorów (2.39), (C.6)-(C.7), a indeks dolny  $P = A, B, C, D$  oznacza dany punkt pomiarowy;

- uzyskane dyskretne zbiory wartości  $\{\varepsilon_\beta|_P^{BI}\}$ ,  $\{\mathbf{B}_{\varepsilon_\beta}|_P^{BI}\}$  transformuje się z reprezentacji przestrzennej  $\{\mathbf{t}_i\}$  do układu elementu wzorcowego  $\{\xi, \mathbf{t}^0\}$ , wykorzystując zależności (5.16), w ten sposób otrzymuje się wartości  $\{\bar{\varepsilon}_\beta|_P^{BI}\}$ ,  $\{\bar{\mathbf{B}}_{\varepsilon_\beta}|_P^{BI}\}$ ;
- wielkości zastępcze  $\bar{\varepsilon}_\beta(\xi)$ ,  $\bar{\mathbf{B}}_{\varepsilon_\beta}(\xi)$  interpoluje się za pomocą funkcji zaproponowanych w [97] (zob. rys. 5.3b) na podstawie wartości obliczonych w poprzednich krokach zgodnie ze wzorami

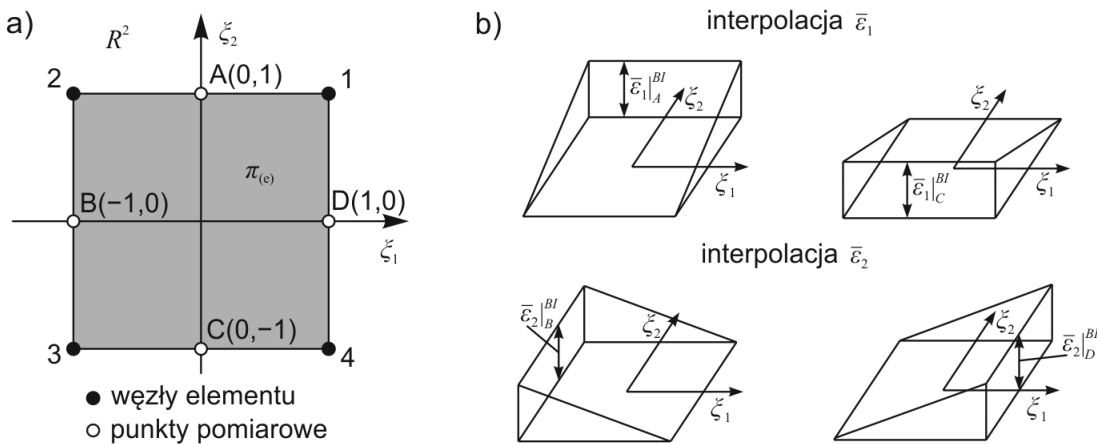
$$\bar{\varepsilon}_1(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi_2)\bar{\varepsilon}_1|_A^{BI} + \frac{1}{2}(1 - \xi_2)\bar{\varepsilon}_1|_C^{BI}, \quad (5.40)$$

$$\bar{\varepsilon}_2(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi_1)\bar{\varepsilon}_2|_D^{BI} + \frac{1}{2}(1 - \xi_1)\bar{\varepsilon}_2|_B^{BI}, \quad (5.41)$$

$$\bar{\mathbf{B}}_{\varepsilon_1}(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi_2)\bar{\mathbf{B}}_{\varepsilon_1}|_A^{BI} + \frac{1}{2}(1 - \xi_2)\bar{\mathbf{B}}_{\varepsilon_1}|_C^{BI}, \quad (5.42)$$

$$\bar{\mathbf{B}}_{\varepsilon_2}(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi_1)\bar{\mathbf{B}}_{\varepsilon_2}|_D^{BI} + \frac{1}{2}(1 - \xi_1)\bar{\mathbf{B}}_{\varepsilon_2}|_B^{BI}. \quad (5.43)$$

- wielkości zastępcze  $\bar{\varepsilon}_\beta(\xi)$ ,  $\bar{\mathbf{B}}_{\varepsilon_\beta}(\xi)$  transformuje się z powrotem z bazy  $\{\xi, \mathbf{t}^0\}$  do aktualnej bazy w reprezentacji przestrzennej  $\{\mathbf{t}_i\}$  według (5.16) i następnie podstawia w miejsce wielkości  $\varepsilon_\beta(\xi)$ ,  $\mathbf{B}_{\varepsilon_\beta}(\xi)$  obliczonych w punktach całkowania zgodnie ze wzorami (2.39), (C.6)-(C.7).



Rys. 5.3. a) Położenie punktów pomiarowych A-D w elemencie wzorcowym dla dwustopniowej interpolacji odkształceń poprzecznych, b) zastosowane funkcje interpolujące dla odkształceń ścinania poprzecznego

W ten sposób koncepcja dwustopniowej interpolacji została zastosowana jedynie do odkształceń ścinania poprzecznego  $\varepsilon_\beta(\mathbf{u})$  w sformułowaniu hybrydowo-mieszanego elementu powłokowego. W pracy [349] w ramach podejścia ANS zmodyfikowano również macierz geometryczną. Jednak w analizach własnych uzyskano, że zaimplementowanie tej metody w ramach rozważanej teorii powłok nie zmieniło wyników, a spowodowało w niektórych przykładach nieznaczne zwiększenie liczby iteracji. Wyniki te nie zostały zaprezentowane w pracy ze względu na ograniczoną objętość rozprawy. Zatem macierz geometryczną obliczono w sposób klasyczny, opisany w Dodatku C.2.3.

## 5.6. Interpolacja niezależnych uogólnionych naprężeń

### 5.6.1. Elementy mieszane

W przypadku elementów hybrydowo-mieszanych naprężenia wewnątrz elementu skończonego oblicza się jako niezależne, a nie na podstawie odkształceń jak w klasycznych elementach przemieszczeniowych. W elementach mieszanych interpolację niezależnych uogólnionych naprężeń  $\mathbf{s}$  o składowych danych w (3.13) definiuje się następująco

$$\mathbf{s} = \mathbf{S}\mathbf{a}_{(e)}, \quad (5.44)$$

gdzie wektor  $\mathbf{a}_{(e)}$  zawiera 12 parametrów dla części stałej i różną liczbę parametrów dla zmiennej części pola naprężeń  $\tilde{\mathbf{S}}$  w zależności od wariantu elementu skończonego. Natomiast macierz  $\mathbf{S}$  przyjmuje się w postaci

$$\mathbf{S} = [\mathbf{1}_{12 \times 12}, \tilde{\mathbf{S}}] = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{4 \times 4} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{S}_m & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}_{2 \times 2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{S}_t & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1}_{4 \times 4} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{S}_b & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1}_{2 \times 2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{S}_d \end{bmatrix}. \quad (5.45)$$

W rozprawie analizuje się 2 warianty interpolacji dla zmiennej części pola naprężeń membranowych

$$\mathbf{S}_{m2} = \mathbf{T}_\sigma^0 \begin{bmatrix} \zeta_2^* & 0 \\ 0 & \zeta_1^* \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_{m4} = \mathbf{T}_\sigma^0 \begin{bmatrix} \zeta_2^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta_1^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_2^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \zeta_1^* \end{bmatrix}, \quad (5.46)$$

które dla niesymetrycznych miar naprężeń zostały zaproponowane we współrzędnych naturalnych w pracy [49]. Uboższy wariant interpolacji został następnie zastosowany m.in. w pracach [298, 299], natomiast bogatszy wariant w [294, 295]. Macierz  $\mathbf{S}_{m2}$  stanowi uogólnienie 5-parametrowej interpolacji naprężeń z pracy [254] na niesymetryczne miary naprężeń.

Interpolację dla zmiennej części uogólnionych naprężeń zgięciowych przyjmuje się następująco

$$\mathbf{S}_b = \mathbf{T}_\sigma^0 \begin{bmatrix} \zeta_2^* & 0 \\ 0 & \zeta_1^* \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.47)$$

Macierz (5.47) stanowi rozszerzenie interpolacji momentów zginających zastosowanej w pracach [137, 349] na rozważaną 6-parametrową nieliniową teorię powłok. Tymczasem macierz  $\mathbf{S}_t$  dla przekrojowych sił tnących przyjmuje się w ten sam sposób jak w pracach [137, 349]

$$\mathbf{S}_t = \tilde{\mathbf{T}}_\sigma^0 \begin{bmatrix} \zeta_2^* & 0 \\ 0 & \zeta_1^* \end{bmatrix}. \quad (5.48)$$

W rozprawie przeanalizowano dwa warianty interpolacji zmiennej części pola momentów owinięcia

$$\mathbf{S}_{d1} = \tilde{\mathbf{T}}_\sigma^0 \begin{bmatrix} \zeta_2^* \\ \zeta_1^* \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_{d2} = \tilde{\mathbf{T}}_\sigma^0 \begin{bmatrix} \zeta_2^* & 0 \\ 0 & \zeta_1^* \end{bmatrix}. \quad (5.49)$$

We wzorach (5.46)-(5.49) zastosowano następujące macierze transformacji

$$\mathbf{T}_\sigma^0 = \begin{bmatrix} J_{11}^0 J_{11}^0 & J_{12}^0 J_{12}^0 & J_{12}^0 J_{11}^0 & J_{11}^0 J_{12}^0 \\ J_{21}^0 J_{21}^0 & J_{22}^0 J_{22}^0 & J_{22}^0 J_{21}^0 & J_{21}^0 J_{22}^0 \\ J_{21}^0 J_{11}^0 & J_{22}^0 J_{12}^0 & J_{22}^0 J_{11}^0 & J_{21}^0 J_{12}^0 \\ J_{11}^0 J_{21}^0 & J_{12}^0 J_{22}^0 & J_{12}^0 J_{21}^0 & J_{11}^0 J_{22}^0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{T}}_\sigma^0 = \begin{bmatrix} J_{11}^0 & J_{12}^0 \\ J_{21}^0 & J_{22}^0 \end{bmatrix}, \quad (5.50)$$

które opisują transformację kontrawariantnych składowych uogólnionych naprężeń do fizycznego układu współrzędnych w środku elementu zgodnie z regułą transformacyjną (5.17). Za pomocą  $J_{\alpha\beta}^0$  oznaczono składowe macierzy Jacobiego (5.32) obliczonej w środku elementu standardowego.

### 5.6.2. Elementy częściowo mieszane

W elementach częściowo mieszanych interpolację wektora niezależnych uogólnionych naprężeń  $\bar{\mathbf{n}}$  danego wzorem (3.21) definiuje się w analogiczny sposób jak dla elementów mieszanych

$$\bar{\mathbf{n}}_S = \bar{\mathbf{S}}_S \mathbf{a}_{(e)}. \quad (5.51)$$

We wzorze (5.51) i w dalszej części rozdziału za pomocą etykiety S oznaczono, że macierze te dotyczą dwóch rodzajów elementów częściowo mieszanych: A i B.

W elementach częściowo mieszanych A wektor  $\mathbf{a}_{(e)}$  zawiera 4 parametry dla części stałej pola naprężeń membranowych i 2 lub 4 parametry dla części zmiennej, a macierz  $\bar{\mathbf{S}}_A$  zakłada się w postaci

$$\bar{\mathbf{S}}_A = [\mathbf{1}_{4 \times 4}, \mathbf{S}_m], \quad (5.52)$$

gdzie dla macierzy  $\mathbf{S}_m$  przyjmuje się w obliczeniach 2 warianty zgodnie ze wzorem (5.46).

Tymczasem dla elementów częściowo mieszanych B wektor  $\mathbf{a}_{(e)}$  tworzy 6 parametrów dla części stałej oraz 4 lub 6 parametrów dla zmiennej części pola naprężeń. W rozprawie przyjmuje się następującą postać macierzy  $\bar{\mathbf{S}}_B$

$$\bar{\mathbf{S}}_B = [\mathbf{1}_{6 \times 6}, \tilde{\mathbf{S}}] = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{4 \times 4} & \mathbf{0} & \mathbf{S}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}_{2 \times 2} & \mathbf{0} & \mathbf{S}_t \end{bmatrix}, \quad (5.53)$$

w której interpolację dla zmiennej części uogólnionych naprężeń membranowych oraz naprężeń ściania poprzecznego oblicza się odpowiednio zgodnie ze wzorami (5.46) i (5.48).

### 5.6.3. Lokalne warunki równowagi

Dla rozważanych elementów hybrydowo-mieszanych lokalne równania równowagi wynikają ze słabego sformułowania problemu brzegowego, zob. wzór (3.55). W literaturze (zob. np. [367]) zauważono, że przyjęcie interpolacji niezależnych uogólnionych naprężeń umożliwiającej spełnienie tych warunków korzystnie wpływa na dokładność elementu skończonego. W równaniach równowagi danych wzorami (2.27) i (2.28) poniżej pochodne kowariantne zastąpiono pochodnymi cząstkowymi, gdyż w implementacji teorii zastosowano ortogonalne współrzędne fizyczne  $\zeta$ . Ponadto w płaskim powłokowym elemencie skończonym zachodzi:  $b_a^\beta = 0$ ,  $b_{a\beta} = 0$ , a siły powierzchniowe  $\mathbf{f}$  i momenty powierzchniowe  $\mathbf{c}$  są zerowe. Zatem wzory (2.27) i (2.28) przyjmują następującą postać w składowych uogólnionych naprężeń

$$N_{,1}^{11} + N_{,2}^{21} = 0, \quad N_{,1}^{12} + N_{,2}^{22} = 0, \quad (5.54)$$

$$Q_{,1}^1 + Q_{,2}^2 = 0, \quad (5.55)$$

$$M_{,1}^{11} + M_{,2}^{21} - Q^1 = 0, \quad M_{,1}^{12} + M_{,2}^{22} - Q^2 = 0, \quad (5.56)$$

$$M_{,1}^1 + M_{,2}^2 + N^{12} - N^{21} = 0 \quad (5.57)$$

Równania równowagi (5.54)–(5.57) zostały zweryfikowane i omówione w Dodatku C.3. W przypadku elementów mieszanych należy sprawdzić wszystkie równania, dla elementów częściowo mieszanych A tylko równanie (5.54), a dla elementów częściowo mieszanych B równania (5.54) i (5.55).

## 5.7. Interpolacja niezależnych odkształceń wewnątrz elementu

### 5.7.1. Elementy mieszane

W rozważanych elementach powłokowych sformułowanych na podstawie zasady wariacyjnej Hu-Washizu oprócz odkształceń  $\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u})$  obliczanych na podstawie przemieszczeń (2.39)–(2.40) zakłada się na poziomie elementu skończonego pole niezależnych uogólnionych odkształceń  $\boldsymbol{\epsilon}$  o składowych zdefiniowanych w (3.12). W elementach mieszanych interpolację niezależnych odkształceń podzielono na dwie części zgodnie ze wzorem



$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{P}\boldsymbol{\beta}_{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_{(e)}^1 \\ \boldsymbol{\beta}_{(e)}^2 \end{bmatrix}. \quad (5.58)$$

### Pierwsza część interpolacji

W pierwszej części interpolacji macierz  $\mathbf{P}_1$  definiuje się w analogiczny sposób jak macierz  $\mathbf{S}$  dla niezależnych uogólnionych naprężeń. Podczas gdy macierz  $\mathbf{P}_2$  dla drugiej części interpolacji określa się w podobny sposób jak dla elementów EAS o wzbogaconym polu odkształceń, zob. np. [309]. W związku z tym macierz  $\mathbf{P}_2$  musi spełniać warunek ortogonalności względem założonej interpolacji dla uogólnionych naprężeń

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{P}_2^T \mathbf{S} d\zeta_1 d\zeta_2 = 0. \quad (5.59)$$

Pierwsza część wektora  $\boldsymbol{\beta}_{(e)}^1$  zawiera 12 parametrów dla części stałej oraz różną liczbę parametrów dla zmiennej części pola odkształceń. W macierzy  $\mathbf{P}_1$  przyjmuje się taką samą strukturę jak w macierzy  $\mathbf{S}$ , por. wzór (5.45)

$$\mathbf{P}_1 = [\mathbf{1}_{12 \times 12}, \tilde{\mathbf{P}}_1] = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{4 \times 4} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{P}_m & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}_{2 \times 2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{P}_t & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1}_{4 \times 4} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{P}_b & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1}_{2 \times 2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{P}_d \end{bmatrix}, \quad (5.60)$$

gdzie w indeksie dolnym podmacierzy pominięto cyfrę „1” w celu uproszczenia dalszego zapisu. Dla składowych membranowych odkształceń rozważa się 2 warianty interpolacji

$$\mathbf{P}_{m2} = \mathbf{T}_\varepsilon^0 \begin{bmatrix} \zeta_2^* & 0 \\ 0 & \zeta_1^* \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_{m4} = \mathbf{T}_\varepsilon^0 \begin{bmatrix} \zeta_2^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta_1^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_2^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \zeta_1^* \end{bmatrix}. \quad (5.61)$$

Interpolacja niesymetrycznych miar odkształceń określona za pomocą macierzy  $\mathbf{P}_{m4}$  dla  $\zeta_\alpha^* = \zeta_\alpha$  została zastosowana wcześniej w pracy [295]. Tymczasem macierz  $\mathbf{P}_{m2}$  stanowi uogólnienie 5-parametrowej interpolacji, użytej m.in. w [137, 349, 362], na niesymetryczne miary odkształceń membranowych.

Interpolację dla zmiennej części odkształceń ścinania poprzecznego i zgięciowych przyjęto w analogiczny sposób jak dla niezależnych uogólnionych naprężeń

$$\mathbf{P}_t = \tilde{\mathbf{T}}_\varepsilon^0 \begin{bmatrix} \zeta_2^* & 0 \\ 0 & \zeta_1^* \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_b = \mathbf{T}_\varepsilon^0 \begin{bmatrix} \zeta_2^* & 0 \\ 0 & \zeta_1^* \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.62)$$

Natomiast do interpolacji składowych odkształceń związanych z owinięciem użyto dwa warianty

$$\mathbf{P}_{d1} = (\tilde{\mathbf{T}}_\varepsilon^0)^{-T} \begin{bmatrix} \zeta_2^* \\ \zeta_1^* \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_{d2} = \tilde{\mathbf{T}}_\varepsilon^0 \begin{bmatrix} \zeta_2^* & 0 \\ 0 & \zeta_1^* \end{bmatrix}. \quad (5.63)$$

W pierwszym wariantcie interpolacji macierz  $\mathbf{P}_{d1}$  odpowiada przyjęciu dla owinięcia (oznaczanego tu przez  $\omega$ ) biliniowej interpolacji w postaci

$$\omega(\zeta_1, \zeta_2) = \omega_0 + \omega_1 \zeta_1 + \omega_2 \zeta_2 + \omega_3 \zeta_1 \zeta_2, \quad (5.64)$$

gdyż po linearyzacji zależności (2.40) odkształcenia  $\kappa_\alpha$  można wyznaczyć ze wzoru  $\kappa_\alpha = \omega_{,\alpha}$ . Natomiast w drugim wariancie interpolacji macierz  $\mathbf{P}_{d2}$  przyjmuje się taką samą jak dla ścinania poprzecznego. W rozprawie zakłada się, że macierze transformacji zastosowane we wzorach (5.61)–(5.63) są równe macierzom transformacji (5.50) użytym dla niezależnych uogólnionych naprężeń

$$\mathbf{T}_\varepsilon^0 = \mathbf{T}_\sigma^0, \quad \tilde{\mathbf{T}}_\varepsilon^0 = \tilde{\mathbf{T}}_\sigma^0. \quad (5.65)$$

Zatem, podobnie jak w pracach [137, 349, 362] również dla niezależnych odkształceń jest stosowana kontrawariantna transformacja składowych do fizycznego układu współrzędnych w środku elementu. Chociaż zgodnie ze wzorami (5.16) dla kowariantnych składowych odkształceń powinna być stosowana reguła kowariantna. Jednak w pracy [366] zaobserwowano, że dla elementów hybrydowo-mieszanych przyjęcie reguły kontrawariantnej zarówno dla niezależnych odkształceń i uogólnionych naprężeń daje najkorzystniejsze wyniki. W związku z tym jedynie w macierzy  $\mathbf{P}_{d1}$  zastosowano regułę kowariantną, aby umożliwić spełnienie warunku nierozdzielności, zob. Dodatek C.4.

### Druga część interpolacji

Druga część wektora  $\beta_{(e)}^2$  zawiera niezerowe parametry tylko w zmiennej części pola odkształceń membranowych i zgięciowych. Ze względu na zastosowanie dwustopniowej interpolacji odkształceń ścinania poprzecznego, zrezygnowano z dodatkowego wzbogacania pola odkształceń ścinających. Zatem, macierz  $\mathbf{P}_2$  można zapisać następująco

$$\mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{2m} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{P}_{2b} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^T. \quad (5.66)$$

Składowe membranowe i zgięciowe interpoluje się w ten sam sposób, stosując kowariantną regułę transformacji do fizycznego układu współrzędnych w środku elementu tzn.

$$\mathbf{P}_{2m} = \mathbf{P}_{2b} = \frac{j_0}{j} (\mathbf{T}_\sigma^0)^{-T} \mathbf{N}_k, \quad k=2,4,6,8,10, \quad (5.67)$$

gdzie przyjmuje się 5 wariantów macierzy  $\mathbf{N}_k$

$$\mathbf{N}_2 = \begin{bmatrix} \zeta_1 & 0 \\ 0 & \zeta_2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}_4 = \begin{bmatrix} \zeta_1 & 0 & \zeta_1\zeta_2 & 0 \\ 0 & \zeta_2 & 0 & \zeta_1\zeta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}_8 = \begin{bmatrix} \zeta_1 & \zeta_1\zeta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_2 & \zeta_1\zeta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \zeta_1 & \zeta_1\zeta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \zeta_2 & \zeta_1\zeta_2 \end{bmatrix}, \quad (5.68)$$

$$\mathbf{N}_6 = \begin{bmatrix} \zeta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_1 & \zeta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \zeta_1 & \zeta_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}_{10} = \begin{bmatrix} \zeta_1 & 0 & \zeta_1\zeta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta_2 & 0 & \zeta_1\zeta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_1\zeta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_1\zeta_2 \end{bmatrix}.$$

Drugą część interpolacji niezależnych odkształceń określono we współrzędnych naturalnych, aby możliwe było spełnienie warunku (5.59) dla stałych naprężeń. Macierze  $\mathbf{N}_2$  i  $\mathbf{N}_4$  stanowią proste rozszerzenie interpolacji zastosowanej w pracach [137, 182] na niesymetryczne miary odkształceń. Podobnie macierz  $\mathbf{N}_6$  można interpretować jako uogólnienie 4-parametrowej interpolacji opisanej po raz pierwszy w [309]. Natomiast macierze  $\mathbf{N}_8$  i  $\mathbf{N}_{10}$  zostały zaproponowane w pracy [370] jako rozszerzenie interpolacji zastosowanej w [10] na grunt 6-parametrowej nieliniowej teorii powłok.

### 5.7.2. Elementy częściowo mieszane

W elementach częściowo mieszanych interpolację niezależnych odkształceń  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$  o składowych określonych w (3.19) przeprowadza się również oddzielnie dla dwóch części

$$\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_S = \mathbf{P}_S \boldsymbol{\beta}_{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{1S} \\ \mathbf{P}_{2S} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_{(e)}^1 \\ \boldsymbol{\beta}_{(e)}^2 \end{bmatrix}, \quad S = A, B. \quad (5.69)$$

W elementach częściowo mieszanych A interpolacja wektora niezależnych odkształceń  $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_A$  (3.19) jest ograniczona tylko do jego składowych membranowych. W związku z tym pierwsza część wektora  $\boldsymbol{\beta}_{(e)}^1$  zawiera 4 parametry dla części stałej oraz 2 lub 4 parametry dla zmiennej części pola odkształceń. Macierz  $\mathbf{P}_{1A}$  zakłada się w postaci

$$\mathbf{P}_{1A} = [\mathbf{1}_{4 \times 4}, \mathbf{P}_m]. \quad (5.70)$$

W analizach przyjmuje się dwa warianty macierzy  $\mathbf{P}_m$  określone we wzorze (5.61). Natomiast druga część interpolacji zgodnie ze wzorem

$$\mathbf{P}_{2A} = \mathbf{P}_{2m} \quad (5.71)$$

jest określona za pomocą macierzy  $\mathbf{P}_{2m}$ , którą oblicza się na podstawie wzorów (5.67) i (5.68).

W elementach częściowo mieszanych B wektor  $\boldsymbol{\beta}_{(e)}^1$  tworzy 6 parametrów dla części stałej oraz 4 lub 6 parametrów dla zmiennej części pola odkształceń, a macierz  $\mathbf{P}_1$  (5.60) upraszcza się do postaci

$$\mathbf{P}_{1B} = [\mathbf{1}_{6 \times 6}, \tilde{\mathbf{P}}_{1B}] = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{4 \times 4} & \mathbf{0} & \mathbf{P}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}_{2 \times 2} & \mathbf{0} & \mathbf{P}_t \end{bmatrix}. \quad (5.72)$$

Macierze  $\mathbf{P}_m$  i  $\mathbf{P}_t$  definiujące zmienną część pola odkształceń wyznacza się w ten sam sposób jak dla elementów mieszanych na podstawie wzorów (5.61) i (5.62). Podczas gdy macierz  $\mathbf{P}_{2B}$  definiującą drugą część interpolacji przyjmuje się w postaci

$$\mathbf{P}_{2B} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{2m} \\ \mathbf{0}_{2 \times k} \end{bmatrix}, \quad (5.73)$$

gdzie macierz  $\mathbf{P}_{2m}$  jest dana wzorami (5.67) i (5.68).

### 5.7.3. Weryfikacja warunku ortogonalności dla wzbogaconych odkształceń

W rozważanych elementach hybrydowo-mieszanych drugą część pola niezależnych odkształceń oblicza się zgodnie z (5.58) i (5.69) jako  $\mathbf{P}_2 \boldsymbol{\beta}_{(e)}^2$  i interpretuje jako wzbogacone odkształcenia. Interpolacja wzbogaconych odkształceń musi być ortogonalna względem niezależnych uogólnionych naprężeń, aby możliwa była kondensacja parametrów  $\boldsymbol{\beta}_{(e)}^2$  na poziomie elementu. W celu sprawdzenia warunku (5.59) dla elementów mieszanych oblicza się całkę

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{P}_2^T \mathbf{S} d\zeta_1 d\zeta_2 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\mathbf{P}_{2m}^T + \mathbf{P}_{2m}^T \mathbf{S}_m + \mathbf{P}_{2b}^T + \mathbf{P}_{2b}^T \mathbf{S}_b) d\zeta_1 d\zeta_2. \quad (5.74)$$

Ze względu na równości  $\mathbf{P}_{2m} = \mathbf{P}_{2b}$  (zob. (5.67)) oraz  $\mathbf{S}_{m2} = \mathbf{S}_b$  (zob. (5.61) i (5.62)) dalsze rozważania można ograniczyć jedynie do członów zawierających składowe membranowe. Warunek dla macierzy  $\mathbf{P}_{2m}^T$  odpowiadającej stałej interpolacji niezależnych uogólnionych naprężeń przyjmuje postać

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{P}_{2m}^T d\zeta_1 d\zeta_2 = \frac{j_0}{j} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{N}_k^T (\mathbf{T}_\sigma^0)^{-1} d\zeta_1 d\zeta_2 = 0. \quad (5.75)$$

Warunek (5.75) jest spełniony dla każdej macierzy  $\mathbf{N}_k$ , gdyż w całce występują jedynie człony postaci  $q_0 \zeta_1$ ,  $q_1 \zeta_2$ ,  $q_2 \zeta_1 \zeta_2$  ( $q_i$  – dowolne stałe), które podczas całkowania się zerują. Natomiast warunek dla członu  $\mathbf{P}_{2m}^T \mathbf{S}_m$  odpowiadającego zmiennej części interpolacji naprężeń można zapisać następująco

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{P}_{2m}^T \mathbf{S}_m d\zeta_1 d\zeta_2 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{j_0}{j} \mathbf{N}_k^T (\mathbf{T}_\sigma^0)^{-1} \mathbf{T}_\sigma^0 \hat{\mathbf{S}}_m d\zeta_1 d\zeta_2 = \frac{j_0}{j} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{N}_k^T \hat{\mathbf{S}}_m d\zeta_1 d\zeta_2 = 0, \quad (5.76)$$

gdzie za pomocą  $\hat{\mathbf{S}}_m$  oznaczono macierz  $\mathbf{S}_m$  przed transformacją:  $\mathbf{S}_m = \mathbf{T}_\sigma^0 \hat{\mathbf{S}}_m$ . Warunek ortogonalności (5.76) będzie spełniony, jeśli w wyniku wymnożenia macierzy  $\mathbf{N}_k$  i  $\hat{\mathbf{S}}_m$  nie powstanie żaden człon postaci  $q \zeta_1^{2k} \zeta_2^{2l}$ , gdzie  $k$  i  $l$  są nieujemnymi liczbami całkowitymi, a  $q$  dowolną stałą. W przypadku określenia macierzy  $\mathbf{S}_m$  we współrzędnych skorygowanych  $\zeta_\alpha^s$  wystarczy, aby wyrazy w odpowiadających sobie wierszach macierzy  $\mathbf{N}_k$  i  $\hat{\mathbf{S}}_m$  się nie powtarzały. Natomiast w przypadku zdefiniowania macierzy  $\mathbf{S}_m$  we współrzędnych skośnych  $\{x_s, y_s\}$  ze względu na występowanie w nich członów  $c \zeta_1 \zeta_2$  ( $c = k_1, k_2$ , zob. (5.36)) warunek (5.76) jest dodatkowo niespełniony dla macierzy  $\mathbf{N}_k$  zawierających człon  $\zeta_1 \zeta_2$ . W tab. 5.1 zaznaczono plusem dla jakich kombinacji macierzy  $\mathbf{N}_k$  i  $\mathbf{S}_m$  warunek ortogonalności (5.76) jest spełniony dla elementów powłokowych o dowolnym kształcie.

Tabela 5.1. Weryfikacja warunku ortogonalności wzbogaconych odkształceń membranowych względem niezależnych uogólnionych naprężeń membranowych

		$\mathbf{N}_2$	$\mathbf{N}_4$	$\mathbf{N}_6$	$\mathbf{N}_8$	$\mathbf{N}_{10}$
Skorygowane współrzędne naturalne	$\mathbf{S}_{m2}$	+	+	+	+	+
	$\mathbf{S}_{m4}$	+	+	–	+	–
Współrzędne skośne	$\mathbf{S}_{m2}$	+	–	+	–	–
	$\mathbf{S}_{m4}$	+	–	–	–	–

#### 5.7.4. Warunki nierozdzielności odkształceń

W ramach rozważanej teorii powłok warunki nierozdzielności odkształceń zdefiniowano w podrozdziale 2.7. Ze słabego sformułowania problemu brzegowego (zob. wzór (3.55)) wynika związek  $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$  między niezależnymi odkształceniami i przemieszczeniami. Zatem, przyjęta interpolacja niezależnych odkształceń powinna umożliwiać spełnienie warunków nierozdzielności odkształceń. W warunkach tych danych wzorami (2.48) i (2.49) pochodne kowariantne zastąpiono pochodnymi cząstkowymi, gdyż w implementacji teorii zastosowano ortogonalne współrzędne fizyczne  $\zeta^i$ . Po założeniu, że dla płaskiego elementu powłokowego składowe krzywizny są zerowe ( $b_\alpha^\beta = 0$ ,  $b_{\alpha\beta} = 0$ ) wzory (2.48) i (2.49) przyjmują następującą postać w składowych niezależnych odkształceń (3.12)

$$\varepsilon_{11,2} - \varepsilon_{21,1} + \kappa_1 = 0, \quad \varepsilon_{12,2} - \varepsilon_{22,1} + \kappa_2 = 0, \quad (5.77)$$

$$\varepsilon_{1,2} - \varepsilon_{2,1} + \kappa_{12} - \kappa_{21} = 0, \quad (5.78)$$

$$\kappa_{22,1} - \kappa_{12,2} = 0, \quad \kappa_{11,2} - \kappa_{21,1} = 0, \quad (5.79)$$

$$\kappa_{1,2} - \kappa_{2,1} = 0. \quad (5.80)$$

Warunki nierozdzielności (5.77)-(5.80) zostały zweryfikowane i omówione w Dodatku C.4. W przypadku elementu mieszanego należy sprawdzić wszystkie warunki. Natomiast warunków nierozdzielności nie można zweryfikować dla elementów częściowo mieszanych ze względu na przyjętą strukturę wektorów niezależnych odkształceń  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_s$  (3.19), które nie zawierają składowych  $\kappa_{\alpha\beta}$ ,  $\kappa_\alpha$ .

## 5.8. Macierze elementowe

### 5.8.1. Interpolacja wirtualnych przemieszczeń wewnątrz elementu skończonego

W podrozdziale 3.2.1 za pomocą wzorów (3.6) zostały zdefiniowane wirtualne przemieszczenia  $\mathbf{w}$  (3.7) w reprezentacji przestrzennej. W każdym węźle elementu skończonego w globalnym układzie współrzędnych występują trzy wirtualne przesunięcia i trzy wirtualne obroty, które interpretuje się jako inżynierskie stopnie swobody. W związku z tym węzłowy wektor stopni swobody  $\delta \mathbf{q}_a$  ( $a = 1, 2, 3, 4$ ) i elementowy wektor stopni swobody  $\delta \mathbf{q}_{(e)}$  w globalnym układzie współrzędnych przyjmują postać

$$\delta \mathbf{q}_a = \{v_a \quad \bar{w}_a\}^T = \{v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad \bar{w}_1 \quad \bar{w}_2 \quad \bar{w}_3\}^T, \quad \delta \mathbf{q}_{(e)} = \begin{Bmatrix} \delta q_1 \\ \delta q_2 \\ \delta q_3 \\ \delta q_4 \end{Bmatrix}. \quad (5.81)$$

Sposób interpolacji dla wektora wirtualnych przesunięć  $\mathbf{v}(\xi)$  został opisany w podrozdziale 5.2, natomiast dla wektora wirtualnych obrotów  $\mathbf{w}(\xi)$  w podrozdziale A.3.3. W celu opisanego interpolacji wektora wirtualnych przemieszczeń  $\mathbf{w}(\xi)$  wprowadza się elementową macierz funkcji kształtu

$$\bar{\mathbf{L}}(\xi) = [\bar{\mathbf{L}}_1(\xi) \quad \bar{\mathbf{L}}_2(\xi) \quad \bar{\mathbf{L}}_3(\xi) \quad \bar{\mathbf{L}}_4(\xi)], \quad (5.82)$$

gdzie podmacierz funkcji kształtu  $\bar{\mathbf{L}}_a(\xi)$  dla węzła  $a$  po uwzględnieniu (A.35) przyjmuje postać

$$\bar{\mathbf{L}}_a(\xi) = \mathbf{Y}(\xi) L_a(\xi), \quad \mathbf{Y}(\xi) = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}(\xi) \end{bmatrix}. \quad (5.83)$$

We wzorze (5.83) wielkości  $L_a(\xi)$  oblicza się na podstawie (5.4). Wykorzystując zależności (5.81)-(5.83) interpolację wirtualnych przemieszczeń wewnątrz elementu można zapisać następująco

$$\mathbf{w}(\xi) = \begin{Bmatrix} \mathbf{v}(\xi) \\ \mathbf{w}(\xi) \end{Bmatrix} = \bar{\mathbf{L}}(\xi) \delta \mathbf{q}_{(e)}. \quad (5.84)$$

W ten sam sposób interpoluje się wektor rzeczywistych przyrostów przemieszczeń  $\Delta \mathbf{u}$  (3.50)

$$\Delta \mathbf{u}(\xi) = \bar{\mathbf{L}}(\xi) \Delta \mathbf{q}_{(e)}, \quad (5.85)$$

na podstawie wektora  $\Delta \mathbf{q}_{(e)}$ , który definiuje się analogicznie jak wektor  $\delta \mathbf{q}_{(e)}$  (5.81).

### 5.8.2. Elementy mieszane

Macierze elementowe w elementach mieszanych określa się na podstawie zlinearyzowanego warunku stacjonarności (5.2), który dla pojedynczego elementu skończonego  $\Pi_{(e)}$  po podstawieniu zależności (3.54) i (3.57) przyjmuje postać

$$\begin{aligned} & \iint_{\Pi_{(e)}} \left( \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} \Phi + \mathbf{s}^T \delta \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \delta \mathbf{s}^T \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \delta \mathbf{s}^T \boldsymbol{\varepsilon} - \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{s} \right) da + \delta V[\mathbf{u}; \mathbf{w}] + \\ & + \iint_{\Pi_{(e)}} \left( \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}^2}^2 \Phi \Delta \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{s}^T \Delta \delta \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \Delta \mathbf{s}^T \delta \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \delta \mathbf{s}^T \Delta \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \delta \mathbf{s}^T \Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \Delta \mathbf{s} \right) da = 0. \end{aligned} \quad (5.86)$$

Interpolację zależnych od przemieszczeń wirtualnych odkształceń i rzeczywistych przyrostów odkształceń przyjmuje się na podstawie wzoru (3.18)

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \mathbf{B} \mathbf{w} = \bar{\mathbf{B}} \delta \mathbf{q}_{(e)}, \quad \Delta \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \mathbf{B} \Delta \mathbf{u} = \bar{\mathbf{B}} \Delta \mathbf{q}_{(e)}, \quad \bar{\mathbf{B}} = \mathbf{B} \bar{\mathbf{L}}. \quad (5.87)$$

Natomiast do interpolacji niezależnych odkształceń oraz ich przyrostów stosuje się schemat opisany w podrozdziale 5.7 (zob. wzór (5.58))

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{P} \boldsymbol{\beta}_{(e)}, \quad \Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{P} \Delta \boldsymbol{\beta}_{(e)}, \quad \delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{P} \delta \boldsymbol{\beta}_{(e)}. \quad (5.88)$$

Interpolację niezależnych uogólnionych naprężeń opisano w podrozdziale 5.6, zgodnie z którym

$$\mathbf{s} = \mathbf{S} \boldsymbol{\alpha}_{(e)}, \quad \Delta \mathbf{s} = \mathbf{S} \Delta \boldsymbol{\alpha}_{(e)}, \quad \delta \mathbf{s} = \mathbf{S} \delta \boldsymbol{\alpha}_{(e)}. \quad (5.89)$$

Człon  $\mathbf{s}^T \Delta \delta \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$  biorąc pod uwagę zależność (C.9) można przekształcić do postaci

$$\mathbf{s}^T \Delta \delta \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \mathbf{w}^T \mathbf{k}_G \Delta \mathbf{u}, \quad (5.90)$$

gdzie macierz  $\mathbf{K}_G$  (zob. w Dodatku C.2.3) wyznacza się na podstawie niezależnych uogólnionych naprężeń. Tymczasem pochodne funkcji gęstości energii sprężystej po niezależnych odkształceniach są wyrażone wzorami

$$\partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} \Phi = \mathbf{C} \mathbf{P} \boldsymbol{\beta}_{(e)}, \quad \partial_{\boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}}^2 \Phi = \mathbf{C}. \quad (5.91)$$

Warunek stacjonarności (5.86) po podstawieniu zależności (5.87)-(5.91) przyjmuje postać

$$\begin{aligned} & \iint_{\Pi_{(e)}} \left( \delta \boldsymbol{\beta}_{(e)}^T \mathbf{P}^T \mathbf{C} \mathbf{P} \boldsymbol{\beta}_{(e)} + \delta \mathbf{q}_{(e)}^T \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{S} \boldsymbol{\alpha}_{(e)} + \delta \boldsymbol{\alpha}_{(e)}^T \mathbf{S}^T \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \delta \boldsymbol{\alpha}_{(e)}^T \mathbf{S}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\beta}_{(e)} - \delta \boldsymbol{\beta}_{(e)}^T \mathbf{P}^T \mathbf{S} \boldsymbol{\alpha}_{(e)} \right) da + \\ & + \delta V[\mathbf{u}; \mathbf{w}] + \iint_{\Pi_{(e)}} \left( \delta \boldsymbol{\beta}_{(e)}^T \mathbf{P}^T \mathbf{C} \mathbf{P} \Delta \boldsymbol{\beta}_{(e)} + \delta \mathbf{q}_{(e)}^T \bar{\mathbf{L}}^T \mathbf{k}_G \bar{\mathbf{L}} \Delta \mathbf{q}_{(e)} + \delta \mathbf{q}_{(e)}^T \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{S} \Delta \boldsymbol{\alpha}_{(e)} + \delta \boldsymbol{\alpha}_{(e)}^T \mathbf{S}^T \bar{\mathbf{B}} \Delta \mathbf{q}_{(e)} + \right. \\ & \left. - \delta \boldsymbol{\alpha}_{(e)}^T \mathbf{S}^T \mathbf{P} \Delta \boldsymbol{\beta}_{(e)} - \delta \boldsymbol{\beta}_{(e)}^T \mathbf{P}^T \mathbf{S} \Delta \boldsymbol{\alpha}_{(e)} \right) da = 0. \end{aligned} \quad (5.92)$$

Na podstawie wzoru (5.92) w celu uproszczenia dalszego zapisu definiuje się: macierz geometryczną

$$\mathbf{K}_G^{(e)} = \iint_{\Pi_{(e)}} \bar{\mathbf{L}}^T \mathbf{k}_G \bar{\mathbf{L}} da = \iint_{\Pi_{(e)}} \bar{\mathbf{L}}^T \mathbf{D}^T \mathbf{G} \mathbf{D} \bar{\mathbf{L}} da = \iint_{\Pi_{(e)}} \bar{\mathbf{D}}^T \mathbf{G} \bar{\mathbf{D}} da, \quad \bar{\mathbf{D}} = \mathbf{D} \bar{\mathbf{L}}, \quad (5.93)$$

macierze elementowe związane z niezależnymi odkształceniami i uogólnionymi naprężeniami

$$\mathbf{K}_{aq}^{(e)} = \iint_{\Pi_{(e)}} \mathbf{S}^T \bar{\mathbf{B}} da, \quad \mathbf{K}_{qa}^{(e)} = \left( \mathbf{K}_{aq}^{(e)} \right)^T, \quad \mathbf{K}_{\beta\alpha}^{(e)} = \iint_{\Pi_{(e)}} \mathbf{P}^T \mathbf{S} da, \quad \mathbf{K}_{\alpha\beta}^{(e)} = \left( \mathbf{K}_{\beta\alpha}^{(e)} \right)^T, \quad \mathbf{K}_{\beta\beta}^{(e)} = \iint_{\Pi_{(e)}} \mathbf{P}^T \mathbf{C} \mathbf{P} da \quad (5.94)$$

oraz następujące wektory elementowe związane odpowiednio z wirtualnymi przemieszczeniami, wirtualnymi niezależnymi odkształceniami oraz wirtualnymi niezależnymi naprężeniami

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_d^{(e)} &= \iint_{\Pi_{(e)}} \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{S} \boldsymbol{\alpha}_{(e)} da = \mathbf{K}_{qa}^{(e)} \boldsymbol{\alpha}_{(e)}, \quad \mathbf{r}_\beta^{(e)} = \iint_{\Pi_{(e)}} \mathbf{P}^T \mathbf{C} \mathbf{P} \boldsymbol{\beta}_{(e)} da - \iint_{\Pi_{(e)}} \mathbf{P}^T \mathbf{S} \boldsymbol{\alpha}_{(e)} da = \mathbf{K}_{\beta\beta}^{(e)} \boldsymbol{\beta}_{(e)} - \mathbf{K}_{\beta\alpha}^{(e)} \boldsymbol{\alpha}_{(e)}, \\ \mathbf{r}_\alpha^{(e)} &= \iint_{\Pi_{(e)}} \mathbf{S}^T \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) da - \iint_{\Pi_{(e)}} \mathbf{S}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\beta}_{(e)} da = \iint_{\Pi_{(e)}} \mathbf{S}^T \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) da - \mathbf{K}_{\alpha\beta}^{(e)} \boldsymbol{\beta}_{(e)}. \end{aligned} \quad (5.95)$$

Natomiast wariacja potencjału obciążenia dana wzorami (3.26) i (3.33) po uwzględnieniu interpolacji wektora wirtualnych przemieszczeń (5.84) przyjmuje postać

$$\delta V[\mathbf{u}; \mathbf{w}] = -G_e[\mathbf{u}; \mathbf{w}] = -\iint_{\Pi_{(e)}} \mathbf{w}^T \mathbf{p} da - \int_{\partial \Pi_{(e)}} \mathbf{w}^T \mathbf{s}^* dl = -\delta \mathbf{q}_{(e)} \iint_{\Pi_{(e)}} \bar{\mathbf{L}}^T \mathbf{p} da - \delta \mathbf{q}_{(e)} \int_{\partial \Pi_{(e)}} \bar{\mathbf{L}}^T \mathbf{s}^* dl, \quad (5.96)$$

na podstawie której wprowadza się elementowy wektor obciążeń zewnętrznych

$$\mathbf{p}^{(e)} = \iint_{\Pi_{(e)}} \bar{\mathbf{L}}^T \mathbf{p} da + \int_{\partial \Pi_{(e)}} \bar{\mathbf{L}}^T \mathbf{s}^* dl. \quad (5.97)$$

Powyższe macierze i wektory elementowe są obliczane za pomocą pełnego (2×2 punkty) całkowania numerycznego z wykorzystaniem kwadratury Gaussa-Legendre'a. W związku z tym, że całkowanie przeprowadza się w dziedzinie elementu wzorcowego  $\pi_{(e)}$  konieczna jest zamiana zmiennych, którą dla dowolnej wielkości  $\mathbf{f}$  na podstawie wzoru (5.18) można wyrazić następująco

$$\mathbf{F} = \iint_{\Pi_{(e)}} \mathbf{f}(\boldsymbol{\zeta}) da = \iint_{\pi_{(e)}} \mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}) j(\boldsymbol{\xi}) d\xi_1 d\xi_2. \quad (5.98)$$

Procedura całkowania numerycznego została bardziej szczegółowo opisana w Dodatku C.1.

### 5.8.3. Elementy częściowo mieszane

W elementach częściowo mieszanych zlinearyzowany warunek stacjonarności (5.2) na podstawie wzorów (3.60) i (3.63) można zapisać następująco

$$\begin{aligned} & \iint_{\Pi_{(e)}} \left( \Delta \delta \bar{\mathbf{K}}(\mathbf{u})^T \partial_{\bar{\mathbf{K}}} \Phi + \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \partial_{\boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}}^2 \Phi \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \bar{\mathbf{n}}^T \Delta \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u}) + \Delta \bar{\mathbf{n}}^T \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u}) + \delta \bar{\mathbf{n}}^T \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u}) - \delta \bar{\mathbf{n}}^T \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} - \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \Delta \bar{\mathbf{n}} \right) da + \\ & + \iint_{\Pi_{(e)}} \left( \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u})^T \bar{\mathbf{n}} + \delta \bar{\mathbf{K}}(\mathbf{u})^T \partial_{\bar{\mathbf{K}}} \Phi + \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} \Phi + \delta \bar{\mathbf{n}}^T \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u}) - \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \bar{\mathbf{n}} - \delta \bar{\mathbf{n}}^T \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \right) da + \delta V[\mathbf{u}; \mathbf{w}] = 0, \end{aligned} \quad (5.99)$$

gdzie człon  $\delta \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^T \partial_{\boldsymbol{\epsilon}}^2 \Phi \Delta \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}$  został rozpisany we wzorze (3.64). Na podstawie zależności (3.18) po dekompozycji operatora  $\mathbf{B}(\mathbf{u})$  na dwie części  $\mathbf{B}_1(\mathbf{u})$  i  $\mathbf{B}_2(\mathbf{u})$  interpolację zależnych od przemieszczeń wirtualnych odkształceń i rzeczywistych przyrostów odkształceń można wyrazić wzorami

$$\delta \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) = \begin{Bmatrix} \delta \bar{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{u}) \\ \delta \bar{\boldsymbol{\kappa}}(\mathbf{u}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{Bmatrix} \mathbf{w} = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_1 \\ \bar{\mathbf{B}}_2 \end{Bmatrix} \delta \mathbf{q}_{(e)}, \quad \begin{Bmatrix} \Delta \bar{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{u}) \\ \Delta \bar{\boldsymbol{\kappa}}(\mathbf{u}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{Bmatrix} \Delta \mathbf{u} = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_1 \\ \bar{\mathbf{B}}_2 \end{Bmatrix} \Delta \mathbf{q}_{(e)}, \quad \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_1 \\ \bar{\mathbf{B}}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{Bmatrix} \bar{\mathbf{L}}. \quad (5.100)$$

Interpolację niezależnych odkształceń i uogólnionych naprężeń oraz ich przyrostów definiuje się w analogiczny sposób jak dla elementów mieszanych odpowiednio na podstawie wzorów (5.69) i (5.51)

$$\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_S = \mathbf{P}_S \boldsymbol{\beta}_{(e)}, \quad \Delta \bar{\boldsymbol{\epsilon}}_S = \mathbf{P}_S \Delta \boldsymbol{\beta}_{(e)}, \quad \delta \bar{\boldsymbol{\epsilon}}_S = \mathbf{P}_S \delta \boldsymbol{\beta}_{(e)}, \quad (5.101)$$

$$\bar{\boldsymbol{s}}_S = \mathbf{S}_S \boldsymbol{\alpha}_{(e)}, \quad \Delta \bar{\boldsymbol{s}}_S = \mathbf{S}_S \Delta \boldsymbol{\alpha}_{(e)}, \quad \delta \bar{\boldsymbol{s}}_S = \mathbf{S}_S \delta \boldsymbol{\alpha}_{(e)}, \quad (5.102)$$

gdzie za pomocą etykiety  $S = A, B$  oznaczono typ elementu częściowo mieszanego. Macierz geometryczna  $\mathbf{k}_G$  (C.11) związana jest z następującymi członami w równaniu (5.99)

$$\Delta \delta \bar{\boldsymbol{\kappa}}(\mathbf{u})^T \partial_{\bar{\boldsymbol{\kappa}}} \Phi + \bar{\mathbf{n}}^T \Delta \delta \bar{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{u}) = \mathbf{w}^T \mathbf{k}_G \Delta \mathbf{u}. \quad (5.103)$$

W wyniku podstawienia zależności (3.61), (3.62), (5.100)-(5.103) do równania (5.99) otrzymano

$$\begin{aligned} & \iint_{\Pi_{(e)}} \left[ \delta \mathbf{q}_{(e)}^T \left( \bar{\mathbf{B}}_1^T \mathbf{S}_S \boldsymbol{\alpha}_{(e)} + \bar{\mathbf{B}}_2^T \partial_{\bar{\boldsymbol{\kappa}}} \Phi \right) + \delta \boldsymbol{\beta}_{(e)}^T \mathbf{P}_S^T \left( \partial_{\bar{\boldsymbol{\epsilon}}} \Phi - \mathbf{S}_S \boldsymbol{\alpha}_{(e)} \right) + \delta \boldsymbol{\alpha}_{(e)}^T \mathbf{S}_S^T \left( \bar{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{u}) - \mathbf{P}_S \boldsymbol{\beta}_{(e)} \right) \right] da + \delta V[\mathbf{u}; \mathbf{w}] + \\ & + \iint_{\Pi_{(e)}} \left( \delta \mathbf{q}_{(e)}^T \bar{\mathbf{L}}^T \mathbf{k}_G \bar{\mathbf{L}} \Delta \mathbf{q}_{(e)} + \delta \mathbf{q}_{(e)}^T \bar{\mathbf{B}}_1^T \mathbf{S}_S \Delta \boldsymbol{\alpha}_{(e)} + \delta \boldsymbol{\alpha}_{(e)}^T \mathbf{S}_S^T \bar{\mathbf{B}}_1 \Delta \mathbf{q}_{(e)} - \delta \boldsymbol{\alpha}_{(e)}^T \mathbf{S}_S^T \mathbf{P}_S \Delta \boldsymbol{\beta}_{(e)} - \delta \boldsymbol{\beta}_{(e)}^T \mathbf{P}_S^T \mathbf{S}_S \Delta \boldsymbol{\alpha}_{(e)} + \right. \\ & \left. + \delta \boldsymbol{\beta}_{(e)}^T \mathbf{P}_S^T \mathbf{C}_{11} \mathbf{P}_S \Delta \boldsymbol{\beta}_{(e)} + \delta \boldsymbol{\beta}_{(e)}^T \mathbf{P}_S^T \mathbf{C}_{12} \bar{\mathbf{B}}_2 \Delta \mathbf{q}_{(e)} + \delta \mathbf{q}_{(e)}^T \bar{\mathbf{B}}_2^T \mathbf{C}_{21} \mathbf{P}_S \Delta \boldsymbol{\beta}_{(e)} + \delta \mathbf{q}_{(e)}^T \bar{\mathbf{B}}_2^T \mathbf{C}_{22} \bar{\mathbf{B}}_2 \Delta \mathbf{q}_{(e)} \right) da = 0. \end{aligned} \quad (5.104)$$

Na podstawie warunku stacjonarności (5.104) w celu uproszczenia dalszego zapisu w elementach częściowo mieszanych wprowadza się: macierz materialną w postaci

$$\mathbf{K}_M^{(e)} = \iint_{\Pi_{(e)}} \bar{\mathbf{B}}_2^T \mathbf{C}_{22} \bar{\mathbf{B}}_2 da, \quad (5.105)$$

macierze elementowe związane z niezależnymi odkształceniami i uogólnionymi naprężeniami

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{\alpha q}^{(e)} &= \iint_{\Pi_{(e)}} \mathbf{S}_S^T \bar{\mathbf{B}}_1 da, \quad \mathbf{K}_{q\alpha}^{(e)} = \iint_{\Pi_{(e)}} \bar{\mathbf{B}}_1^T \mathbf{S}_S da, \quad \mathbf{K}_{\beta\alpha}^{(e)} = \iint_{\Pi_{(e)}} \mathbf{P}_S^T \mathbf{S}_S da, \quad \mathbf{K}_{\alpha\beta}^{(e)} = \iint_{\Pi_{(e)}} \mathbf{S}_S^T \mathbf{P}_S da, \\ \mathbf{K}_{\beta q}^{(e)} &= \iint_{\Pi_{(e)}} \mathbf{P}_S^T \mathbf{C}_{12} \bar{\mathbf{B}}_2 da, \quad \mathbf{K}_{q\beta}^{(e)} = \iint_{\Pi_{(e)}} \bar{\mathbf{B}}_2^T \mathbf{C}_{21} \mathbf{P}_S da, \quad \mathbf{K}_{\beta\beta}^{(e)} = \iint_{\Pi_{(e)}} \mathbf{P}_S^T \mathbf{C}_{11} \mathbf{P}_S da. \end{aligned} \quad (5.106)$$

oraz następujące wektory elementowe, w których uwzględniono zależności (3.61), (3.62)

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_d^{(e)} &= \iint_{\Pi_{(e)}} \bar{\mathbf{B}}_1^T \mathbf{S}_S \boldsymbol{\alpha}_{(e)} da + \iint_{\Pi_{(e)}} \bar{\mathbf{B}}_2^T \partial_{\bar{\boldsymbol{\kappa}}} \Phi da = \mathbf{K}_{q\alpha}^{(e)} \boldsymbol{\alpha}_{(e)} + \iint_{\Pi_{(e)}} \bar{\mathbf{B}}_2^T \left( \mathbf{C}_{21} \mathbf{P}_S \boldsymbol{\beta}_{(e)} + \mathbf{C}_{22} \bar{\boldsymbol{\kappa}}(\mathbf{u}) \right) da = \\ &= \mathbf{K}_{q\alpha}^{(e)} \boldsymbol{\alpha}_{(e)} + \mathbf{K}_{q\beta}^{(e)} \boldsymbol{\beta}_{(e)} + \iint_{\Pi_{(e)}} \bar{\mathbf{B}}_2^T \mathbf{C}_{22} \bar{\boldsymbol{\kappa}}(\mathbf{u}) da, \quad \mathbf{r}_\beta^{(e)} = \iint_{\Pi_{(e)}} \mathbf{P}_S^T \partial_{\bar{\boldsymbol{\epsilon}}} \Phi da - \iint_{\Pi_{(e)}} \mathbf{P}_S^T \mathbf{S}_S \boldsymbol{\alpha}_{(e)} da = \\ &= \iint_{\Pi_{(e)}} \mathbf{P}_S^T \left( \mathbf{C}_{11} \mathbf{P}_S \boldsymbol{\beta}_{(e)} + \mathbf{C}_{12} \bar{\boldsymbol{\kappa}}(\mathbf{u}) \right) da - \mathbf{K}_{\beta\alpha}^{(e)} \boldsymbol{\alpha}_{(e)} = \mathbf{K}_{\beta\beta}^{(e)} \boldsymbol{\beta}_{(e)} + \iint_{\Pi_{(e)}} \mathbf{P}_S^T \mathbf{C}_{12} \bar{\boldsymbol{\kappa}}(\mathbf{u}) da - \mathbf{K}_{\beta\alpha}^{(e)} \boldsymbol{\alpha}_{(e)}, \\ \mathbf{r}_\alpha^{(e)} &= \iint_{\Pi_{(e)}} \mathbf{S}_S^T \bar{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{u}) da - \iint_{\Pi_{(e)}} \mathbf{S}_S^T \mathbf{P}_S \boldsymbol{\beta}_{(e)} da = \iint_{\Pi_{(e)}} \mathbf{S}_S^T \bar{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{u}) da - \mathbf{K}_{\alpha\beta}^{(e)} \boldsymbol{\beta}_{(e)}. \end{aligned} \quad (5.107)$$

## 5.9. Układ równań zlinearyzowanych

### 5.9.1. Elementy mieszane

W elementach mieszanych zlinearyzowany warunek stacjonarności (5.92) funkcjonału Hu-Washizu po podstawieniu zależności (5.93)-(5.97) przyjmuje postać

$$\begin{aligned} & \delta \mathbf{\beta}_{(e)}^T \mathbf{r}_{\beta}^{(e)} + \delta \mathbf{q}_{(e)}^T \mathbf{r}_d^{(e)} + \delta \mathbf{\alpha}_{(e)}^T \mathbf{r}_{\alpha}^{(e)} - \delta \mathbf{q}_{(e)} \mathbf{p}^{(e)} + \delta \mathbf{\beta}_{(e)}^T \mathbf{K}_{\beta\beta}^{(e)} \Delta \mathbf{\beta}_{(e)} + \delta \mathbf{q}_{(e)}^T \mathbf{K}_G^{(e)} \Delta \mathbf{q}_{(e)} + \\ & + \delta \mathbf{q}_{(e)}^T \mathbf{K}_{q\alpha}^{(e)} \Delta \mathbf{\alpha}_{(e)} + \delta \mathbf{\alpha}_{(e)}^T \mathbf{K}_{\alpha q}^{(e)} \Delta \mathbf{q}_{(e)} - \delta \mathbf{\alpha}_{(e)}^T \mathbf{K}_{\alpha\beta}^{(e)} \Delta \mathbf{\beta}_{(e)} - \delta \mathbf{\beta}_{(e)}^T \mathbf{K}_{\beta\alpha}^{(e)} \Delta \mathbf{\alpha}_{(e)} = 0. \end{aligned} \quad (5.108)$$

Pogrupowanie członów równania (5.108) względem wirtualnych pól: przemieszczeń, niezależnych odkształceń oraz niezależnych naprężeń pozwala zapisać warunek (5.108) w postaci macierzowej

$$\begin{bmatrix} \delta \mathbf{q}_{(e)} \\ \delta \mathbf{\beta}_{(e)} \\ \delta \mathbf{\alpha}_{(e)} \end{bmatrix}^T \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{K}_G^{(e)} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{q\alpha}^{(e)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{\beta\beta}^{(e)} & -\mathbf{K}_{\beta\alpha}^{(e)} \\ \mathbf{K}_{\alpha q}^{(e)} & -\mathbf{K}_{\alpha\beta}^{(e)} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{q}_{(e)} \\ \Delta \mathbf{\beta}_{(e)} \\ \Delta \mathbf{\alpha}_{(e)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{r}_d^{(e)} - \mathbf{p}^{(e)} \\ \mathbf{r}_{\beta}^{(e)} \\ \mathbf{r}_{\alpha}^{(e)} \end{bmatrix} \right\} = \mathbf{0}. \quad (5.109)$$

Wobec dowolności pól wirtualnych  $\delta \mathbf{q}_{(e)}$ ,  $\delta \mathbf{\beta}_{(e)}$ ,  $\delta \mathbf{\alpha}_{(e)}$  równanie (5.109) jest równoważne następującemu układowi równań macierzowych

$$\begin{cases} \mathbf{K}_G^{(e)} \Delta \mathbf{q}_{(e)} + \mathbf{K}_{q\alpha}^{(e)} \Delta \mathbf{\alpha}_{(e)} + \mathbf{r}_d^{(e)} = \mathbf{p}^{(e)} \\ \mathbf{K}_{\beta\beta}^{(e)} \Delta \mathbf{\beta}_{(e)} - \mathbf{K}_{\beta\alpha}^{(e)} \Delta \mathbf{\alpha}_{(e)} + \mathbf{r}_{\beta}^{(e)} = \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{\alpha q}^{(e)} \Delta \mathbf{q}_{(e)} - \mathbf{K}_{\alpha\beta}^{(e)} \Delta \mathbf{\beta}_{(e)} + \mathbf{r}_{\alpha}^{(e)} = \mathbf{0} \end{cases}, \quad (5.110)$$

z którego możliwe jest wyznaczenie wartości parametrów  $\Delta \mathbf{\beta}_{(e)}$ ,  $\Delta \mathbf{\alpha}_{(e)}$  na poziomie elementu skończonego w zależności od wartości  $\Delta \mathbf{q}_{(e)}$  obliczonych w globalnym układzie równań.

### 5.9.2. Elementy częściowo mieszane

Dla elementów częściowo mieszanych uwzględnienie zależności (5.93), (5.97), (5.105)–(5.107) pozwala na zapisanie zlinearyzowanego warunku stacjonarności (5.104) w zwartej postaci

$$\begin{aligned} & \delta \mathbf{q}_{(e)}^T \mathbf{K}_G^{(e)} \Delta \mathbf{q}_{(e)} + \delta \mathbf{q}_{(e)}^T \mathbf{K}_{q\alpha}^{(e)} \Delta \mathbf{\alpha}_{(e)} + \delta \mathbf{\alpha}_{(e)}^T \mathbf{K}_{\alpha q}^{(e)} \Delta \mathbf{q}_{(e)} - \delta \mathbf{\alpha}_{(e)}^T \mathbf{K}_{\alpha\beta}^{(e)} \Delta \mathbf{\beta}_{(e)} - \delta \mathbf{\beta}_{(e)}^T \mathbf{K}_{\beta\alpha}^{(e)} \Delta \mathbf{\alpha}_{(e)} + \delta \mathbf{\beta}_{(e)}^T \mathbf{K}_{\beta\beta}^{(e)} \Delta \mathbf{\beta}_{(e)} + \\ & + \delta \mathbf{\beta}_{(e)}^T \mathbf{K}_{\beta q}^{(e)} \Delta \mathbf{q}_{(e)} + \delta \mathbf{q}_{(e)}^T \mathbf{K}_{q\beta}^{(e)} \Delta \mathbf{\beta}_{(e)} + \delta \mathbf{q}_{(e)}^T \mathbf{K}_M^{(e)} \Delta \mathbf{q}_{(e)} + \delta \mathbf{\beta}_{(e)}^T \mathbf{r}_{\beta}^{(e)} + \delta \mathbf{q}_{(e)}^T \mathbf{r}_d^{(e)} + \delta \mathbf{\alpha}_{(e)}^T \mathbf{r}_{\alpha}^{(e)} - \delta \mathbf{q}_{(e)} \mathbf{p}^{(e)} = 0. \end{aligned} \quad (5.111)$$

W wyniku odpowiednich przekształceń powyższe równanie można zapisać w postaci macierzowej analogicznej do postaci (5.109) dla elementów mieszanych

$$\begin{bmatrix} \delta \mathbf{q}_{(e)} \\ \delta \mathbf{\beta}_{(e)} \\ \delta \mathbf{\alpha}_{(e)} \end{bmatrix}^T \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{K}_G^{(e)} + \mathbf{K}_M^{(e)} & \mathbf{K}_{q\beta}^{(e)} & \mathbf{K}_{q\alpha}^{(e)} \\ \mathbf{K}_{\beta q}^{(e)} & \mathbf{K}_{\beta\beta}^{(e)} & -\mathbf{K}_{\beta\alpha}^{(e)} \\ \mathbf{K}_{\alpha q}^{(e)} & -\mathbf{K}_{\alpha\beta}^{(e)} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{q}_{(e)} \\ \Delta \mathbf{\beta}_{(e)} \\ \Delta \mathbf{\alpha}_{(e)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{r}_d^{(e)} - \mathbf{p}^{(e)} \\ \mathbf{r}_{\beta}^{(e)} \\ \mathbf{r}_{\alpha}^{(e)} \end{bmatrix} \right\} = \mathbf{0}. \quad (5.112)$$

Równanie (5.112) musi być spełnione dla dowolnych pól wirtualnych  $\delta \mathbf{q}_{(e)}$ ,  $\delta \mathbf{\beta}_{(e)}$ ,  $\delta \mathbf{\alpha}_{(e)}$ , zatem jest ono równoważne następującemu zlinearyzowanemu układowi równań macierzowych

$$\begin{cases} (\mathbf{K}_G^{(e)} + \mathbf{K}_M^{(e)}) \Delta \mathbf{q}_{(e)} + \mathbf{K}_{q\beta}^{(e)} \Delta \mathbf{\beta}_{(e)} + \mathbf{K}_{q\alpha}^{(e)} \Delta \mathbf{\alpha}_{(e)} + \mathbf{r}_d^{(e)} = \mathbf{p}^{(e)} \\ \mathbf{K}_{\beta q}^{(e)} \Delta \mathbf{q}_{(e)} + \mathbf{K}_{\beta\beta}^{(e)} \Delta \mathbf{\beta}_{(e)} - \mathbf{K}_{\beta\alpha}^{(e)} \Delta \mathbf{\alpha}_{(e)} + \mathbf{r}_{\beta}^{(e)} = \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{\alpha q}^{(e)} \Delta \mathbf{q}_{(e)} - \mathbf{K}_{\alpha\beta}^{(e)} \Delta \mathbf{\beta}_{(e)} + \mathbf{r}_{\alpha}^{(e)} = \mathbf{0} \end{cases}. \quad (5.113)$$

W przypadku analiz w zakresie sprężystym względem neutralnej powierzchni odniesienia powłoki podmacierze  $\mathbf{C}_{12}$  i  $\mathbf{C}_{21}$  macierzy konstytutywnej  $\mathbf{C}$  są zerowe, zatem  $\mathbf{K}_{q\beta}^{(e)} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{K}_{\beta q}^{(e)} = \mathbf{0}$ . W konsekwencji układ równań (5.113) upraszcza się do następującej postaci



$$\begin{cases} (\mathbf{K}_G^{(e)} + \mathbf{K}_M^{(e)}) \Delta \mathbf{q}_{(e)} + \mathbf{K}_{q\alpha}^{(e)} \Delta \boldsymbol{\alpha}_{(e)} + \mathbf{r}_d^{(e)} = \mathbf{p}^{(e)} \\ \mathbf{K}_{\beta\beta}^{(e)} \Delta \boldsymbol{\beta}_{(e)} - \mathbf{K}_{\beta\alpha}^{(e)} \Delta \boldsymbol{\alpha}_{(e)} + \mathbf{r}_\beta^{(e)} = \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{\alpha q}^{(e)} \Delta \mathbf{q}_{(e)} - \mathbf{K}_{\alpha\beta}^{(e)} \Delta \boldsymbol{\beta}_{(e)} + \mathbf{r}_\alpha^{(e)} = \mathbf{0} \end{cases}, \quad (5.114)$$

gdzie wektory  $\mathbf{r}_d^{(e)}$  i  $\mathbf{r}_\beta^{(e)}$  (5.107) wyznacza się za pomocą uproszczonych wzorów

$$\mathbf{r}_d^{(e)} = \mathbf{K}_{q\alpha}^{(e)} \boldsymbol{\alpha}_{(e)} + \iint_{\Pi_{(e)}} \bar{\mathbf{B}}_2^T \mathbf{C}_{22} \bar{\boldsymbol{\kappa}}(\mathbf{u}) da, \quad \mathbf{r}_\beta^{(e)} = \mathbf{K}_{\beta\beta}^{(e)} \boldsymbol{\beta}_{(e)} - \mathbf{K}_{\beta\alpha}^{(e)} \boldsymbol{\alpha}_{(e)}. \quad (5.115)$$

Struktura układu równań (5.114) jest analogiczna do tej dla elementów mieszanych, zob. wzór (5.110).

## 5.10. Kondensacja części wzbogaconej niezależnych odkształceń

### 5.10.1. Elementy mieszane

Warunek ortogonalności (5.59) wzbogaconych odkształceń względem niezależnych uogólnionych naprężeń pozwala na wyeliminowanie parametrów  $\Delta \boldsymbol{\beta}_{(e)}^2$  z układów równań (5.110), (5.113) i dzięki temu zmniejszenie liczby parametrów, które muszą być przechowywane w pamięci programu własnego w analizie nieliniowej. Eliminację części wzbogaconej niezależnych odkształceń dla elementów mieszanych dokonuje się przez statyczną kondensację parametrów  $\Delta \boldsymbol{\beta}_{(e)}^2$  z drugiego równania w układzie (5.110), które po uwzględnieniu (5.58) w zapisie macierzowym przyjmuje postać:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\beta\beta}^{11} & \mathbf{K}_{\beta\beta}^{12} \\ \mathbf{K}_{\beta\beta}^{21} & \mathbf{K}_{\beta\beta}^{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \boldsymbol{\beta}_{(e)}^1 \\ \Delta \boldsymbol{\beta}_{(e)}^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\beta\alpha}^1 \Delta \boldsymbol{\alpha}_{(e)} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{r}_\beta^1 \\ \mathbf{r}_\beta^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (5.116)$$

W równaniu (5.116) wprowadzono następujące macierze i wektory elementowe:

$$\mathbf{K}_{\beta\beta}^{\delta\lambda} = \iint_{\Pi_{(e)}} \mathbf{P}_\delta^T \mathbf{C} \mathbf{P}_\lambda da, \quad \mathbf{K}_{\beta\alpha}^\delta = \iint_{\Pi_{(e)}} \mathbf{P}_\delta^T \mathbf{S} da, \quad \mathbf{r}_\beta^\delta = \mathbf{K}_{\beta\beta}^{\delta 1} \boldsymbol{\beta}_1 + \mathbf{K}_{\beta\beta}^{\delta 2} \boldsymbol{\beta}_2 - \mathbf{K}_{\beta\alpha}^\delta \boldsymbol{\alpha}_{(e)}. \quad (5.117)$$

Po wyznaczeniu parametrów  $\Delta \boldsymbol{\beta}_{(e)}^2$  z drugiego równania w układzie (5.116) i podstawieniu ich do pierwszego równania skondensowana postać układu (5.116) jest następująca

$$\bar{\mathbf{K}}_{\beta\beta}^{11} \Delta \boldsymbol{\beta}_{(e)}^1 - \mathbf{K}_{\beta\alpha}^1 \Delta \boldsymbol{\alpha}_{(e)} + \bar{\mathbf{r}}_\beta^1 = \mathbf{0}, \quad (5.118)$$

gdzie

$$\bar{\mathbf{K}}_{\beta\beta}^{11} = \mathbf{K}_{\beta\beta}^{11} - \mathbf{K}_{\beta\beta}^{12} (\mathbf{K}_{\beta\beta}^{22})^{-1} \mathbf{K}_{\beta\beta}^{21}, \quad \bar{\mathbf{r}}_\beta^1 = \mathbf{r}_\beta^1 - \mathbf{K}_{\beta\beta}^{12} (\mathbf{K}_{\beta\beta}^{22})^{-1} \mathbf{r}_\beta^2 = \bar{\mathbf{K}}_{\beta\beta}^{11} \boldsymbol{\beta}_1 - \mathbf{K}_{\beta\alpha}^1 \boldsymbol{\alpha}_{(e)}. \quad (5.119)$$

W wyniku kondensacji wzbogaconej części niezależnych odkształceń układ równań (5.110) przyjmuje następującą postać

$$\begin{cases} \mathbf{K}_G^{(e)} \Delta \mathbf{q}_{(e)} + \mathbf{K}_{q\alpha}^{(e)} \Delta \boldsymbol{\alpha}_{(e)} + \mathbf{r}_d^{(e)} = \mathbf{p}^{(e)} \\ \bar{\mathbf{K}}_{\beta\beta}^{11} \Delta \boldsymbol{\beta}_{(e)}^1 - \mathbf{K}_{\beta\alpha}^1 \Delta \boldsymbol{\alpha}_{(e)} + \bar{\mathbf{r}}_\beta^1 = \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{\alpha q}^{(e)} \Delta \mathbf{q}_{(e)} - \mathbf{K}_{\alpha\beta}^1 \Delta \boldsymbol{\beta}_{(e)}^1 + \mathbf{r}_\alpha^1 = \mathbf{0} \end{cases}, \quad (5.120)$$

gdzie w trzecim równaniu skorzystano z warunku (5.59) i zastąpiono  $\mathbf{K}_{\alpha\beta}^{(e)}$  i  $\mathbf{r}_\alpha^{(e)}$  za pomocą odpowiednio

$$\mathbf{K}_{\alpha\beta}^1 = \iint_{\Pi_{(e)}} \mathbf{S}^T \mathbf{P}_1 da, \quad \mathbf{r}_\alpha^1 = \iint_{\Pi_{(e)}} \mathbf{S}^T \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) da - \mathbf{K}_{\alpha\beta}^1 \boldsymbol{\beta}_1. \quad (5.121)$$

### 5.10.2. Elementy częściowo mieszane

Kondensacja drugiej części niezależnych odkształceń w przypadku elementów częściowo mieszanych jest bardziej złożona ze względu na występowanie w układzie równań (5.113) członów  $\mathbf{K}_{\beta q}^{(e)}$  i  $\mathbf{K}_{q\beta}^{(e)}$ . Uwzględnienie podziału interpolacji niezależnych odkształceń na dwie części w drugim równaniu układu (5.113) pozwala na jego zapisanie w następującej postaci macierzowej

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\beta q}^1 \Delta \mathbf{q}_{(e)} \\ \mathbf{K}_{\beta q}^2 \Delta \mathbf{q}_{(e)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\beta\beta}^{11} & \mathbf{K}_{\beta\beta}^{12} \\ \mathbf{K}_{\beta\beta}^{21} & \mathbf{K}_{\beta\beta}^{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \boldsymbol{\beta}_{(e)}^1 \\ \Delta \boldsymbol{\beta}_{(e)}^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\beta\alpha}^1 \Delta \boldsymbol{\alpha}_{(e)} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{r}_\beta^1 \\ \mathbf{r}_\beta^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (5.122)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{\beta q}^\delta &= \iint_{\Pi_{(e)}} \mathbf{P}_{\delta S}^T \mathbf{C}_{12} \bar{\mathbf{B}}_2 da, \quad \mathbf{K}_{\beta\beta}^{\delta\lambda} = \iint_{\Pi_{(e)}} \mathbf{P}_{\delta S}^T \mathbf{C}_{11} \mathbf{P}_{\lambda S} da, \quad \mathbf{K}_{\beta\alpha}^\delta = \iint_{\Pi_{(e)}} \mathbf{P}_{\delta S}^T \mathbf{S}_S da, \\ \mathbf{r}_\beta^\delta &= \mathbf{K}_{\beta\beta}^{\delta 1} \boldsymbol{\beta}_1 + \mathbf{K}_{\beta\beta}^{\delta 2} \boldsymbol{\beta}_2 + \iint_{\Pi_{(e)}} \mathbf{P}_{\delta S}^T \mathbf{C}_{12} \bar{\mathbf{K}}(\mathbf{u}) da - \mathbf{K}_{\beta\alpha}^\delta \boldsymbol{\alpha}_{(e)}. \end{aligned} \quad (5.123)$$

Na podstawie drugiego równania w układzie (5.122) wyznaczono

$$\Delta \boldsymbol{\beta}_{(e)}^2 = -(\mathbf{K}_{\beta\beta}^{22})^{-1} (\mathbf{r}_\beta^2 + \mathbf{K}_{\beta\beta}^{21} \Delta \boldsymbol{\beta}_{(e)}^1 + \mathbf{K}_{\beta q}^2 \Delta \mathbf{q}_{(e)}). \quad (5.124)$$

Skondensowaną postać drugiego równania w układzie równań zlinearyzowanych (5.113) uzyskano przez podstawienie  $\Delta \boldsymbol{\beta}_{(e)}^2$  do pierwszego równania układu (5.122)

$$\bar{\mathbf{K}}_{\beta q}^1 \Delta \mathbf{q}_{(e)} + \bar{\mathbf{K}}_{\beta\beta}^{11} \Delta \boldsymbol{\beta}_{(e)}^1 - \mathbf{K}_{\beta\alpha}^1 \Delta \boldsymbol{\alpha}_{(e)} + \bar{\mathbf{r}}_\beta^1 = \mathbf{0}, \quad (5.125)$$

gdzie  $\bar{\mathbf{K}}_{\beta q}^{11}$  jest dane wzorem (5.119), natomiast  $\bar{\mathbf{K}}_{\beta q}^1$  i  $\bar{\mathbf{r}}_\beta^1$  są zdefiniowane następująco

$$\bar{\mathbf{K}}_{\beta q}^1 = \mathbf{K}_{\beta q}^1 - \mathbf{K}_{\beta\beta}^{12} (\mathbf{K}_{\beta\beta}^{22})^{-1} \mathbf{K}_{\beta q}^2, \quad \bar{\mathbf{r}}_\beta^1 = \bar{\mathbf{K}}_{\beta\beta}^{11} \boldsymbol{\beta}_1 - \mathbf{K}_{\beta\alpha}^1 \boldsymbol{\alpha}_{(e)} + \iint_{\Pi_{(e)}} \left[ \mathbf{P}_{1S}^T - \mathbf{K}_{\beta\beta}^{12} (\mathbf{K}_{\beta\beta}^{22})^{-1} \mathbf{P}_{2S}^T \right] \mathbf{C}_{12} \bar{\mathbf{K}}(\mathbf{u}) da. \quad (5.126)$$

Wstawienie zależności (5.124) do pierwszego równania układu (5.113) pozwala na statyczną kondensację, w wyniku której przyjmuje ono postać

$$(\mathbf{K}_G^{(e)} + \bar{\mathbf{K}}_M^{(e)}) \Delta \mathbf{q}_{(e)} + \bar{\mathbf{K}}_{q\beta}^1 \Delta \boldsymbol{\beta}_{(e)}^1 + \mathbf{K}_{q\alpha}^{(e)} \Delta \boldsymbol{\alpha}_{(e)} + \bar{\mathbf{r}}_d^{(e)} = \mathbf{p}^{(e)}, \quad (5.127)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{K}}_M^{(e)} &= \mathbf{K}_M^{(e)} - \mathbf{K}_{q\beta}^2 (\mathbf{K}_{\beta\beta}^{22})^{-1} \mathbf{K}_{\beta q}^2, \quad \bar{\mathbf{K}}_{q\beta}^1 = \mathbf{K}_{q\beta}^1 - \mathbf{K}_{q\beta}^2 (\mathbf{K}_{\beta\beta}^{22})^{-1} \mathbf{K}_{\beta\beta}^{21}, \\ \bar{\mathbf{r}}_d^{(e)} &= \mathbf{K}_{q\alpha}^{(e)} \boldsymbol{\alpha}_{(e)} + \bar{\mathbf{K}}_{q\beta}^1 \boldsymbol{\beta}_1 + \iint_{\Pi_{(e)}} \left[ \bar{\mathbf{B}}_2^T \mathbf{C}_{22} - \mathbf{K}_{q\beta}^2 (\mathbf{K}_{\beta\beta}^{22})^{-1} \mathbf{P}_{2S}^T \mathbf{C}_{12} \right] \bar{\mathbf{K}}(\mathbf{u}) da. \end{aligned} \quad (5.128)$$

Wstawienie skondensowanych równań (5.125) i (5.127) do układu równań (5.113) oraz wykorzystanie warunku ortogonalności (5.59) w trzecim równaniu pozwala na wyeliminowanie parametrów  $\Delta \boldsymbol{\beta}_{(e)}^2$

$$\begin{cases} (\mathbf{K}_G^{(e)} + \bar{\mathbf{K}}_M^{(e)}) \Delta \mathbf{q}_{(e)} + \bar{\mathbf{K}}_{q\beta}^1 \Delta \boldsymbol{\beta}_{(e)}^1 + \mathbf{K}_{q\alpha}^{(e)} \Delta \boldsymbol{\alpha}_{(e)} + \bar{\mathbf{r}}_d^{(e)} = \mathbf{p}^{(e)} \\ \bar{\mathbf{K}}_{\beta q}^1 \Delta \mathbf{q}_{(e)} + \bar{\mathbf{K}}_{\beta\beta}^{11} \Delta \boldsymbol{\beta}_{(e)}^1 - \mathbf{K}_{\beta\alpha}^1 \Delta \boldsymbol{\alpha}_{(e)} + \bar{\mathbf{r}}_\beta^1 = \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{\alpha q}^{(e)} \Delta \mathbf{q}_{(e)} - \mathbf{K}_{\alpha\beta}^1 \Delta \boldsymbol{\beta}_{(e)}^1 + \mathbf{r}_\alpha^1 = \mathbf{0} \end{cases}. \quad (5.129)$$

W trzecim równaniu układu (5.129) wprowadzono  $\mathbf{K}_{\alpha\beta}^1 = \iint_{\Pi_{(e)}} \mathbf{S}_S^T \mathbf{P}_{1S} da$  i  $\mathbf{r}_\alpha^1 = \iint_{\Pi_{(e)}} \mathbf{S}_S^T \bar{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{u}) da - \mathbf{K}_{\alpha\beta}^1 \boldsymbol{\beta}_1$ .

W szczególnym przypadku analizy w zakresie sprężystym, względem neutralnej powierzchni odniesienia powłoki, układ równań (5.129) po skorzystaniu z równości:  $\mathbf{K}_{q\beta}^{(e)} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{K}_{\beta q}^{(e)} = \mathbf{0}$  upraszcza się do postaci

$$\begin{cases} (\mathbf{K}_G^{(e)} + \mathbf{K}_M^{(e)}) \Delta \mathbf{q}_{(e)} + \mathbf{K}_{qa}^{(e)} \Delta \boldsymbol{\alpha}_{(e)} + \mathbf{r}_d^{(e)} = \mathbf{p}^{(e)} \\ \bar{\mathbf{K}}_{\beta\beta}^{11} \Delta \boldsymbol{\beta}_{(e)}^1 - \mathbf{K}_{\beta\alpha}^1 \Delta \boldsymbol{\alpha}_{(e)} + \bar{\mathbf{r}}_\beta^1 = \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{aq}^{(e)} \Delta \mathbf{q}_{(e)} - \mathbf{K}_{a\beta}^1 \Delta \boldsymbol{\beta}_{(e)}^1 + \mathbf{r}_\alpha^1 = \mathbf{0} \end{cases}, \quad (5.130)$$

gdzie wektor  $\bar{\mathbf{r}}_\beta^1$  (5.126) można wyznaczyć z uproszczonego wzoru  $\bar{\mathbf{r}}_\beta^1 = \bar{\mathbf{K}}_{\beta\beta}^{11} \boldsymbol{\beta}_1 - \mathbf{K}_{\beta\alpha}^1 \boldsymbol{\alpha}_{(e)}$ .

## 5.11. Wyznaczenie stycznej macierzy sztywności

### 5.11.1 Wprowadzenie

Korzystając z tego, że pola niezależnych odkształceń i uogólnionych naprężeń są ciągle tylko lokalnie wewnątrz elementu skończonego, można przeprowadzić kondensację statyczną tych pól na poziomie elementu. W przypadku gdy liczba parametrów  $\boldsymbol{\alpha}_{(e)}$  i  $\boldsymbol{\beta}_{(e)}^1$  jest taka sama stosuje się sposób kondensacji układu równań zlinearyzowanych opisany m.in. w pracach [182, 349]. W niniejszej rozprawie zastosowano również ten sposób, ponieważ w podrozdziałach 5.6 i 5.7 przyjęto analogiczną interpolację dla niezależnych uogólnionych naprężeń oraz pierwszej części niezależnych odkształceń.

### 5.11.2 Elementy mieszane

W przypadku elementów mieszanych kondensację statyczną układu równań (5.120), otrzymanego w wyniku wyeliminowania drugiej części niezależnych odkształceń, przeprowadza się przez wyznaczenie odpowiednio  $\Delta \boldsymbol{\beta}_{(e)}^1$  z trzeciego równania i  $\Delta \boldsymbol{\alpha}_{(e)}$  z drugiego równania

$$\Delta \boldsymbol{\beta}_{(e)}^1 = (\mathbf{K}_{a\beta}^1)^{-1} (\mathbf{K}_{aq}^{(e)} \Delta \mathbf{q}_{(e)} + \mathbf{r}_\alpha^1), \quad (5.131)$$

$$\Delta \boldsymbol{\alpha}_{(e)} = (\mathbf{K}_{\beta\alpha}^1)^{-1} (\bar{\mathbf{K}}_{\beta\beta}^{11} \Delta \boldsymbol{\beta}_{(e)}^1 + \bar{\mathbf{r}}_\beta^1). \quad (5.132)$$

Po podstawieniu  $\Delta \boldsymbol{\beta}_{(e)}^1$  (5.131) do równania (5.132) otrzymano następującą zależność

$$\Delta \boldsymbol{\alpha}_{(e)} = (\mathbf{K}_{\beta\alpha}^1)^{-1} \bar{\mathbf{K}}_{\beta\beta}^{11} (\mathbf{K}_{a\beta}^1)^{-1} \mathbf{K}_{aq}^{(e)} \Delta \mathbf{q}_{(e)} + (\mathbf{K}_{\beta\alpha}^1)^{-1} \bar{\mathbf{K}}_{\beta\beta}^{11} (\mathbf{K}_{a\beta}^1)^{-1} \mathbf{r}_\alpha^1 + (\mathbf{K}_{\beta\alpha}^1)^{-1} \bar{\mathbf{r}}_\beta^1. \quad (5.133)$$

W celu kondensacji parametrów  $\Delta \boldsymbol{\beta}_{(e)}^1$  i  $\Delta \boldsymbol{\alpha}_{(e)}$  na poziomie elementu zależność (5.133) wstawiono do pierwszego równania układu (5.120), uzyskując zlinearyzowany warunek stacjonarności w zwartej postaci macierzowej

$$\mathbf{K}_T^{(e)} \Delta \mathbf{q}_{(e)} = \mathbf{p}^{(e)} - \mathbf{r}^{(e)}, \quad (5.134)$$

gdzie za pomocą  $\mathbf{K}_T^{(e)}$  oznaczono elementową styczną macierz sztywności daną wzorem

$$\mathbf{K}_T^{(e)} = \mathbf{K}_G^{(e)} + \mathbf{K}_{qa}^{(e)} (\mathbf{K}_{\beta\alpha}^1)^{-1} \bar{\mathbf{K}}_{\beta\beta}^{11} (\mathbf{K}_{a\beta}^1)^{-1} \mathbf{K}_{aq}^{(e)}, \quad (5.135)$$

a za pomocą  $\mathbf{r}^{(e)}$  elementowy wektor sił wewnętrznych określony następująco

$$\mathbf{r}^{(e)} = \mathbf{r}_d^{(e)} + \mathbf{K}_{qa}^{(e)} \left[ (\mathbf{K}_{\beta\alpha}^1)^{-1} \bar{\mathbf{K}}_{\beta\beta}^{11} (\mathbf{K}_{a\beta}^1)^{-1} \mathbf{r}_\alpha^1 + (\mathbf{K}_{\beta\alpha}^1)^{-1} \bar{\mathbf{r}}_\beta^1 \right]. \quad (5.136)$$

### 5.11.3. Elementy częściowo mieszane

W analogiczny sposób jak powyżej przeprowadza się kondensację układu równań (5.129) dla elementów częściowo mieszanych. Najpierw wyznacza się  $\Delta \boldsymbol{\alpha}_{(e)}$  z drugiego równania układu (5.129)

$$\Delta \boldsymbol{\alpha}_{(e)} = (\mathbf{K}_{\beta\alpha}^1)^{-1} (\bar{\mathbf{K}}_{\beta q}^{11} \Delta \mathbf{q}_{(e)} + \bar{\mathbf{K}}_{\beta\beta}^{11} \Delta \boldsymbol{\beta}_{(e)}^1 + \bar{\mathbf{r}}_\beta^1) \quad (5.137)$$

oraz  $\Delta \mathbf{\beta}_{(e)}^1$  za pomocą wzoru (5.131). Następnie podstawia się  $\Delta \mathbf{\beta}_{(e)}^1$  do równania (5.137) uzyskując

$$\Delta \mathbf{a}_{(e)} = \left[ \left( \mathbf{K}_{\beta\alpha}^1 \right)^{-1} \bar{\mathbf{K}}_{\beta\beta}^{11} \left( \mathbf{K}_{\alpha\beta}^1 \right)^{-1} \mathbf{K}_{\alpha q}^{(e)} + \left( \mathbf{K}_{\beta\alpha}^1 \right)^{-1} \bar{\mathbf{K}}_{\beta q}^1 \right] \Delta \mathbf{q}_{(e)} + \left( \mathbf{K}_{\beta\alpha}^1 \right)^{-1} \bar{\mathbf{K}}_{\beta\beta}^{11} \left( \mathbf{K}_{\alpha\beta}^1 \right)^{-1} \mathbf{r}_\alpha^1 + \left( \mathbf{K}_{\beta\alpha}^1 \right)^{-1} \bar{\mathbf{r}}_\beta^1. \quad (5.138)$$

Ostatecznie po podstawieniu zależności (5.131) i (5.138) do pierwszego równania układu (5.129) otrzymano klasyczną postać równania zlinearyzowanego dla elementu skończonego

$$\mathbf{K}_{TS}^{(e)} \Delta \mathbf{q}_{(e)} = \mathbf{p}^{(e)} - \mathbf{r}_S^{(e)}, \quad (5.139)$$

gdzie macierz  $\mathbf{K}_{TS}^{(e)}$  i wektor  $\mathbf{r}_S^{(e)}$  w przypadku elementów częściowo mieszanych przyjmują formę

$$\mathbf{K}_{TS}^{(e)} = \mathbf{K}_G^{(e)} + \bar{\mathbf{K}}_M^{(e)} + \bar{\mathbf{K}}_{q\beta}^1 \left( \mathbf{K}_{\alpha\beta}^1 \right)^{-1} \mathbf{K}_{\alpha q}^{(e)} + \mathbf{K}_{q\alpha}^{(e)} \left( \mathbf{K}_{\beta\alpha}^1 \right)^{-1} \bar{\mathbf{K}}_{\beta\beta}^{11} \left( \mathbf{K}_{\alpha\beta}^1 \right)^{-1} \mathbf{K}_{\alpha q}^{(e)} + \mathbf{K}_{q\alpha}^{(e)} \left( \mathbf{K}_{\beta\alpha}^1 \right)^{-1} \bar{\mathbf{K}}_{\beta q}^1, \quad (5.140)$$

$$\mathbf{r}_S^{(e)} = \mathbf{r}_d^{(e)} + \left[ \mathbf{K}_{q\alpha}^{(e)} \left( \mathbf{K}_{\beta\alpha}^1 \right)^{-1} \bar{\mathbf{K}}_{\beta\beta}^{11} \left( \mathbf{K}_{\alpha\beta}^1 \right)^{-1} + \bar{\mathbf{K}}_{q\beta}^1 \left( \mathbf{K}_{\alpha\beta}^1 \right)^{-1} \right] \mathbf{r}_\alpha^1 + \mathbf{K}_{q\alpha}^{(e)} \left( \mathbf{K}_{\beta\alpha}^1 \right)^{-1} \bar{\mathbf{r}}_\beta^1. \quad (5.141)$$

W szczególnym przypadku analizy w zakresie sprężystym względem neutralnej powierzchni odniesienia powłoki wobec  $\mathbf{K}_{q\beta}^{(e)} = 0$ ,  $\mathbf{K}_{\beta q}^{(e)} = 0$  wektor  $\mathbf{r}_S^{(e)}$  jest dany wzorem (5.136) a macierz styczna

$$\mathbf{K}_{TS}^{(e)} = \mathbf{K}_G^{(e)} + \mathbf{K}_M^{(e)} + \mathbf{K}_{q\alpha}^{(e)} \left( \mathbf{K}_{\beta\alpha}^1 \right)^{-1} \bar{\mathbf{K}}_{\beta\beta}^{11} \left( \mathbf{K}_{\alpha\beta}^1 \right)^{-1} \mathbf{K}_{\alpha q}^{(e)}. \quad (5.142)$$

Opisany sposób kondensacji układu równań zlinearyzowanych jednak nie może zostać użyty gdy liczba parametrów  $\mathbf{a}_{(e)}$  i  $\mathbf{\beta}_{(e)}^1$  jest różna, ponieważ wtedy niemożliwe jest wyznaczenie macierzy odwrotnych do macierzy  $\mathbf{K}_{\alpha\beta}^1$  i  $\mathbf{K}_{\beta\alpha}^1$ . Różną liczbę parametrów dla niezależnych odkształceń i uogólnionych naprężeń przyjęto np. w pracy [362]. W takim przypadku stosuje się uniwersalną metodę kondensacji układu równań zlinearyzowanych zob. np. w pracy [137]. Ten uniwersalny sposób kondensacji dla elementów mieszanych został opisany w Dodatku C.5. Jednak metoda kondensacji opisana w tym podrozdziale jest bardziej efektywna obliczeniowo, gdyż macierze  $\mathbf{K}_{\alpha\beta}^1$  i  $\mathbf{K}_{\beta\alpha}^1$ , które muszą być odwrócone w trakcie kondensacji:

- nie zmieniają się w trakcie analizy nieliniowej;
- mają strukturę diagonalną;
- można je łatwo wyznaczyć analitycznie.

Tymczasem takich własności nie ma macierz, która musi zostać odwrócona w uniwersalnej metodzie kondensacji omówionej w Dodatku C.5.

#### 5.11.4. Globalne równanie macierzowe

Macierze globalne buduje się w sposób klasyczny zob. np. [21, 384] przez agregację macierzy elementowych

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{A}_{e=1}^{N_e} \mathbf{K}_T^{(e)}, \quad \mathbf{p} = \mathbf{A}_{e=1}^{N_e} \mathbf{p}^{(e)}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{A}_{e=1}^{N_e} \mathbf{r}^{(e)}, \quad (5.143)$$

gdzie  $\mathbf{K}_T$  jest globalną styczną macierzą sztywności,  $\mathbf{p}$  globalnym wektorem węzłowych sił zewnętrznych, a  $\mathbf{r}$  globalnym wektorem węzłowych sił wewnętrznych. Natomiast symbol  $\mathbf{A}$  oznacza agregację, która polega na odpowiednim sumowaniu współczynników macierzy elementowych związanych z tymi samymi globalnymi stopniami swobody, w celu określenia wyrazów macierzy globalnej o znacznie większym rozmiarze. Agregowane wyrazy macierzy elementowych muszą być odniesione do tego samego układu współrzędnych i mieć takie same znaczenie fizyczne. Wyznaczenie macierzy globalnych pozwala na zdefiniowanie globalnego równania macierzowego MES w postaci

$$\mathbf{K}_T \Delta \mathbf{q} = \mathbf{p} - \mathbf{r}, \quad (5.144)$$

gdzie  $\Delta \mathbf{q}$  oznacza globalny wektor uogólnionych przyrostów przemieszczeń. Równanie (5.144) jest podstawą rozwiązania przyrostowo-iteracyjnego badanego problemu brzegowego, które zostało opisane w Dodatku B.2.

## 5.12. Aktualizacja zmiennych

W każdym przyroście i iteracji w wyniku rozwiązania globalnego układu równań (5.144) wyznaczony jest globalny wektor  $\Delta \mathbf{q} = (\Delta \mathbf{u}, \Delta \boldsymbol{\psi}) \in \mathbb{W}_A$ . Algorytm rozwiązania globalnego układu równań zależy od zastosowanej techniki śledzenia ścieżek równowagi, które zostały opisane w Dodatku B.3. Następnie w wyniku procedury ekstrakcji z wektora  $\Delta \mathbf{q}$  dla każdego elementu wyznacza się elementowy wektor przyrostów translacji i obrotów  $\Delta \mathbf{q}_{(e)}$ . Na jego podstawie możliwe jest obliczenie przyrostów  $\Delta \boldsymbol{\beta}_{(e)}^1$  i  $\Delta \boldsymbol{\alpha}_{(e)}$  odpowiednio przez zastosowanie wzorów (5.131) i (5.132) dla elementów mieszanych i zależności (5.131) i (5.137) w przypadku elementów częściowo mieszanych. Następnie dokonuje się w każdym przyroście i iteracji aktualizacji globalnego wektora przemieszczeń  $\mathbf{q}$ , która oznacza sumowanie dla pól translacji  $\mathbf{u}$  oraz multiplikatywną akumulację rotacji w reprezentacji przestrzennej zgodną ze wzorem (A.23) dla tensorów obrotu  $\mathbf{Q}$

$$\mathbf{u}^{i+1} = \mathbf{u}^i + \Delta \mathbf{u}, \quad \mathbf{Q}^{i+1} = \Delta \mathbf{Q} \mathbf{Q}^i, \quad (5.145)$$

gdzie za pomocą  $i$  oznaczono numer kolejnej iteracji/przyrostu. Bardziej szczegółową indeksację różniącą kolejne konfiguracje(przyrosty) i iteracje zastosowano w Dodatku B.2. Poprawkę tensora obrotu  $\Delta \mathbf{Q}$  w zastosowanej parametryzacji kanonicznej oblicza się za pomocą wzorów

$$\Delta \mathbf{Q} = \exp(\Delta \boldsymbol{\Psi}), \quad \Delta \boldsymbol{\Psi} = \text{ad}(\Delta \boldsymbol{\psi}). \quad (5.146)$$

Natomiast aktualizację parametrów dla niezależnych odkształceń i uogólnionych naprężeń przeprowadza się w standardowy sposób na poziomie elementu w każdym przyroście i iteracji

$$\boldsymbol{\beta}_1^{i+1} = \boldsymbol{\beta}_1^i + \Delta \boldsymbol{\beta}_1^{(e)}, \quad \boldsymbol{\alpha}_{(e)}^{i+1} = \boldsymbol{\alpha}_{(e)}^i + \Delta \boldsymbol{\alpha}_{(e)}. \quad (5.147)$$

W celu aktualizacji parametrów konieczne jest przechowywanie w pamięci programu własnego wektorów parametrów  $\boldsymbol{\alpha}_{(e)}$  i  $\boldsymbol{\beta}_{(e)}^1$  oraz macierzy elementowych niezbędnych do wyznaczenia przyrostów tych parametrów (zob. wzory (5.131), (5.132) i (5.137)) dla wszystkich elementów skończonych. W związku z tym, że w ramach niniejszej rozprawy przyjmuje się sprężysty model materiału, to macierze elementowe w drugim równaniu układów (5.120) i (5.130) pozostają stałe w trakcie analizy geometrycznie nieliniowej. W konsekwencji dla elementów mieszanych oraz dla elementów częściowo mieszanych (w podejściu powierzchni neutralnej) drugie równania układów (5.120) i (5.130) są spełnione w sposób ścisły i zachodzi  $\bar{\mathbf{r}}_\beta^1 = \mathbf{0}$ , na co zwrócono uwagę w pracy [137]. Ta szczególna własność pozwala uprościć procedurę aktualizacji parametrów opisujących pola niezależnych odkształceń i uogólnionych naprężeń do następującej postaci

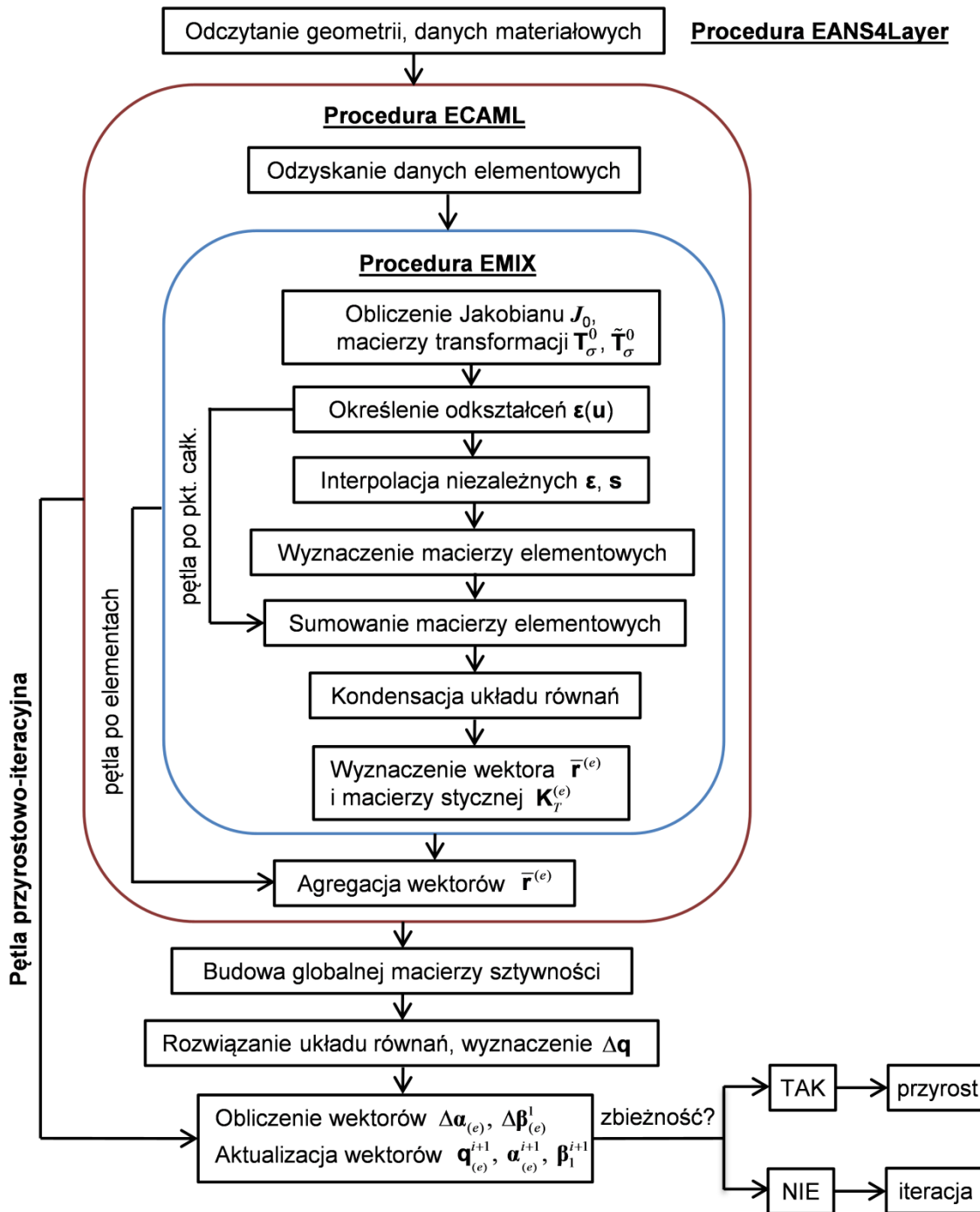
$$\boldsymbol{\beta}_1^{i+1} = \boldsymbol{\beta}_1^i + \Delta \boldsymbol{\beta}_1^{(e)}, \quad \boldsymbol{\alpha}_{(e)}^{i+1} = \mathbf{P}_{\alpha\beta} \boldsymbol{\beta}_1^{i+1}, \quad \Delta \boldsymbol{\beta}_1^{(e)} = \mathbf{P}_{\beta q} \Delta \mathbf{q}_{(e)} + \bar{\mathbf{p}}_\beta, \quad (5.148)$$

gdzie

$$\mathbf{P}_{\beta q} = (\mathbf{K}_{\alpha\beta}^1)^{-1} \mathbf{K}_{\alpha q}^{(e)}, \quad \bar{\mathbf{p}}_\beta = (\mathbf{K}_{\alpha\beta}^1)^{-1} \mathbf{r}_\alpha^1, \quad \mathbf{P}_{\alpha\beta} = (\mathbf{K}_{\beta\alpha}^1)^{-1} \bar{\mathbf{K}}_{\beta\beta}^{11}. \quad (5.149)$$

Zaproponowana modyfikacja procedury aktualizacji parametrów pozwala ograniczyć ilość danych przechowywanych w pamięci programu własnego, gdyż dla każdego elementu skończonego wystarczy zapisywać tylko wektor  $\boldsymbol{\beta}_{(e)}^1$  oraz macierze  $\mathbf{P}_{\beta q}$ ,  $\bar{\mathbf{p}}_\beta$  i  $\mathbf{P}_{\alpha\beta}$  (5.149).

Miejsce wykonywania aktualizacji zmiennych w ramach pętli przyrostowo-iteracyjnej w analizie nieliniowej pokazano na rys. 5.4. W schemacie blokowym zaprezentowano najważniejsze etapy implementacji elementów hybrydowo-mieszanych w ramach procedur w programie autorskim.



Rys. 5.4. Ideowy schemat blokowy ukazujący sposób implementacji elementów hybrydowo-mieszanych w ramach procedur w programie autorskim

### 5.13. Proponowane elementy hybrydowo-mieszane

Najważniejsze powłokowe elementy mieszane i częściowo mieszane zaproponowane w niniejszej rozprawie zestawiono w tab. 5.2, w której podano liczbę parametrów  $\alpha_{(e)}$  i  $\beta_{(e)}^1$  przyjętych dla poszczególnych składowych uogólnionych naprężeń i odkształceń. W tab. 5.2 8-parametrowa interpolacja składowych membranowych oznacza przyjęcie czterech parametrów dla części stałej oraz czterech parametrów dla zmiennej części pola niezależnych uogólnionych naprężeń i niezależnych odkształceń opisanych odpowiednio za pomocą macierzy  $\mathbf{S}_{m4}$  (5.46) i  $\mathbf{P}_{m4}$  (5.61). Natomiast 6-parametrowa interpolacja składowych membranowych oznacza przyjęcie tylko dwóch parametrów dla zmiennej części pola niezależnych uogólnionych naprężeń i niezależnych odkształceń opisanych odpowiednio za po-

mocą macierzy  $\mathbf{S}_{m2}$  (5.46) i  $\mathbf{P}_{m2}$  (5.61). W przypadku składowych związanych z owinięciem pola niezależnych uogólnionych naprężeń i niezależnych odkształceń w interpolacji 4-parametrowej zastosowano odpowiednio macierze  $\mathbf{S}_{d2}$  (5.49) i  $\mathbf{P}_{d2}$  (5.63), a w interpolacji 3-parametrowej odpowiednio macierze  $\mathbf{S}_{d1}$  (5.49) i  $\mathbf{P}_{d1}$  (5.63). Zgodnie z tab. 5.2 dla drugiej części interpolacji niezależnych odkształceń zastosowano macierz  $\mathbf{N}_4$ , z wyjątkiem przykładów, w których analizowano wpływ wariantu macierzy  $\mathbf{N}_k$  (5.68) na wyniki. Dodatkowo w tab. 5.2 każdemu elementowi skończonemu przypisano odpowiedni kod, informujący o rodzaju elementu oraz liczbie zastosowanych parametrów dla niezależnych naprężeń i pierwszej części niezależnych odkształceń. Dla elementów zestawionych w tab. 5.2 macierze interpolacyjne  $\mathbf{S}$  i  $\mathbf{P}$  zdefiniowano we współrzędnych skorygowanych. W celu odróżnienia od nich elementów hybrydowo-mieszanych, w których interpolację określono we współrzędnych skończonych, do ich kodu dodano na końcu literę „s”, np. element mieszany MIX40s i element częściowo mieszany SMIX20s. W przypadku tych elementów dla drugiej części interpolacji niezależnych odkształceń zastosowano macierz  $\mathbf{N}_2$ , z wyjątkiem przykładów, w których analizowano wpływ wariantu macierzy  $\mathbf{N}_k$  (5.68) na wyniki.

Tabela 5.2. Przyjęta interpolacja niezależnych odkształceń i uogólnionych naprężeń dla testowanych powłokowych elementów mieszanych i częściowo mieszanych

Kod elementu	Niezależne naprężenia				Niezależne odkształcenia				Wzbogacone odkształcenia
	$N^{\alpha\beta}$	$Q^\alpha$	$M^{\alpha\beta}$	$M^\alpha$	$\varepsilon_{\alpha\beta}$	$\varepsilon_\alpha$	$\kappa_{\alpha\beta}$	$\kappa_\alpha$	
Elementy mieszane									
MIX44	8p	4p	6p	4p	8p	4p	6p	4p	$\mathbf{N}_4$
MIX42	8p	4p	6p	3p	8p	4p	6p	3p	$\mathbf{N}_4$
MIX40	6p	4p	6p	4p	6p	4p	6p	4p	$\mathbf{N}_4$
MIX38	6p	4p	6p	3p	6p	4p	6p	3p	$\mathbf{N}_4$
Elementy częściowo mieszane B									
SMIX24	8p	4p	–	–	8p	4p	–	–	$\mathbf{N}_4$
SMIX20	6p	4p	–	–	6p	4p	–	–	$\mathbf{N}_4$
Elementy częściowo mieszane A									
SMIX16	8p	–	–	–	8p	–	–	–	$\mathbf{N}_4$
SMIX12	6p	–	–	–	6p	–	–	–	$\mathbf{N}_4$

Zestawione w tab. 5.2 elementy mieszane można interpretować jako uogólnienie elementów z pracy [137] na 6-parametrową nieliniową teorię powłok. Dla tych elementów w niniejszym rozdziale zaproponowano interpolację niesymetrycznych pól uogólnionych naprężeń i odkształceń oraz uwzględniono w ramach sformułowania hybrydowo-mieszanego składowe związane z owinięciem. Elementy częściowo mieszane B, dla których jako niezależne przyjęto jedynie składowe membranowe i ścinania poprzecznego, można porównywać z elementem HW29 z pracy [362], w której jednak element wyprowadzono w ramach innej teorii powłok oraz stosując technikę EADG. Natomiast elementy częściowo mieszane A stanowią próbę przeniesienia koncepcji elementów EANS z prac [369, 371] na sformułowanie hybrydowo-mieszane.





## Rozdział 6

# PRZYKŁADY NUMERYCZNE DO OCENY POWŁOKOWYCH ELEMENTÓW HYBRYDOWO-MIESZANYCH

### 6.1. Uwagi wstępne

W rozdziale zaprezentowano wyniki liczbowe dla typowych zadań testujących (ang. *benchmark problems*), opisanych szczegółowo w literaturze. Przykłady te zostaną wykorzystane do weryfikacji i oceny zaimplementowanych hybrydowo-mieszanych powłokowych elementów skończonych. W pierwszej części rozdziału omówiono przykłady numeryczne w zakresie geometrycznie liniowym, natomiast w drugiej części wykonano analizy geometrycznie nieliniowe w zakresie skończonych przemieszczeń i małych odkształceń sprężystych. W rozprawie ograniczono się do zagadnień statyki, do analizy których zastosowano w niniejszym rozdziale materiał liniowo-sprężysty, opisany w podrozdziale 4.2. W obliczeniach przyjęto wartości współczynników korekcyjnych dane równaniem (4.4):  $\alpha_s = 5/6$  i  $\alpha_t = 0.7$ . W przykładach geometrycznie nieliniowych efektywność elementu oceniono na podstawie całkowitej liczby iteracji oraz maksymalnej wielkości pierwszego przyrostu. Zastosowane w programie autorskim kryteria zbieżności zostały opisane w Dodatku B.4.

Obliczenia wykonano za pomocą programu autorskiego MIX, napisanego w języku programowania Fortran. Program MIX został opracowany na podstawie kodu programu, otrzymanego od prof. Witkowskiego, a służącego do obliczeń konstrukcji powłokowych elementem EANS4 [371]. W celu implementacji elementów mieszanych i częściowo mieszanych w ramach 6-parametrowej nieliniowej teorii powłok stworzono procedurę EMIX (zob. rys. 5.4) oraz procedury pomocnicze. Dodatkowo wprowadzono liczne zmiany w istniejących procedurach niezbędne do prawidłowej pracy programu MIX. Do przygotowania wykresów wykorzystano program Grapher 12, a do wizualizacji deformacji program GiD w wersji 11.0.3.

Jako rozwiązania odniesienia przyjmuje się wyniki dostępne w literaturze. Ze względu na to, że wyniki literaturowe są zazwyczaj prezentowane w postaci krzywych (ścieżek równowagi), to takie rozwiązania odniesienia są obarczone błędem wynikającym z niedokładności odczytu z rysunku. W związku z tym, jako podstawowe rozwiązania odniesienia przyjmuje się te do których autor niniejszej rozprawy miał dostęp w postaci liczbowej, uzyskane za pomocą elementu 16-węzłowego CAMe16 (z pełnym całkowaniem), charakteryzującego się szczytkowym zjawiskiem blokady (zob. [62, 67]). Jako dodatkowe rozwiązanie odniesienia prezentuje się wyniki otrzymane dla elementu 4-węzłowego EANS4 [371], jako ostatniego elementu skończonego opracowanego w ramach 6-parametrowej nieliniowej teorii powłok. Dzięki dostępowi do kodów źródłowych programów prezentowane wyniki dla elementów EANS4 i CAMe16 wyznaczono samodzielnie, stosując takie same założenia i współczynniki jak dla autorskich elementów powłokowych. W tych przykładach, w których było to możliwe, wyniki własne porównano z wynikami dla 4-węzłowych elementów hybrydowo-mieszanych HW47 i HW29 [362].

### 6.2. Przykłady w zakresie liniowym

#### 6.2.1. Test wartości własnych

W celu sprawdzenia czy zaimplementowane powłokowe elementy skończone pozwalają w prawidłowy sposób odzwierciedlić ruch sztywny wykonano test wartości własnych dla stycznej macierzy sztywności  $\mathbf{K}_T^{(e)}$ . Badanie przeprowadzono dla pojedynczego elementu skończonego o kształcie kwadratu i deltoidu, zob. rys. 6.1. Dla analizowanego elementu nie zdefiniowano żadnych warunków brzegowych, aby uniknąć ewentualnego „zamaskowania” występowania postaci zeroenergetycznych przez zadane więzi. Stałe materiałowe i grubość powłoki przyjmuje się za pracę [367] następująco:  $E = 10^6$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $h_0 = 0.1$ . Obliczone wartości własne dla macierzy sztywności  $\mathbf{K}_T^{(e)}$  zestawiono w tab. 6.1 i tab. 6.2 odpowiednio dla elementu kwadratowego i elementu o kształcie deltoidu. Dla wszystkich elementów mieszanych i częściowo mieszanych otrzymano poprawną liczbę sześciu zerowych warto-



Tabela 6.2. Wartości własne macierzy stycznej  $\mathbf{K}_T^{(e)}$  dla różnych mieszanych i częściowo mieszanych elementów powłokowych o kształcie deltoidu (rys. 6.1b)

Nr	MIX44	MIX42	MIX40	MIX38	SMIX24	SMIX20	SMIX16	SMIX12
1	-6.46E-09	-6.46E-09	-6.46E-09	-6.47E-09	-6.50E-09	-6.50E-09	-1.19E-09	-5.08E-09
2	-1.44E-09	-1.44E-09	-5.07E-09	-3.81E-09	-1.60E-09	-5.10E-09	-3.42E-10	-3.26E-09
3	3.47E-10	-1.33E-09	-3.26E-09	-3.26E-09	-1.80E-10	-3.24E-09	-1.82E-10	-1.19E-09
4	9.22E-10	9.20E-10	-1.44E-09	-1.44E-09	7.72E-10	-1.59E-09	1.23E-09	-3.34E-10
5	3.05E-09	2.03E-09	9.21E-10	9.15E-10	2.50E-09	7.73E-10	2.49E-09	1.23E-09
6	3.90E-09	3.92E-09	4.85E-09	4.93E-09	3.91E-09	4.85E-09	3.91E-09	4.86E-09
7	14.5178	15.7255	11.4375	12.2445	17.0023	12.2397	17.0023	12.2397
8	15.7255	17.0213	15.7255	15.7255	38.1297	19.9788	38.1307	19.9788
9	31.8112	31.8112	18.2382	19.9936	48.8559	33.6536	48.8744	33.6536
10	49.2214	49.2214	31.8112	31.8112	60.8113	38.1297	60.8127	38.1307
11	59.4174	59.4174	33.6536	33.6536	72.6174	48.8559	72.6217	48.8744
12	144.371	144.371	49.2214	49.2214	144.645	60.8113	144.646	60.8127
13	3062.41	3062.47	59.4174	59.4174	3062.47	72.6174	3062.47	72.6217
14	4034.72	4034.72	144.371	144.371	4035.49	144.645	4813.09	144.646
15	6896.40	6896.40	4034.72	4034.72	6896.40	4035.49	6896.40	4813.09
16	23326.6	23326.6	19202.6	19202.6	23326.8	19202.6	26681.4	19202.6
17	35298.2	35298.2	23326.6	23326.6	35298.2	23326.8	36174.4	26681.4
18	49596.2	49596.2	35298.2	35298.2	49596.2	35298.2	49596.2	36174.4
19	53998.7	53998.7	39302.9	39302.9	53998.7	39302.9	53998.7	39302.9
20	61674.6	61674.6	61674.6	61674.6	61674.6	61674.6	61690.1	61690.1
21	76482.4	76482.4	68423.0	68423.0	76482.4	68423.0	76482.4	68423.0
22	76759.9	76759.9	70068.3	70068.3	76759.9	70068.3	76759.9	70068.3
23	155704	155704	155650	155650	155704	155650	155704	155650
24	175949	175949	175774	175774	175949	175774	175949	175774

### 6.2.2. Testy łąty

Zadaniem niniejszego testu jest sprawdzenie czy elementy skończone o nieregularnym kształcie potrafią zaprezentować stan stałych odkształceń i naprężeń. W związku z tym, że zweryfikowanie tego w sposób analityczny jest trudne, wykonuje się numeryczne testy łąty (ang. *patch tests*). Wymiary i kształt siatki dyskretyzacyjnej (zob. rys. 6.2), złożonej z pięciu elementów skończonych, przyjmuje się za pracami [280, 281]. W niniejszej rozprawie testy zrealizowano w wersji przemieszczeniowej opisanej w [213]. W obliczeniach przyjmuje się następujące stałe materiałowe:  $E = 10^6$ ,  $\nu = 0.25$  oraz stałą grubość powłoki  $h_0 = 0.001$ .

W membranowym teście łąty w węzłach zewnętrznych 1-4 siatki elementów skończonych zadano wartości przemieszczeń zgodnie z poniższymi wzorami:

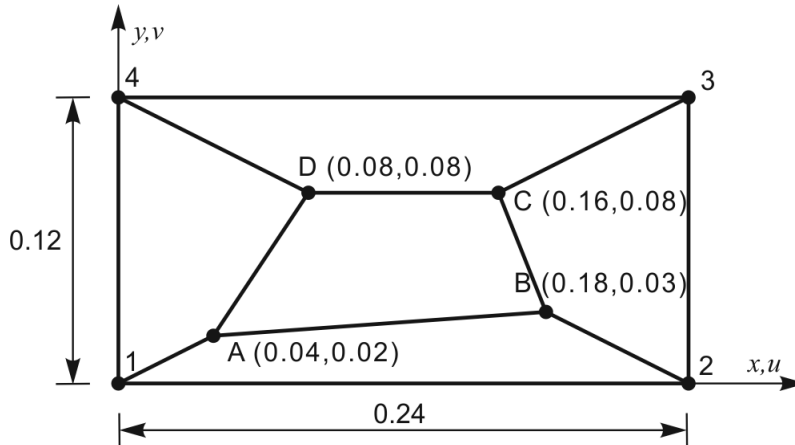
$$u = 0.001(x + y / 2), \quad v = 0.001(y + x / 2), \quad (6.1)$$

przyjmując, że pozostałe przemieszczenia i obroty są zerowe. W ten sposób zdefiniowane pole wymuszeń kinematycznych tworzy w płaszczyźnie siatki ES stan stałych odkształceń i naprężeń o następujących wartościach

$$\varepsilon_{xx} = 0.001, \quad \varepsilon_{yy} = 0.001, \quad \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = 0.0005, \quad (6.2)$$

$$\sigma_x = 1333, \quad \sigma_y = 1333, \quad \tau_{xy} = 400. \quad (6.3)$$

We wszystkich analizowanych elementach mieszanych i częściowo-mieszanych uzyskane wartości przemieszczeń w węzłach wewnętrznych A-D siatki ES zestawiono w tab. 6.3 i są one zgodne z wartościami wynikającymi ze wzoru (6.1). Natomiast pozostałe przemieszczenia i obroty są zerowe (z dokładnością do zera numerycznego). Dodatkowo we wszystkich punktach całkowania otrzymano wartości odkształceń i naprężeń zgodne odpowiednio ze wzorami (6.2) i (6.3).



Rys. 6.2. Zastosowana siatka elementów skończonych w teście łąty, geometria

W pracy [367] zaproponowano, aby dla elementów skończonych z owinięciem w ramach membranowego testu łąty sprawdzić również warunek dotyczący obrotu owinięcia. W tym celu oprócz standardowych warunków podparcia z zablokowanym owinięciem w węzłach zewnętrznych, wykonano dodatkowo obliczenia w wariancie z zablokowanym owinięciem w jednym węźle oraz w wariancie ze zwolnionym owinięciem w węzłach 1-4. We wszystkich wariantach otrzymano zerowe wartości owinięcia w węzłach wewnętrznych A-D, a więc warunek dotyczący obrotu owinięcia jest spełniony.

Następnie niezależnie przeprowadzono zgięciowy test łąty. W celu wygenerowania stanu stałych odkształceń zgięciowych  $\kappa_{xx} = \kappa_{yy} = 0.001$  i skrętnych  $\kappa_{xy} = -0.001$  w siatce ES zadano w węzłach zewnętrznych 1-4 pole przemieszczeń opisane wzorami:

$$w = 0.0005(x^2 + xy + y^2), \quad \varphi_x = 0.0005(x + 2y), \quad \varphi_y = -0.0005(2x + y). \quad (6.4)$$

Ponadto w węzłach 1-4 zablokowano pozostałe stopnie swobody. W wynikach sprawdzono, że pole (6.4) rzeczywiście wygenerowało stan stałych odkształceń w punktach całkowania. Wyznaczone wartości ugięć  $w$  oraz obrotów w węzłach wewnętrznych A-D zaprezentowano w tab. 6.3 i są one zgodne z wartościami odniesienia wynikającymi ze wzorów (6.4). Ponadto wartości momentów zginających oraz momentów skrętnych we wszystkich punktach całkowania są równe wartościom analitycznym:

$$m_x = m_y = 1.111 \cdot 10^7, \quad m_{xy} = 10^7. \quad (6.5)$$

Tabela 6.3. Wartości przemieszczeń w węzłach wewnętrznych siatki ES otrzymane w obu częściach testu łąty

Węzeł	Membranowy test łąty		Zgięciowy test łąty		
	$u$	$v$	$w$	$\varphi_x$	$\varphi_y$
A	$5 \cdot 10^{-5}$	$4 \cdot 10^{-5}$	$1.4 \cdot 10^{-6}$	$4 \cdot 10^{-5}$	$-5 \cdot 10^{-5}$
B	$1.95 \cdot 10^{-4}$	$1.2 \cdot 10^{-4}$	$1.935 \cdot 10^{-5}$	$1.2 \cdot 10^{-4}$	$-1.95 \cdot 10^{-4}$
C	$2 \cdot 10^{-4}$	$1.6 \cdot 10^{-4}$	$2.24 \cdot 10^{-5}$	$1.6 \cdot 10^{-4}$	$-2 \cdot 10^{-4}$
D	$1.2 \cdot 10^{-4}$	$1.2 \cdot 10^{-4}$	$9.6 \cdot 10^{-6}$	$1.2 \cdot 10^{-4}$	$-1.2 \cdot 10^{-4}$

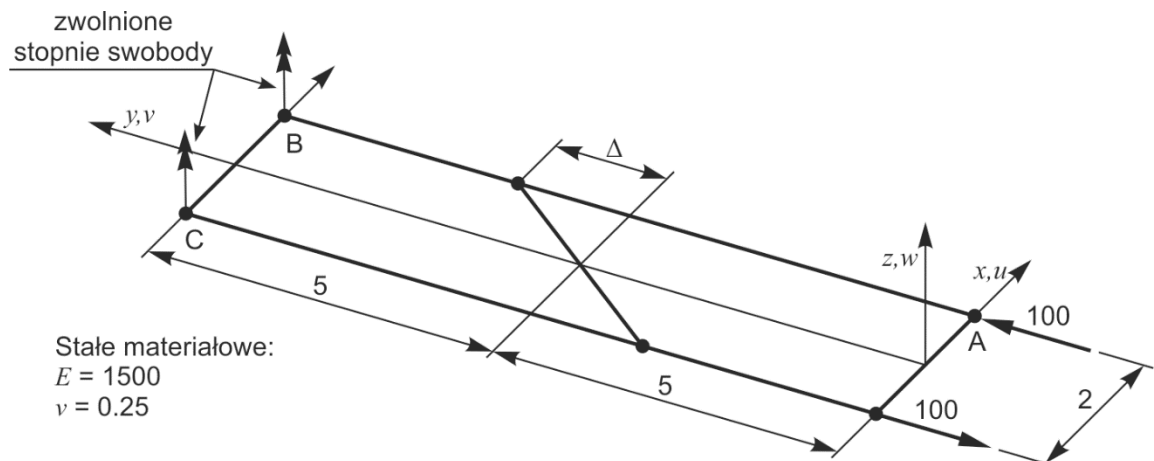
Podsumowując, wszystkie elementy mieszane i częściowo mieszane spełniają test łąty, gdyż wartości przemieszczeń w wewnętrznych węzłach siatki oraz wartości naprężeń w punktach całkowania są zgodne z zadanym stałym stanem odkształceń membranowych i zginających. Zatem sformułowane w rozprawie powłokowe elementy skończone pozwalają w prawidłowy sposób reprezentować stan stałych odkształceń i naprężeń.

### 6.2.3. Testy dystorsji siatki

Dokładność obliczeń MES zależy w dużym stopniu od jakości siatki dyskretyzacyjnej i jest najlepsza dla siatek strukturalnych zbudowanych z kwadratowych ES, gdyż wtedy transformacja do elementu wzorcowego nie jest źródłem potencjalnego błędu. W przypadku dyskretyzacji zawierających elementy skończone o nieregularnym kształcie uzyskuje się zazwyczaj wyniki przeszywnione względem rozwiązania odniesienia. W celu zbadania wpływu dystorsji siatki na wyniki uzyskiwane za pomocą sformułowanych w rozprawie elementów mieszanych i częściowo mieszanych przeanalizowano dwa zadania zaproponowane w pracy [254].

#### Tarcza wspornikowa złożona z dwóch elementów skończonych

W pierwszym teście analizie poddano tarczę wspornikową, złożoną z dwóch elementów skończonych, obciążoną parą sił. Geometrię tarczy, stałe materiałowe oraz zwolnione stopnie swobody w węzłach podporowych B, C zaprezentowano na rys. 6.3. W przykładzie tym sprawdzono jak dystorsja siatki, sterowana za pomocą parametru  $\Delta$  (zob. rys. 6.3), wpływa na wartość ugięcia  $u_A$  w węźle A. Zadanie to badano w licznych pracach (np. [254, 267]) za pomocą elementów w płaskim stanie naprężenia. W celu jego przeanalizowania za pomocą elementów powłokowych przyjęto grubość tarczy  $h_0 = 0.1$ , znacząco mniejszą od pozostałych wymiarów tarczy. W ten sposób zdefiniowana geometria tarczy spełnia warunki stawiane powłokom. W ramach rozważanej teorii powłok dla tarcz o dużej grubości w analizach własnych zaobserwowano efekt blokady spowodowany zbyt dużą sztywnością owinięcia.



Rys. 6.3. Tarcza wspornikowa złożona z dwóch elementów: geometria, warunki brzegowe, stałe materiałowe

W pierwszej kolejności zbadano wpływ wyboru wariantu macierzy  $\mathbf{N}_k$  (5.68), zastosowanej w drugiej części interpolacji niezależnych odkształceń, na uzyskiwane wyniki analiz MES. W tym celu w tab. 6.4 porównano wartości przemieszczeń  $u_A$  obliczone dla wszystkich wariantów macierzy  $\mathbf{N}_k$ , które dla danych elementów skończonych spełniają warunek ortogonalności wzbogaconych odkształceń względem niezależnych uogólnionych naprężeń (zob. tab. 5.1). Analizowana tarcza wspornikowa pracuje w stanie membranowym, zatem decydujący wpływ na wyniki ma wybrany wariant interpolacji składowych membranowych niezależnych odkształceń i uogólnionych naprężeń. Z tego powodu w tab. 6.4 ograniczono się tylko do wybranych elementów, prezentując wartości  $u_A$  dla interpolacji 6-parametrowej (element MIX40) i 8-parametrowej (element SMIX24) określonej we współrzędnych skorygowanych oraz interpolacji 6-parametrowej zdefiniowanej we współrzędnych skośnych (element MIX40s). Wartości z tab. 6.4 wskazują, że w elementach z interpolacją określoną we współrzędnych skorygowanych zastosowanie macierzy  $\mathbf{N}_4$ ,  $\mathbf{N}_8$  i  $\mathbf{N}_{10}$  daje lepsze wyniki niż w przypadku użycia macierzy  $\mathbf{N}_2$  i  $\mathbf{N}_6$ . Różnica w wynikach rośnie wraz ze zwiększaniem dystorsji siatki, jednak nie przekracza 0,37%. Natomiast w przypadku elementu MIX40s otrzymano takie same wartości  $u_A$  dla obu wariantów elementu. Na podstawie uzyskanych wyników w dalszych obliczeniach zastosowano macierz  $\mathbf{N}_4$  w elementach mieszanych i częściowo mieszanych z interpolacją określoną we współrzędnych skorygowanych oraz macierz  $\mathbf{N}_2$  dla elementów, w których użyto współrzędnych skośnych.

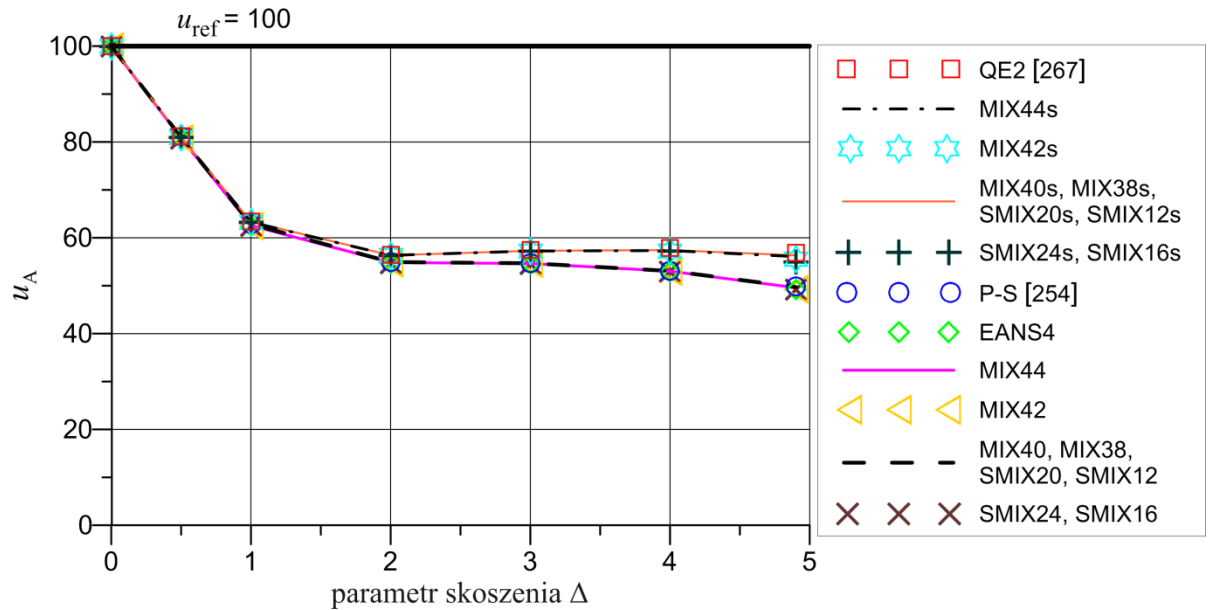
Tabela 6.4. Wpływ wyboru macierzy interpolującej wzbogacone odkształcenia na wartość przemieszczenia  $u_A$  tarczy wspornikowej dla różnych wartości skoszenia siatki  $\Delta$ 

Skoszenie $\Delta$		0.0	0.5	1.0	2.0	3.0	4.0	4.9
Element	Macierz $\mathbf{N}_k$	Przemieszczenie $u$ punktu A						
MIX40	$\mathbf{N}_2$	99.930	80.924	62.850	54.919	54.592	52.944	49.539
	$\mathbf{N}_4$	99.930	80.927	62.862	54.954	54.660	53.061	49.721
	$\mathbf{N}_6$	99.930	80.924	62.850	54.919	54.592	52.944	49.539
	$\mathbf{N}_8$	99.930	80.927	62.862	54.954	54.660	53.061	49.721
	$\mathbf{N}_{10}$	99.930	80.927	62.862	54.954	54.660	53.061	49.721
SMIX24	$\mathbf{N}_2$	99.930	80.712	62.479	54.647	54.492	52.881	49.010
	$\mathbf{N}_4$	99.930	80.714	62.491	54.682	54.559	52.998	49.184
	$\mathbf{N}_8$	99.930	80.714	62.491	54.682	54.559	52.998	49.184
MIX40s	$\mathbf{N}_2$	99.930	81.022	63.332	56.348	57.290	57.462	56.342
	$\mathbf{N}_6$	99.930	81.022	63.332	56.348	57.290	57.462	56.342

Uzyskane wartości przemieszczenia  $u_A$  przy pomocy autorskich elementów mieszanych i częściowo mieszanych porównano z wartościami odniesienia z literatury w tab. 6.5. Dodatkowo zależność  $u_A$  od parametru skoszenia siatki zaprezentowano na rys. 6.4. Ze względu na sztywność owinięcia w programie autorskim MIX otrzymano dla siatki regularnej wartość  $u_A$  minimalnie mniejszą od wartości odniesienia  $u_{ref} = 100$ . Dla elementów powłokowych, w których interpolację niezależnych odkształceń i uogólnionych naprężeń określono we współrzędnych skorygowanych, otrzymano wyniki zbliżone do tych dla elementu Pian-Sumihary (P-S) [254]. Większe wartości przemieszczeń uzyskano dla tych elementów mieszanych i częściowo mieszanych w których w interpolacji zastosowano współrzędne skośne i są one porównywalne z wartościami z pracy [267] (zob. tab. 6.5). Najlepsze wyniki wśród autorskich elementów mieszanych i częściowo mieszanych uzyskano za pomocą elementów MIX40s, MIX38s, SMIX20s i SMIX12s, natomiast wśród elementów z bogatszą (8-parametrową) interpolacją składowych membranowych za pomocą elementu mieszanego MIX44s. Takie same wartości  $u_A$  jak dla elementu EANS4 [371] uzyskano dla elementów SMIX24 i SMIX16. Różnice w wynikach między elementami MIX44, MIX42 i SMIX24 pokazują, że sposób opisu składowych związków z owinięciem może mieć też niewielki wpływ na wyniki.

Tabela 6.5. Porównanie wartości ugięcia tarczy wspornikowej odczytanych z literatury i uzyskanych za pomocą autorskich elementów powłokowych dla różnych wartości skoszenia siatki  $\Delta$ 

Skoszenie $\Delta$		0.0	0.5	1.0	2.0	3.0	4.0	4.9
Element		Przemieszczenie $u$ punktu A						
P-S [254]		100.0	81.0	62.9	55.0	54.7	53.1	49.8
QE2 [267]		100.0	81.2	63.4	56.5	57.5	57.9	56.9
EANS4		99.930	80.714	62.491	54.682	54.559	52.998	49.184
MIX44		99.930	80.724	62.561	54.816	54.612	53.007	49.582
MIX42		99.930	80.714	62.492	54.685	54.562	52.999	49.273
SMIX24 i SMIX16		99.930	80.714	62.491	54.682	54.559	52.998	49.184
MIX40, MIX38, SMIX20 i SMIX12		99.930	80.927	62.862	54.954	54.660	53.061	49.721
MIX44s		99.930	80.971	63.273	56.324	57.258	57.362	56.072
MIX42s		99.930	80.968	63.257	56.309	57.257	57.260	55.557
SMIX24s i SMIX16s		99.930	80.968	63.257	56.308	57.257	57.199	54.938
MIX40s, MIX38s, SMIX20s i SMIX12s		99.930	81.022	63.332	56.348	57.290	57.462	56.342



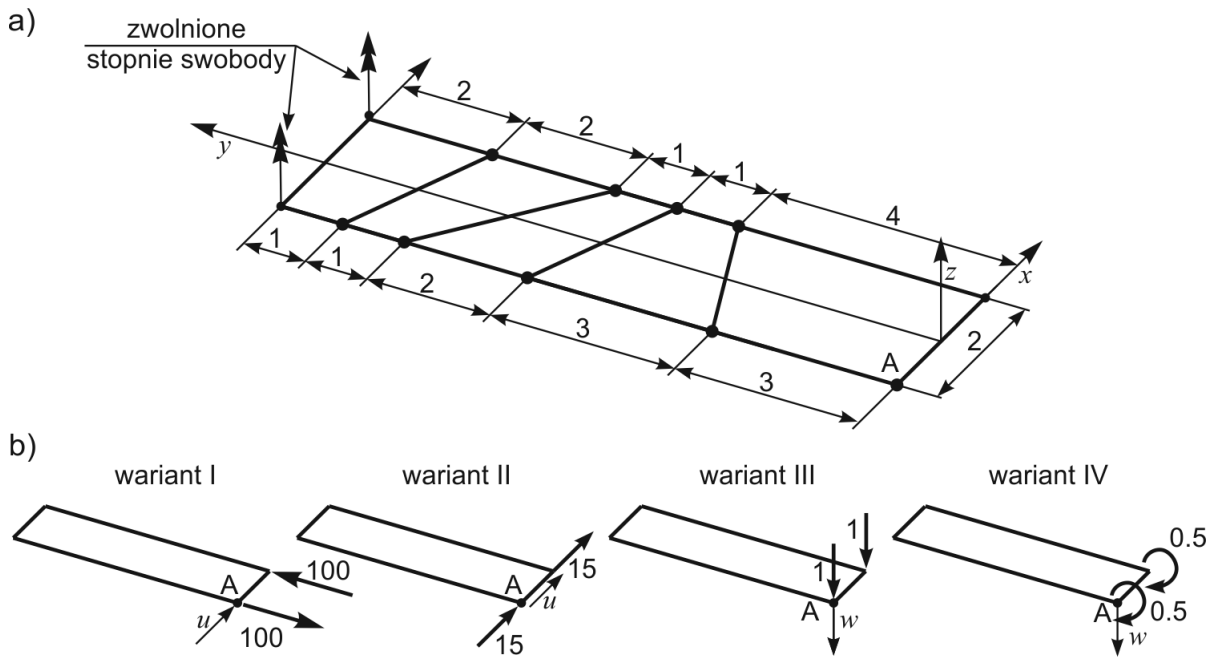
Rys. 6.4. Zależność przemieszczenia  $u_A$  od parametru skoszenia dwuelementowej siatki tarczy wspornikowej dla wybranych elementów autorskich i rozwiązań z literatury

### Tarcza/płyta wspornikowa złożona z pięciu elementów skończonych

W drugim teście analizuje się tarczę wspornikową złożoną z pięciu elementów skończonych o nieregularnym kształcie. Na rysunku 6.5a zaprezentowano geometrię tarczy oraz zwolnione stopnie swobody w węzłach podporowych. Stałe materiałowe oraz grubość tarczy przyjmuje się takie same jak w poprzednim teście:  $E = 1500$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $h_0 = 0.1$ . Podobnie jak w literaturze (zob. np. [254, 267]) bada się wpływ dystorsji siatki na deformację tarczy w stanie membranowym. W tym celu analizuje się dwa warianty obciążenia: parą sił reprezentującą moment (wariant I na rys. 6.5b) oraz dwoma siłami skupionymi prostopadłymi do osi  $y$  (wariant II na rys. 6.5b). Natomiast w celu sprawdzenia wpływu dystorsji siatki na wyniki w stanie zginania rozszerza się test za pracę [370]. W dwóch dodatkowych wariantach obciążenia (zob. rys. 6.5b) śledzi się ugięcie płyty  $w_A$  na swobodnym końcu wspornika płytowego pod wpływem działania: dwóch poprzecznych sił skupionych (wariant III), dwóch momentów zginających (wariant IV).

Przykład ten umożliwia ocenę wpływu wyboru wariantu macierzy  $\mathbf{N}_k$  (5.68) na wyniki dla nieregularnej siatki ES zarówno w stanie membranowym jak i w stanie zginania. Wartości przemieszczeń uzyskane dla wybranych elementów (MIX40, SMIX24, MIX40s) i wariantów macierzy  $\mathbf{N}_k$ , spełniających warunków ortogonalności wzbogaconych odkształceń względem niezależnych naprężeń (zob. tab. 5.1) zestawiono w tab. 6.6. Zastosowany sposób interpolacji wzbogaconych odkształceń ma niewielki wpływ na wyniki w stanie membranowym i praktycznie żaden wpływ na wyniki w stanie zgięciowym. Podobnie jak w poprzednim teście otrzymano, że najlepsze wyniki dla elementów z interpolacją określoną we współrzędnych skorygowanych daje zastosowanie macierzy  $\mathbf{N}_4$ ,  $\mathbf{N}_8$  i  $\mathbf{N}_{10}$ . Podczas gdy w przypadku elementów z interpolacją zdefiniowaną we współrzędnych skośnych dla macierzy  $\mathbf{N}_2$ ,  $\mathbf{N}_6$  uzyskano takie same wartości przemieszczeń. Biorąc pod uwagę wyniki z tab. 6.4 i tab. 6.6 oraz starając się zminimalizować liczbę parametrów użytych w interpolacji niezależnych odkształceń w dalszej części rozprawy zastosowano:

- macierz  $\mathbf{N}_4$  dla elementów mieszanych i częściowo mieszanych z interpolacją niezależnych odkształceń i uogólnionych naprężeń określoną we współrzędnych skorygowanych;
- macierz  $\mathbf{N}_2$  dla elementów powłokowych z interpolacją zdefiniowaną we współrzędnych skośnych.



Rys. 6.5. Tarcza/płyta wspornikowa z dystorsją siatki ES: a) geometria i warunki brzegowe, b) analizowane warianty obciążenia, mierzone przemieszczenia

Tabela 6.6. Wpływ wyboru macierzy  $\mathbf{N}_k$  interpolującej wzbogacone odkształcenia na wartości przemieszczeń węzła A (rys. 6.5) tarczy/płyty wspornikowej dla różnych wariantów obciążenia

Obciążenie		wariant I	wariant II	wariant III	wariant IV
Rozwiązanie odniesienia		100.000	102.60	2666.9	200.00
Element	Macierz $\mathbf{N}_k$	$u_A$	$u_A$	$w_A$	$w_A$
MIX40	$\mathbf{N}_2$	96.111	97.985	2618.8	199.06
	$\mathbf{N}_4$	96.119	97.990	2618.9	199.06
	$\mathbf{N}_6$	96.111	97.985	2618.8	199.06
	$\mathbf{N}_8$	96.119	97.990	2618.9	199.06
	$\mathbf{N}_{10}$	96.119	97.990	2618.9	199.06
SMIX24	$\mathbf{N}_2$	95.095	97.166	2586.6	198.36
	$\mathbf{N}_4$	95.099	97.169	2586.6	198.36
	$\mathbf{N}_8$	95.099	97.169	2586.6	198.36
MIX40s	$\mathbf{N}_2$	96.405	98.179	2619.8	199.11
	$\mathbf{N}_6$	96.405	98.179	2619.8	199.11

W tab. 6.7 zaprezentowano wartości przemieszczeń zmierzonych w węźle A (zob. rys. 6.5b) uzyskane za pomocą autorskich elementów mieszanych i częściowo mieszanych. Otrzymane wyniki porównano ze ścisłymi rozwiązaniami odniesienia oraz z wynikami z prac [254, 267]. Rozwiązania odniesienia dla III i IV wariantu obciążenia obliczono zgodnie z teorią belek Timoszenki, uwzględniając wpływ ścinania poprzecznego. Wartości przemieszczeń najbliższe rozwiązaniom odniesienia uzyskano za pomocą elementów mieszanych MIX40s i MIX38s i są one zbliżone do tych z pracy [267]. Wyniki zestawione w tab. 6.7 pokazują, że w stanie membranowym większe wartości  $u_A$  otrzymano dla elementów z uboższą (6-parametrową) interpolacją składowych membranowych (zob. np. MIX40, SMIX20). Dodatkowo zastosowanie współrzędnych skośnych poprawiło wyniki dla elementów z 6-parametrową interpolacją składowych membranowych, a pogorszyło dla elementów z bogatszą (8-parametrową) interpolacją (zob. np. MIX44s, SMIX24s). Tymczasem w stanie zginania lepsze wyniki otrzymano dla autorskich elementów mieszanych niż dla elementów częściowo mieszanych.

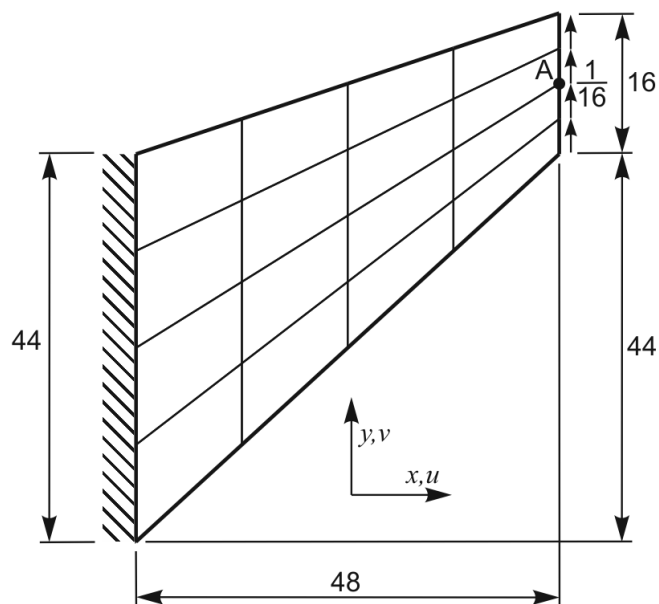


Tabela 6.7. Porównanie wartości przemieszczeń w węźle A (rys. 6.5) tarczy/płyty wspornikowej uzyskanych za pomocą elementów mieszanych i częściowo mieszanych z wartościami z literatury i rozwiązaniami odniesienia

Obciążenie	wariant I:	wariant II	wariant III	wariant IV
Przemieszczenie	$u_A$	$u_A$	$w_A$	$w_A$
Rozwiązanie odniesienia	100.000	102.60	2666.9	200.00
P-S [254]	96.18	98.05	–	–
QE2 [267]	96.50	98.26	–	–
EANS4	95.099	97.169	2586.6	198.36
MIX44	95.099	97.171	2618.9	199.06
MIX42	95.100	97.169	2618.9	199.06
MIX40 i MIX38	96.119	97.990	2618.9	199.06
SMIX24 i SMIX16	95.099	97.169	2586.6	198.36
SMIX20 i SMIX12	96.119	97.990	2586.6	198.36
MIX44s	94.336	96.595	2619.8	199.11
MIX42s	94.336	96.594	2619.8	199.11
MIX40s i MIX38s	96.405	98.179	2619.8	199.11
SMIX24s i SMIX16s	94.336	96.593	2586.6	198.36
SMIX20s i SMIX12s	96.405	98.179	2586.6	198.36

#### 6.2.4. Membrana Cooka

Test ten został zaproponowany w pracy [81] i pozwala ocenić zachowanie elementów skończonych o skośnym kształcie w stanie deformacji zdominowanej przez ścinanie w płaszczyźnie membrany. Analizowana membrana jest utwierdzona na lewym końcu i obciążona równomiernie na drugim końcu całkowitą siłą o wartości 1 (zob. rys. 6.6). W obliczeniach przyjęto grubość membrany  $h_0 = 1$  oraz stałe materiałowe:  $E = 1$ ,  $\nu = 1/3$ . Wymiary geometryczne membrany i przykładową siatkę  $4 \times 4$  elementów skończonych zaprezentowano na rys. 6.6. Obliczenia przeprowadzono również dla następujących dyskretyzacji:  $2 \times 2$ ,  $8 \times 8$ ,  $16 \times 16$ ,  $32 \times 32$ .

Rys. 6.6. Membrana Cooka: geometria, warunki brzegowe, dyskretyzacja  $4 \times 4$  ES

Wartości ugięcia  $v_A$  i obrotu owinięcia  $\omega_A$  w węźle środkowym A na prawej krawędzi (zob. rys. 6.6) zestawiono w tab. 6.8 dla różnych dyskretyzacji. Wartości przemieszczeń uzyskane za pomocą

elementów mieszanych i częściowo mieszanych porównano z wartościami z prac [254, 267, 362]. Największe wartości  $v_A$  otrzymano dla elementów z uboższą (6–parametrową) interpolacją składowych membranowych określoną we współrzędnych skośnych: MIX40s, MIX38s, SMIX20s i SMIX12s. Dodatkowa analiza dla elementu MIX40s ze zmniejszonym współczynnikiem owinięcia  $\alpha_t = 0.01$  pokazuje, że to sztywność owinięcia powoduje nieznaczne przeszywnienie rozwiązania względem wartości odniesienia z literatury uzyskanych dla elementów tarczowych. Wyniki w tab. 6.8 wskazują na to, że zastosowanie współrzędnych skośnych w interpolacji niezależnych odkształceń i uogólnionych naprężeń daje nieznacznie lepsze wyniki w zakresie liniowym niż użycie współrzędnych skorygowanych. Dla elementów z 8–parametrową interpolacją składowych membranowych (np. MIX44, SMIX24) zaobserwowano zauważalne przeszywnienie deformacji. Tymczasem dla obrotu owinięcia w węźle A uzyskano wartości zbliżone do tych z pracy [362]. Porównanie wyników dla np. elementów MIX44 i MIX42 wskazuje na to, że zastosowany sposób interpolacji składowych związanym z owinięciem ma bardzo ograniczony wpływ na wartość  $\omega_A$ , a na jego wartość w znacznie większym stopniu wpływają inne czynniki.

Tabela 6.8. Porównanie wartości przemieszczeń  $v_A$  i  $\omega_A$  w węźle A membrany Cooka (zob. rys. 6.6) uzyskanych za pomocą elementów mieszanych i częściowo mieszanych z wartościami z literatury

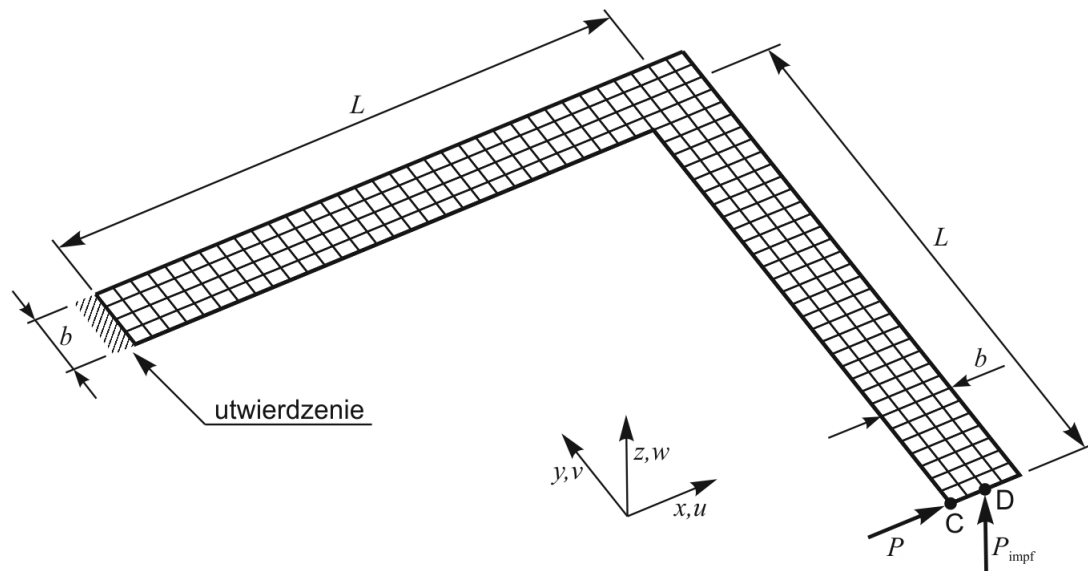
Element	Siatka 2×2		Siatka 4×4		Siatka 16×16		Siatka 32×32	
	$v_A$	$\omega_A$	$v_A$	$\omega_A$	$v_A$	$\omega_A$	$v_A$	$\omega_A$
P-S [254]	21.13	–	23.02	–	23.88	–	–	–
QE2 [267]	21.35	–	23.04	–	23.88	–	–	–
HW29, HW47 [362]	21.317	0.925	–	–	–	–	23.936	0.891
EANS4	20.420	0.950	22.703	0.800	23.809	0.892	23.898	0.891
MIX44	20.420	0.950	22.703	0.798	23.809	0.892	23.898	0.891
MIX40	21.121	0.842	23.011	0.821	23.864	0.888	23.920	0.889
MIX42, SMIX24 i SMIX16	20.420	0.950	22.703	0.800	23.809	0.892	23.898	0.891
MIX38, SMIX20 i SMIX12	21.121	0.843	23.010	0.817	23.864	0.888	23.920	0.889
MIX44s	20.566	0.986	22.715	0.784	23.809	0.892	23.898	0.891
MIX42s	20.566	0.985	22.715	0.786	23.809	0.892	23.898	0.891
MIX40s	21.309	0.852	23.024	0.821	23.865	0.888	23.920	0.889
MIX40s $\alpha_t = 0.01$	21.317	0.853	23.035	0.820	23.883	0.840	23.938	0.869
MIX38s, SMIX20s i SMIX12s	21.309	0.854	23.024	0.817	23.864	0.888	23.920	0.889
SMIX24s i SMIX16s	20.565	0.985	22.715	0.787	23.809	0.892	23.898	0.891

## 6.3 Przykłady w zakresie geometrycznie nieliniowym

### 6.3.1. Wspornik płytowy w kształcie litery L obciążony siłą skupioną

Jako pierwszy przykład w zakresie geometrycznie nieliniowym zbadano wspornik płytowy w kształcie litery L obciążony na końcu siłą skupioną. Zadanie to w wersji prętowej zostało zaproponowane w pracy [14] i następnie w wersji płytowej przeanalizowane płaskimi elementami powłokowymi w [13]. W obliczeniach przyjmuje się następujące stałe materiałowe:  $E = 71240$  MPa,  $\nu = 0.31$ , wymiary geometryczne:  $L = 240$  mm,  $b = 30$  mm (zob. rys. 6.7) oraz grubość powłoki  $h_0 = 0.6$  mm. W zadaniu tym zastosowano trzy warianty dyskretyzacji kwadratowymi elementami powłokowymi:  $(16+16) \times 2$  (tzn. 16 ES w osi ramienia oraz 2 ES wzdłuż szerokości płyty, łącznie 64 ES),  $(32+32) \times 4$  (łącznie 256 ES, zob. rys. 6.7) oraz  $(64+64) \times 8$  (łącznie 1024 ES). Na rys. 6.7 zaprezentowano również sposób przyłożenia obciążenia oraz utwierdzoną krawędź płyty. W literaturze miejsce przyłożenia siły  $P$  przyjmowano w punkcie C (zob. np. [13, 362]), w środku krawędzi (zob. np. [67]) lub kwestii tej nie precyzowano [308]. Jednak w pracy [349] zwrócono uwagę na to, że wartość siły krytycznej w znaczący sposób zależy od miejsca jej przyłożenia, co potwierdziły analizy własne autora. W niniejszej rozprawie zdecydowano się przyłożyć siłę w punkcie C (zob. rys. 6.7), gdyż na podstawie analizy ry-

sunków oraz wyników z literatury stwierdzono, że takie położenie przyjmowano w większości prac [13, 308, 310, 362, 374]. W zadaniu tym na ścieżce równowagi występuje punkt bifurkacji. W celu wyznaczenia siły krytycznej wprowadzono w punkcie D imperfekcję w postaci siły  $P_{\text{impf}} = P/1000$  (zob. rys. 6.7). Podobnie jak w pracach [67, 308] analizuje się dwa warianty obciążenia: wariant A zaprezentowany na rys. 6.7 i wariant B, w którym zakłada się przeciwny kierunek siły  $P_B = -P$  oraz imperfekcji  $P_{\text{impf}}$ . W niniejszym zadaniu ze względu na zastosowaną siatkę ES o kwadratowym kształcie ograniczono się do prezentacji wyników tylko dla elementów z interpolacją określoną we współrzędnych skorygowanych, gdyż dla odpowiadających elementów z interpolacją zdefiniowaną we współrzędnych skośnych uzyskano identyczne wyniki.



Rys. 6.7. Wspornik płytowy w kształcie litery L: geometria, warunki brzegowe, dyskretyzacja  $(32+32) \times 4$  ES

Wartości sił krytycznych  $P_{\text{kr}}$  uzyskane w pracach [13, 308, 310, 374] dla wariantu obciążenia A zestawiono w tab. 6.9. Tymczasem wartości  $P_{\text{kr}}$  otrzymane za pomocą autorskich elementów mieszanych i częściowo mieszanych dla obu wariantów obciążenia i trzech różnych dyskretyzacji zamieszczono w tab. 6.10. Rozwiązania własne porównano z wynikami z pracy [349] oraz wartościami  $P_{\text{kr}}$  otrzymanymi dla elementów EANS4 oraz CAME16. Wartości sił krytycznych obliczono w analizach nieliniowych po usunięciu obciążenia perturbacyjnego  $P_{\text{impf}}$  i powrocie na wtórnej ścieżce równowagi w bliskie otoczenie punktu bifurkacji ( $w_D$  rzędu  $10^{-5}$ ). Powyższa metoda wyznaczania  $P_{\text{kr}}$  została opisana m.in. w [67]. W wariantcie obciążenia A otrzymano bardzo dobrą zgodność między rozwiązaniami własnymi i wartościami sił krytycznych z prac [308, 349, 374] uzyskanymi za pomocą modelu powłokowego. W przypadku wariantu B wartości zaprezentowane w tab. 6.10 są również bardzo zbliżone do wartości odniesienia 0.742 z pracy [308]. Dla obu wariantów obciążenia w przypadku elementów mieszanych uzyskano nieznacznie mniejsze wartości  $P_{\text{kr}}$  niż w przypadku elementów częściowo mieszanych. Natomiast nie zaobserwowano wpływu wyboru wariantu interpolacji składowych membranowych na wyniki, gdyż analizowany wspornik płytowy jest głównie zginany. Różnica w wielkości siły krytycznej między najbogatszą i najuboższą dyskretyzacją wynosi około 1%.

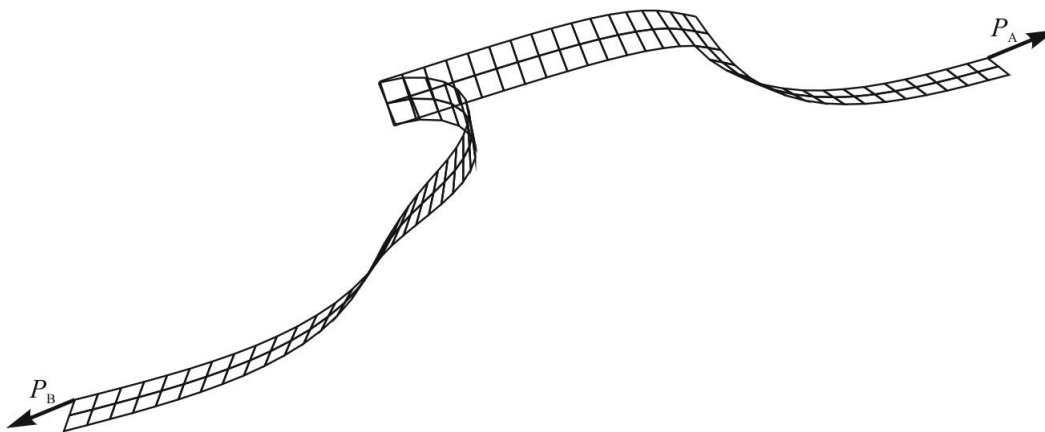
Tabela 6.9. Porównanie wartości sił krytycznych  $P_{\text{kr}}$  z literatury uzyskanych dla wariantu obciążenia A

Praca	[13]	[310]	[13]	[308]	[374]
Teoria	prętów	prętów	powłok	powłok	powłok
$P_{\text{kr}}, \text{N}$	1.088	1.09	1.1453	1.128	1.123

Tabela 6.10. Wspornik płytowy w kształcie litery L: porównanie wartości sił krytycznych  $P_{kr}$  [N] uzyskanych za pomocą autorskich elementów powłokowych z rozwiązaniami odniesienia dla dwóch wariantów obciążenia

Dyskretyzacja	(16+16)×2		(32+32)×4		(64+64)×8	
Wariant obciążenia	A	B	A	B	A	B
Element	Siła krytyczna $P_{kr}$ , N					
WAG4 [349]	1.137	–	1.128	–	1.125	–
CAMe16	1.1261	0.7323	1.1226	0.7311	–	–
EANS4	1.1391	0.7377	1.1292	0.7335	1.1248	0.7319
MIX44 i MIX42	1.1348	0.7361	1.1275	0.7329	1.1241	0.7317
MIX40	1.1348	0.7361	1.1274	0.7329	1.1241	0.7317
MIX38	1.1348	0.7361	1.1273	0.7329	1.1241	0.7317
SMIX24 i SMIX16	1.1391	0.7377	1.1292	0.7335	1.1248	0.7319
SMIX20 i SMIX12	1.1390	0.7377	1.1291	0.7335	1.1248	0.7319

Na podstawie wyników zaprezentowanych w tab. 6.10 w dalszych analizach nieliniowych zdecydowano zastosować następującą dyskretyzację: (16+16)×2 ES. Postać zdeformowanego wspornika płytowego w końcowej fazie analizy nieliniowej uzyskaną dla tej siatki ES i dwóch wariantów obciążenia porównano na rys. 6.8.



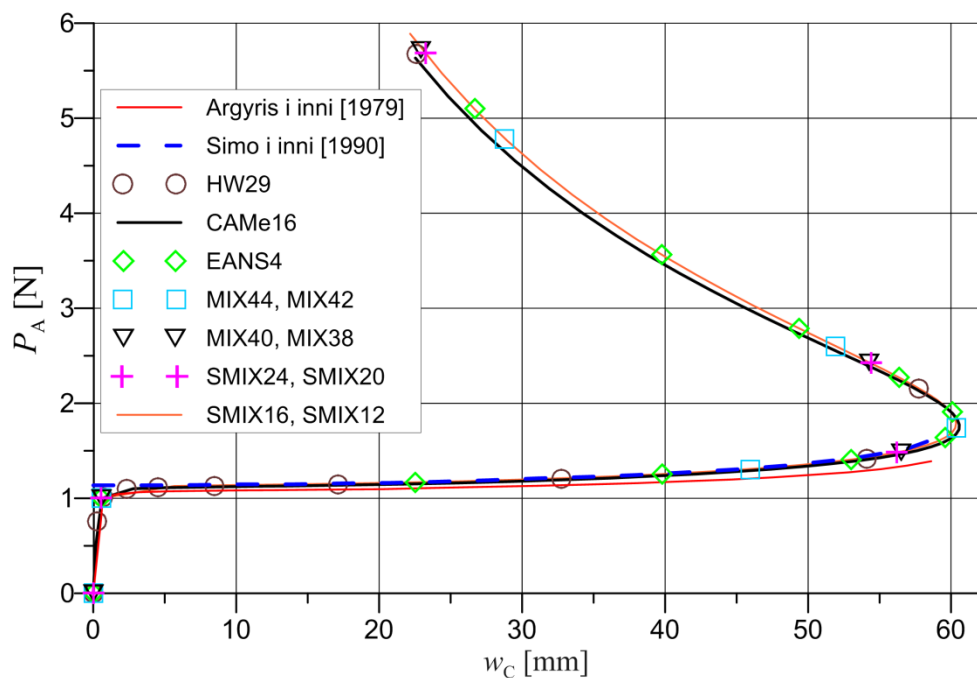
Rys. 6.8. Deformacja wspornika płytowego w kształcie litery L dla dwóch wariantów obciążenia A i B, wyznaczona w analizie nieliniowej dla dyskretyzacji (16+16)×2

W celu oceny zbieżności rozwiązań uzyskanych za pomocą opracowanych elementów mieszanych i częściowo mieszanych przeprowadzono szczegółową analizę nieliniową wariantu obciążenia A. W pierwszym kroku obliczeniowym przyjęto przyrost obciążenia  $\Delta P = 1$  N, a w następnych przyrostach zastosowano sterowanie długością łuku. Dla każdego elementu powłokowego zidentyfikowano maksymalny przyrost parametru łuku  $\Delta s_{max}$  (zob. tab. 6.11) dla założonej w analizie całkowitej długości łuku  $s = 900$ . W tab. 6.11 porównano również całkowitą liczbę iteracji  $N_{iter}$  w analizie nieliniowej oraz przemieszczenie  $w_C$  punktu C (rys. 6.7) uzyskane w pierwszym przyroście dla siły  $P_A = 1$  N. Nieznacznie większe wartości ugięcia  $w_C$  otrzymano dla elementów mieszanych niż częściowo mieszanych. W przypadku elementów mieszanych i częściowo mieszanych B (zob. tab. 5.2) możliwe było zastosowanie w analizie bardzo dużych przyrostów parametru łuku. Do wykonania obliczeń za pomocą elementów SMIX24 i SMIX20 wystarczyły jedynie 4 przyrosty oraz 16 iteracji równowagi. Natomiast w przypadku elementów częściowo mieszanych A konieczne było użycie mniejszych przyrostów  $\Delta s_{max}$  niż w przypadku elementu EANS4. Dla tej samej liczby 10 przyrostów obliczenia za pomocą elementu SMIX20 wymagają 31 iteracji, a za pomocą elementu EANS4 aż 73 iteracji. Zatem przeprowadzone obliczenia potwierdzają obserwacje z prac [349, 362], w których zauważono, że dla tych samych kroków obliczeniowych elementy mieszane sformułowane na podstawie trójpolowej zasady wariacyjnej Hu-Washizu wymagają znacznie mniejszej liczby iteracji równowagi do osiągnięcia

kryterium zbieżności niż elementy EAS. Rozwiązania własne porównano na rys. 6.9 ze ścieżkami równowagi z literatury [13, 308, 362] oraz tymi dla elementów EANS4 i CAME16. Krzywą otrzymaną za pomocą siatki  $(32+32) \times 4$  elementów CAME16 traktuje się jako podstawowe rozwiązanie odniesienia. Pomimo zastosowania bardzo dużych przyrostów parametru łuku dla elementów mieszanych i częściowo mieszanych B otrzymano bardzo dobrą zgodność wyników z rozwiązaniami odniesienia. Jedynie w końcowym odcinku krzywych można zaobserwować niewielką rozbieżność, wynikającą głównie z zastosowania mniej gęstej dyskretyzacji  $(16+16) \times 2$  w rozwiązaniach własnych.

Tabela 6.11. Wspornik płytowy w kształcie litery L: porównanie maksymalnego przyrostu parametru łuku  $\Delta s_{\max}$ , całkowitej liczby iteracji  $N_{\text{iter}}$  i ugięcia  $w_C$  punktu C dla siły  $P_A = 1$  N uzyskanych za pomocą autorskich elementów powłokowych w analizie nieliniowej (wariant obciążenia A)

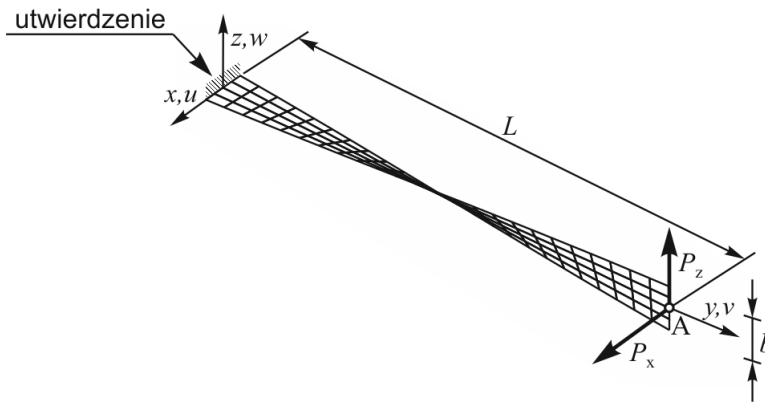
	EANS4	MIX44	MIX42	MIX40	MIX38	SMIX24	SMIX20	SMIX16	SMIX12
$\Delta s_{\max}$	100	225	225	300	300	300	300	20	20
$N_{\text{iter}}$	73	17	17	17	17	16	16	154	154
$w_C$ , mm	0.5595	0.5789	0.5789	0.5791	0.5791	0.5661	0.5662	0.5661	0.5662



Rys. 6.9. Wspornik płytowy w kształcie litery L: porównanie nieliniowych ścieżek równowagi uzyskanych za pomocą elementów mieszanych i częściowo mieszanych dla dyskretyzacji  $(16+16) \times 2$  z rozwiązaniami odniesienia z literatury [13, 308, 362] i tymi dla elementów EANS4 i CAME16, wariant obciążenia A

### 6.3.2. Skręcona o $90^\circ$ belka wspornikowa obciążona siłą

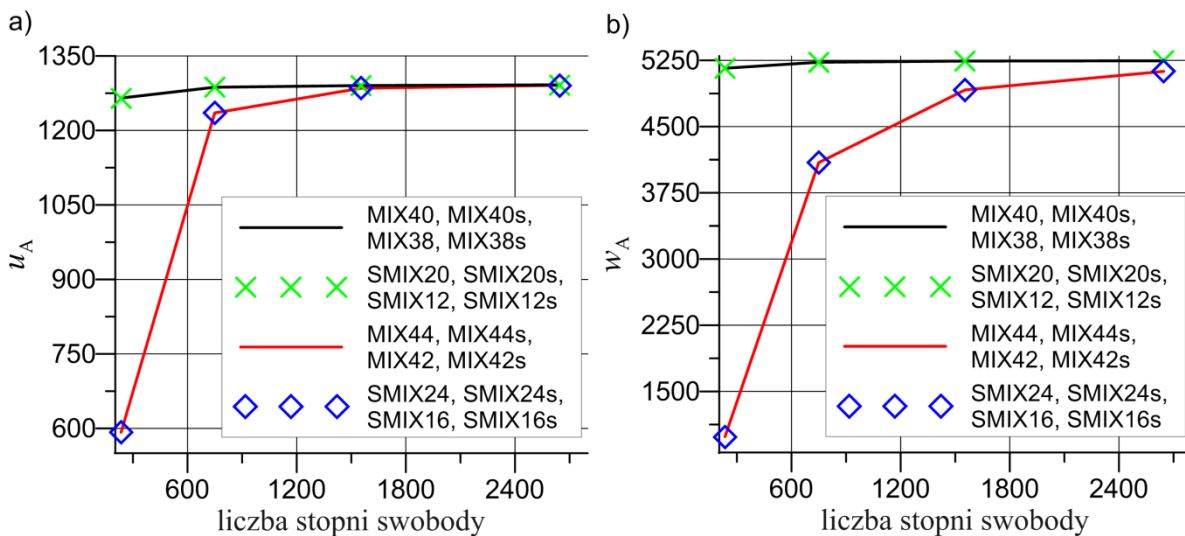
Na rys. 6.10 zaprezentowano wstępnie skręconą o  $90^\circ$  belkę wspornikową o kształcie typowym dla śmigieł, łopatek turbin. Przykład ten został zaproponowany w pracy [213] jako ważny test stosowalności belkowych, powłokowych i bryłowych elementów skończonych. Pomimo skręcenia belki zakłada się, że wstępne odkształcenia w belce są zerowe. Dla utwierdzonej na jednym końcu belki analizuje się dwa warianty obciążenia: siłą skupioną  $P_x$  oraz siłą skupioną  $P_z$  (zob. rys. 6.10). W zadaniu przyjęto następujące stałe materiałowe:  $E = 29 \times 10^6$ ,  $\nu = 0.22$  oraz wymiary geometryczne:  $L = 12$ ,  $b = 1.1$ . W pracy [213] oryginalnie zaproponowano grubość powłoki  $h_0 = 0.32$ . Jednak w późniejszych pracach (zob. np. [67]) przyjmowano również dziesięciokrotnie i stukrotnie mniejszą grubość powłoki:  $h_0 = 0.032$  i  $h_0 = 0.0032$ . W niniejszej rozprawie analizuje się najbardziej wymagający wariant tego zadania z bardzo małą grubością powłoki  $h_0 = 0.0032$ . W związku z tym analizowana belka jest w szczególności podatna na efekt blokady membranowej.



Rys. 6.10. Skręcona o 90° belka wspornikowa: geometria, warunki brzegowe, dyskretyzacja 4×24 ES

W analizie zbieżności podziału przyjęto cztery warianty siatki elementów skończonych: 2×12, 4×24, 6×36, 8×48. Przykładową dyskretyzację 4×24 ES zaprezentowano na rys. 6.10. Wyniki analizy zbieżności przeprowadzonej oddzielnie dla obciążenia  $P_x = 1$  oraz  $P_z = 1$  przedstawiono odpowiednio na rys. 6.11a i rys. 6.11b. Zależność ugięcia na kierunku siły od liczby stopni swobody pokazuje, że dla rzadkich podziałów znacznie lepszą zbieżnością charakteryzują się elementy z uboższą (6-parametrową) interpolacją składowych membranowych niezależnych odkształceń i uogólnionych naprężeń (np. MIX40, SMIX20 i SMIX12). Dla elementów z 8-parametrową interpolacją składowych membranowych (np. MIX44, SMIX24 i SMIX16) szybszą zbieżność uzyskano w przypadku obciążenia siłą  $P_x$  (rys. 6.11b). Wartości przemieszczeń uzyskane w analizie liniowej dla następujących dyskretyzacji: 2×12, 4×24 i 8×48 zestawiono w tab. 6.12. Stanowią one uzupełnienie analiz liniowych z podrozdziału 6.2, ze względu na niepłaską geometrię skręconej belki wspornikowej i występujący w niej złożony stan naprężeń. W przypadku elementów z 6-parametrową interpolacją składowych membranowych (np. MIX40, SMIX20) otrzymano dobrą zgodność wyników z rozwiązaniem odniesienia z teorii belek i rozwiązaniem uzyskanym za pomocą elementów CAME16. Podczas gdy dla elementów częściowo mieszanych z bogatszą interpolacją składowych membranowych (np. SMIX24 i SMIX16) uzyskano takie same wartości przemieszczeń jak dla elementu EANS4.

W analizie liniowej zauważono również, że różnice w wynikach pomiędzy elementami mieszаныmi z interpolacją niezależnych odkształceń i uogólnionych naprężeń zdefiniowaną we współrzędnych skorygowanych i elementami z interpolacją określoną we współrzędnych skośnych są mniejsze od 0.001%. Analizy własne autora wykazały, że taka sama zależność występuje w zakresie nieliniowym. W związku z tym w analizach nieliniowych ograniczono się do prezentacji wyników tylko dla elementów z interpolacją zdefiniowaną we współrzędnych skorygowanych.

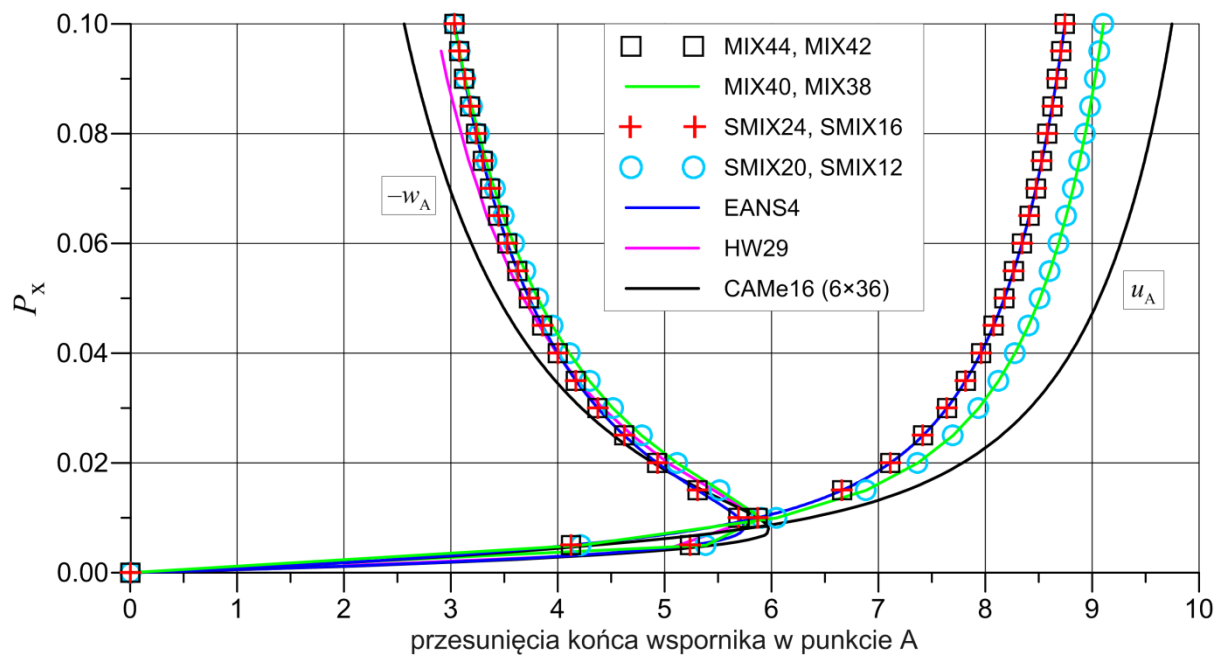


Rys. 6.11. Skręcona o 90° belka wspornikowa – liniowa analiza zbieżności podziału dla autorskich elementów mieszanych i częściowo mieszanych: a) przemieszczenie  $u_A$  pod siłą  $P_x$ , b) przemieszczenie  $w_A$  pod siłą  $P_z$

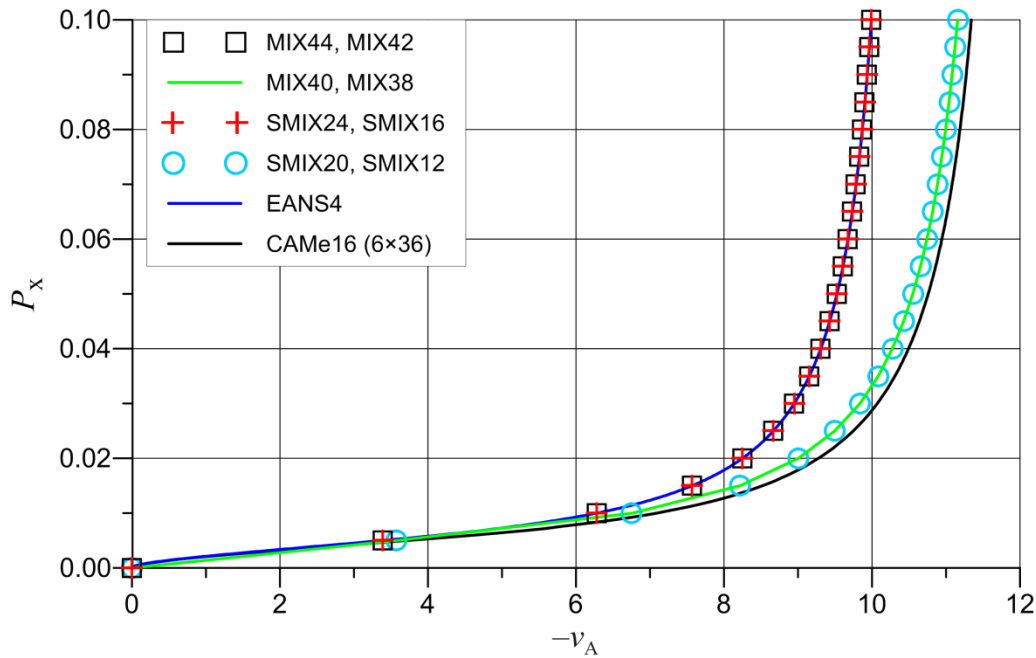
Tabela 6.12. Skręcona o 90° belka wspornikowa: porównanie wartości przemieszczeń  $u_A$  i  $w_A$  powstałych pod wpływem działania odpowiednio sił  $P_x$  i  $P_z$  otrzymanych w analizie liniowej za pomocą autorskich elementów powłokowych z wartościami odniesienia obliczonymi zgodnie z teorią belek i dla elementów EANS4 i CAME16

Kierunek siły – przesunięcie		$P_x - u_A$			$P_z - w_A$		
Element skończony	Dyskretyzacja	2×12	4×24	8×48	2×12	4×24	8×48
MIX44, MIX44s, MIX42, MIX42s		592.2	1235.2	1290.6	986.5	4092.1	5126.2
MIX40, MIX40s, MIX38, MIX38s		1265.3	1287.0	1291.6	5159.7	5228.9	5245.8
SMIX24, SMIX24s, SMIX16, SMIX16s		592.1	1235.0	1290.6	986.3	4091.6	5125.7
SMIX20, SMIX20s, SMIX12, SMIX12s		1264.7	1286.9	1291.5	5157.3	5227.8	5245.1
EANS4		592.1	1235.0	1290.6	986.3	4091.6	5125.7
CAME16		1287.6	1287.9	1288.6	5223.8	5238.2	5241.5
Rozwiązanie odniesienia - teoria belek		1294.0			5256.0		

Biorąc pod uwagę wyniki zaprezentowane na rys. 6.11 i w tab. 6.12, w analizie geometrycznie nieliniowej zastosowano podział 4×24 oraz dodatkowo kontrolnie dyskretyzację 8×48. Nieliniowe ścieżki deformacji uzyskane za pomocą elementów mieszanych i częściowo mieszanych dla wariantu obciążenia siłą skupioną  $P_x$  zaprezentowano na rys. 6.12 i 6.13 (dyskretyzacja 4×24). Krzywe autorskie porównano z krzywymi uzyskanymi za pomocą elementów EANS4 i HW29 i podstawowym rozwiązaniem odniesienia wyznaczonym dla siatki 6×36 elementów CAME16. Wartości przesunięć w punkcie A (rys. 6.10) dla trzech poziomów obciążenia zestawiono w tab. 6.13, co umożliwiło szczegółowe porównanie wyników uzyskanych dla różnych elementów powłokowych. Dla wszystkich przemieszczeń zaobserwowano zauważalne różnice pomiędzy wynikami własnymi i podstawowym rozwiązaniem odniesienia. Związane jest to z wolniejszą zbieżnością elementów w analizowanym wariancie zadania z bardzo małą grubością powłoki i przyjęciem w rozwiązaniu odniesienia ponad 16 razy większej liczby stopni swobody. Podobnie jak w zakresie liniowym znacznie większy wpływ na wyniki ma przyjęty wariant interpolacji składowych membranowych niż sposób interpolacji składowych zgięciowych i związanych z owinięciem. Lepszą zgodność wyników, w szczególności dla przemieszczenia  $v_A$  (rys. 6.13), otrzymano dla elementów MIX40, MIX38, SMIX20 i SMIX12 o 6-parametrowej interpolacji składowych membranowych. Krzywa  $P_x(-w_A)$  dla elementu częściowo mieszanego HW29 daje nieznacznie lepszą zgodność wyników niż autorskie elementy powłokowe.



Rys. 6.12. Skręcona o 90° belka wspornikowa – porównanie krzywych  $P_x(u_A)$  i  $P_x(-w_A)$  uzyskanych za pomocą autorskich elementów powłokowych z rozwiązaniami odniesienia, dyskretyzacja 4×24



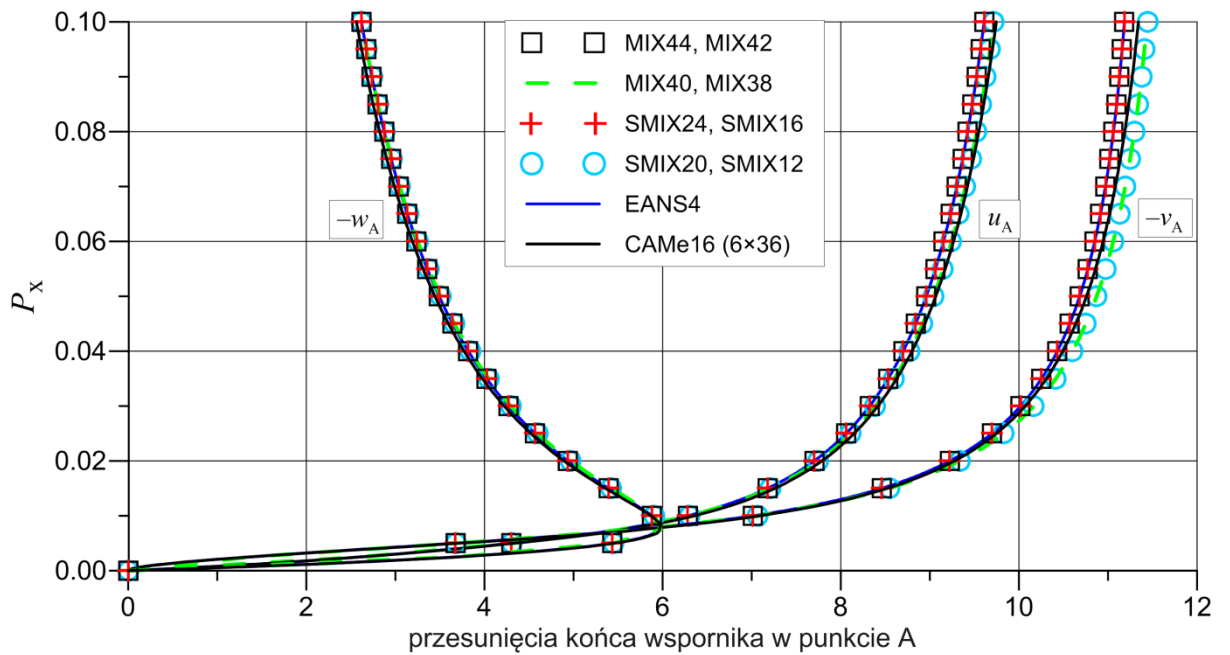
Rys. 6.13. Skręcona o 90° belka wspornikowa – porównanie krzywych  $P_x(-v_A)$  uzyskanych za pomocą autorskich elementów powłokowych z rozwiązaniami odniesienia, dyskretyzacja 4×24

Tabela 6.13. Skręcona o 90° belka wspornikowa – porównanie wartości przesunięć w punkcie A uzyskanych w analizie nieliniowej dla 3 wartości siły  $P_x$  za pomocą różnych elementów powłokowych, dyskretyzacja 4×24

Element	$P_x = 0.01$			$P_x = 0.02$			$P_x = 0.1$		
	$u_A$	$v_A$	$w_A$	$u_A$	$v_A$	$w_A$	$u_A$	$v_A$	$w_A$
MIX44, MIX42	5.8708	6.2800	5.6897	7.1126	8.2480	4.9293	8.7457	9.9854	3.0328
MIX40, MIX38	6.0497	6.7600	5.9042	7.3710	9.0071	5.1131	9.1064	11.157	3.0292
SMIX24	5.8692	6.2786	5.6901	7.1109	8.2486	4.9312	8.7451	9.9912	3.0353
SMIX20	6.0451	6.7526	5.9021	7.3664	9.0051	5.1157	9.1040	11.160	3.0309
SMIX16, EANS4	5.8693	6.2796	5.6909	7.1110	8.2489	4.9314	8.7451	9.9912	3.0354
SMIX12	6.0451	6.7526	5.9022	7.3664	9.0051	5.1157	9.1040	11.160	3.0309
HW29	–	–	5.86	–	–	5.04	–	–	2.85
CAMe16	6.3547	7.0874	5.8696	7.7881	9.2758	4.8931	9.7465	11.342	2.5621

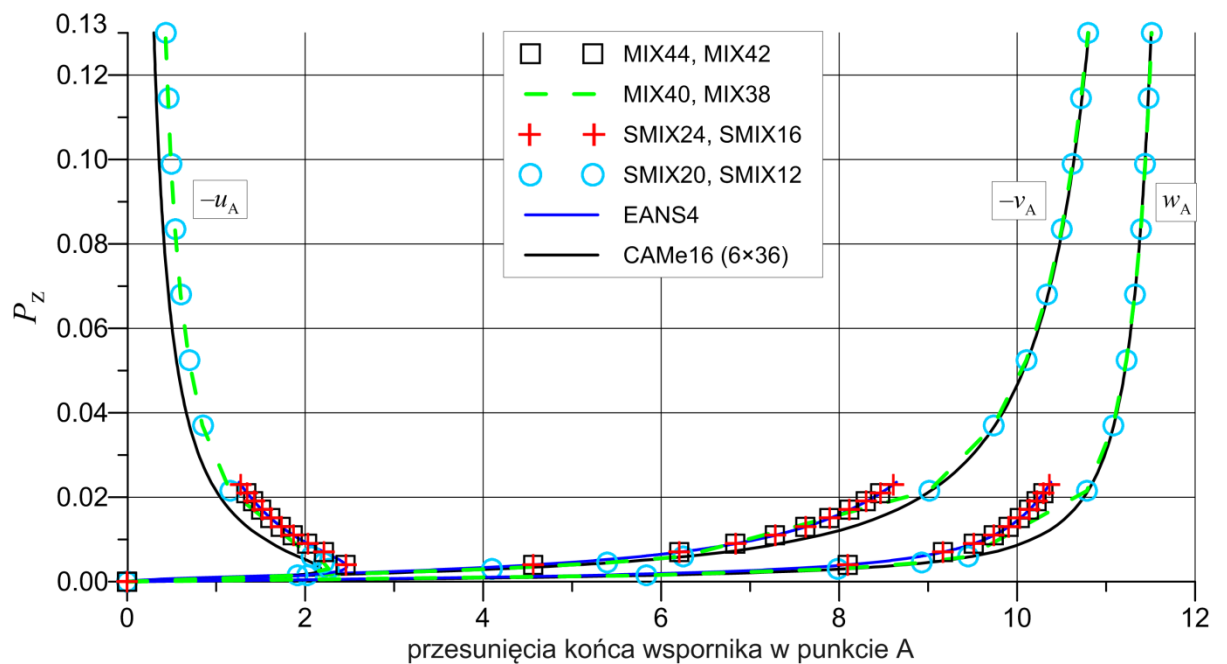
Ze względu na zaobserwowane różnice w wynikach dla podziału 4×24 obliczenia powtórzono dla dwukrotnie zagęszczonej siatki ES 8×48. Uzyskane krzywe deformacji dla przemieszczeń  $u_A$ ,  $v_A$  i  $w_A$  pod wpływem działania siły  $P_x$  zaprezentowano na rys. 6.14. Dla dyskretyzacji 8×48 otrzymano dobrą zgodność wyników z rozwiązaniem odniesienia, co potwierdza poprawność sformułowania elementów mieszanych i częściowo mieszanych nawet dla bardzo cienkich powłok. W przypadku przemieszczenia  $v_A$  otrzymano za pomocą elementów autorskich o uboższej interpolacji składowych membranych (np. MIX40, SMIX20) mniej sztywną odpowiedź niż dla siatki elementów CAMe16 o ponad 4 razy większej liczbie stopni swobody.





Rys. 6.14. Skręcona o 90° belka wspornikowa – porównanie krzywych  $P_x(u_A)$ ,  $P_x(-v_A)$  i  $P_x(-w_A)$  uzyskanych za pomocą autorskich elementów powłokowych z rozwiązaniami odniesienia, dyskretyzacja 8×48

Następnie analizę nieliniową przeprowadzono dla wariantu obciążenia siłą skupioną  $P_z$ , stosując dyskretyzację 4×24. Nieliniowe ścieżki deformacji w punkcie A (zob. rys. 6.10) uzyskane za pomocą elementów mieszanych i częściowo mieszanych zaprezentowano na rys. 6.15. Natomiast wartości przemieszczeń obliczone dla  $P_z = 0.006$  i  $P_z = 0.130$  porównano w tab. 6.14. W przypadku zastosowania elementów o 6-parametrowej interpolacji składowych membranowych (np. MIX40, SMIX20) uzyskano bardzo dobrą zgodność wyników z rozwiązaniem odniesienia. Jedyne dla przemieszczenia  $u_A$  zaobserwowano niewielką rozbieżność pomiędzy krzywymi. Natomiast w przypadku elementów o bogatszej interpolacji składowych membranowych (np. MIX44, SMIX24), podobnie jak w przypadku elementu EANS4, dochodzi do przerwania obliczeń dla siły  $P_z$  równej około 0.02, z powodu problemów ze zbieżnością rozwiązania. Dodatkowo do tej wartości siły można zaobserwować zauważalną



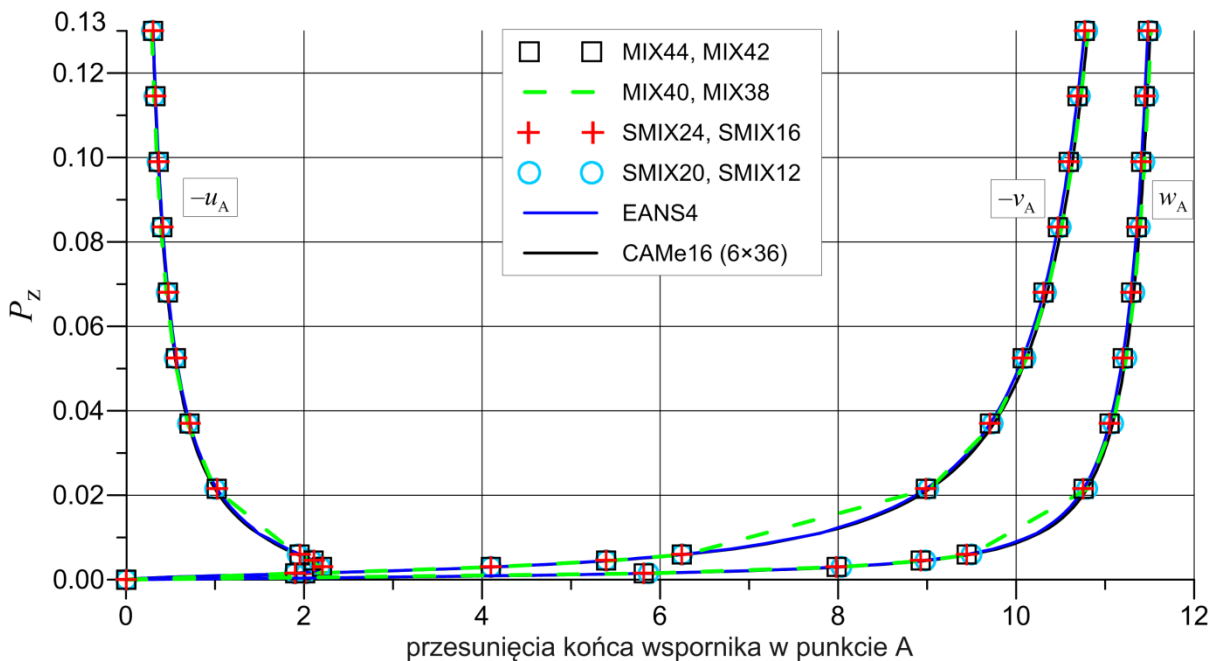
Rys. 6.15. Skręcona o 90° belka wspornikowa – porównanie krzywych  $P_z(-u_A)$ ,  $P_z(-v_A)$  i  $P_z(w_A)$  uzyskanych za pomocą autorskich elementów powłokowych z rozwiązaniami odniesienia, dyskretyzacja 4×24

Tabela 6.14. Skręcona o 90° belka wspornikowa – porównanie wartości przesuńnięć w punkcie A uzyskanych w analizie nieliniowej dla dwóch wartości siły  $P_z$  za pomocą różnych elementów powłokowych, dyskretyzacja 4×24 (wartości oznaczone gwiazdką uzyskano dla zagęszczonej siatki ES 8×48)

Element	$P_z = 0.006$			$P_z = 0.130$		
	$-u_A$	$-v_A$	$w_A$	$-u_A$	$-v_A$	$w_A$
MIX44, MIX42	2.3050	5.7836	8.9170	0.30338*	10.769*	11.479*
MIX40	2.0671	6.2525	9.4541	0.43117	10.797	11.513
MIX38	2.0671	6.2525	9.4541	0.43116	10.797	11.513
SMIX24	2.3092	5.7828	8.9157	0.30538*	10.769*	11.479*
SMIX20, SMIX12	2.0726	6.2511	9.4525	0.43655	10.797	11.512
SMIX16	1.9549*	6.2449*	9.4444*	0.30539*	10.769*	11.479*
EANS4	2.3094	5.7821	8.9150	0.30539*	10.769*	11.479*
CAMe16	1.9186	6.2886	9.4958	0.30136	10.806	11.505

rozbieżność pomiędzy rozwiązaniami własnymi i rozwiązaniem odniesienia. Przyczyną przerwania obliczeń dla elementów MIX44, MIX42, SMIX24 i SMIX16 może być kiepska zbieżność podziału zaobserwowana dla tych elementów na rys. 6.11b w przypadku ubogich dyskretyzacji. Ze względu na przerwanie obliczeń w przypadku niektórych elementów w tab. 6.14 podano wartości przemieszczeń dla zagęszczonej dyskretyzacji 8×48 (oznaczone gwiazdką).

Obliczenia w wariancie zadania z siłą skupioną  $P_z$  powtórzono stosując dwukrotnie zagęszczonego podział 8×48. Wyznaczone w analizie nieliniowej ścieżki deformacji  $P_z(-u_A)$ ,  $P_z(-v_A)$  i  $P_z(w_A)$  końca wspornika zaprezentowano na rys. 6.16. Zastosowanie zagęszczonej dyskretyzacji dało bardzo dobrą zgodność wyników z rozwiązaniem odniesienia. Tym razem nie wystąpiły żadne problemy ze zbieżnością dla elementów z bogatszą 8-parametrową interpolacją składowych membranowych.



Rys. 6.16. Skręcona o 90° belka wspornikowa – porównanie krzywych  $P_z(-u_A)$ ,  $P_z(-v_A)$  i  $P_z(w_A)$  uzyskanych za pomocą autorskich elementów powłokowych z rozwiązaniami odniesienia, dyskretyzacja 8×48

W trakcie wykonywania analiz nieliniowych oceniono również zbieżność opracowanych elementów mieszanych i częściowo mieszanych dla dyskretyzacji 4×24. W tym celu dla każdego typu elementu powłokowego określono maksymalny przyrost obciążenia  $\Delta P$ , który umożliwił przeprowadzenie analizy do osiągnięcia całkowitej siły, która w przypadku obciążenia  $P_x$  wynosiła  $P_x = 0.1$ . Tymczasem w wariancie obciążenia siłą  $P_z$  niezależnie określono maksymalny przyrost obciążenia  $\Delta P_1$

w zakresie obciążenia  $P_z \in [0, 0.006]$  oraz maksymalny przyrost  $\Delta P_2$  w zakresie obciążenia  $P_z \in [0.006, 0.13]$ . Maksymalny przyrost  $\Delta P$ , liczbę kroków  $N_{\text{krok}}$  oraz całkowitą liczbę iteracji  $N_{\text{iter}}$  w analizie nieliniowej porównano dla różnych elementów powłokowych w tab. 6.15 dla siły  $P_x$  oraz w tab. 6.16 dla siły  $P_z$ . W tab. 6.16 w przypadku niektórych elementów ze względu na przerwanie obliczeń podano wartości otrzymane dla podziału  $8 \times 48$  (oznaczone gwiazdką). W wariancie obciążenia siłą  $P_x$  możliwe było w przypadku elementów mieszanych i częściowo mieszanych B zastosowanie tak samo dużego przyrostu obciążenia jak w rozwiązaniu uzyskanym za pomocą elementu HW29 z pracy [362]. Jednak w porównaniu do elementu HW29 autorskie elementy powłokowe wymagały zauważalnie mniejszej liczby iteracji. W obu wariantach obciążenia najmniejszej liczby iteracji równowagi wymagały obliczenia za pomocą elementów MIX40, MIX38 oraz SMIX20. Natomiast w przypadku elementów o bogatszej 8-parametrowej interpolacji składowych membranowych potrzebnych było trochę więcej iteracji.

W porównaniu do elementów EANS4 i CAME16 (rozwiętych w ramach teorii 6-parametrowej) opracowane elementy mieszane i częściowo mieszane B wykazują nad nimi znaczącą przewagę, gdyż pozwalają na zastosowanie znacznie większych przyrostów oraz wymagają znacząco mniejszej liczby iteracji. Jedynie w przypadku elementów częściowo mieszanych A (SMIX16 i SMIX12) uzyskano bardzo słabą zbieżność rozwiązań najgorszą ze wszystkich analizowanych elementów powłokowych.

Tabela 6.15. Skręcona o  $90^\circ$  belka wspornikowa – porównanie maksymalnego przyrostu obciążenia  $\Delta P$ , liczby kroków  $N_{\text{krok}}$  oraz całkowitej liczby iteracji  $N_{\text{iter}}$  w analizie nieliniowej, wariant obciążenia  $P_x$ , siatka ES  $4 \times 24$

	CAME16	EANS4	HW29	MIX44, MIX42	MIX40, MIX38	SMIX24	SMIX20	SMIX16	SMIX12
Max $\Delta P$	$4 \times 10^{-4}$	$8 \times 10^{-5}$	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	$3.2 \times 10^{-5}$	$3.2 \times 10^{-5}$
$N_{\text{krok}}$	250	1250	20	20	20	20	20	3125	3125
$N_{\text{iter}}$	807	5072	107	76	54	77	55	11181	6251

Tabela 6.16. Skręcona o  $90^\circ$  belka wspornikowa – porównanie maksymalnego przyrostu obciążenia  $\Delta P$ , całkowitej liczby kroków  $N_{\text{krok}}$  oraz całkowitej liczby iteracji  $N_{\text{iter}}$  w analizie nieliniowej, wariant obciążenia  $P_z$ , siatka ES  $4 \times 24$  (wartości oznaczone gwiazdką uzyskano dla zagęszczonej siatki ES  $8 \times 48$ )

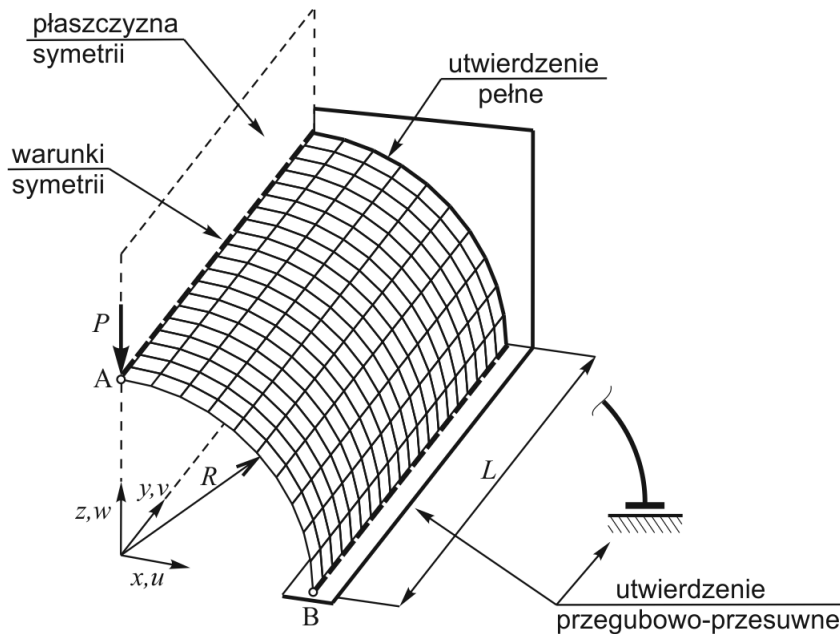
	CAME16	EANS4	MIX44, MIX42, SMIX24	MIX40, MIX38, SMIX20	SMIX16	SMIX12
Max $\Delta P_1$	$1.5 \times 10^{-4}$	$6 \times 10^{-5}$	0.002	0.0015	$2 \times 10^{-5}$ *	$2 \times 10^{-5}$
Max $\Delta P_2$	$1.24 \times 10^{-3}$	$1.24 \times 10^{-3}$ *	0.0155*	0.0155	$8 \times 10^{-5}$ *	$2 \times 10^{-4}$
$N_{\text{krok}}$	140	150*	12*	12	1850*	920
$N_{\text{iter}}$	452	544*	47*	36	6897*	2168

### 6.3.3. Utwierdzona powłoka walcowa obciążona siłą

Wspornik płytowy w kształcie litery L podlegał głównie zginaniu, podczas gdy w skręconej o  $90^\circ$  belce wspornikowej dominował stan membranowy. Przykład utwierdzonej powłoki walcowej obciążonej siłą skupioną  $P$  (rys. 6.17) pozwala ocenić opracowane elementy powłokowe w przypadku występowania interakcji stanów membranowego i zgięciowego. Zadanie to zostało zaproponowane w pracy [318] i następnie było analizowane w licznych pracach, zob. np. [67, 117, 242, 370]. Geometrię i sposób podparcia powłoki walcowej zaprezentowano na rys. 6.17. W rozwiązaniu wykorzystano pionową płaszczyznę symetrii, zadając odpowiednie warunki symetrii na górnej prostej krawędzi. W zadaniu przyjęto następujące stałe materiałowe:  $E = 2.0685 \times 10^7$ ,  $\nu = 0.3$ , wymiary geometryczne:  $R = 1.016$ ,  $L = 3.048$  oraz grubość powłoki  $h_0 = 0.03$ .

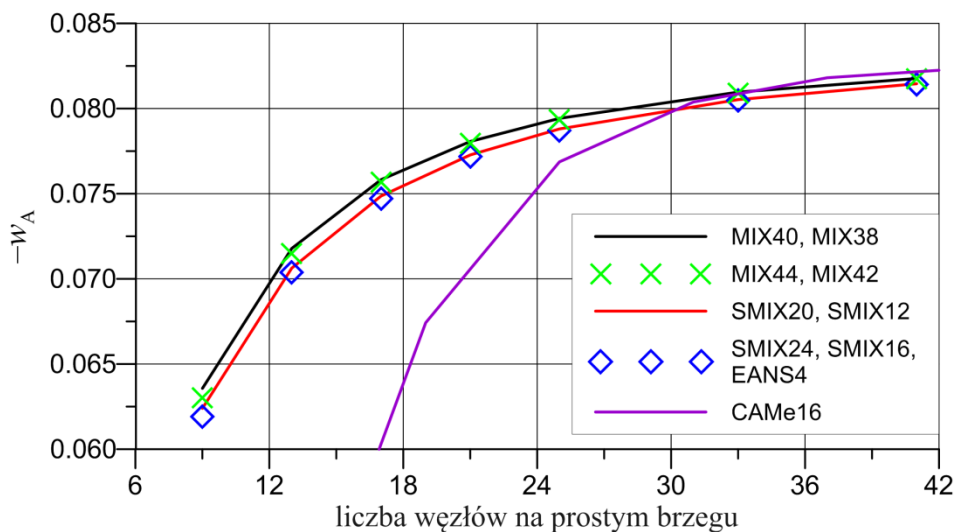
W niniejszej rozprawie podobnie jak w pracach [67, 370] zastosowano podziały typu  $N \times 2N$ , gdzie  $N$  oznacza liczbę elementów na obwodzie walca, a  $2N$  liczbę elementów wzdłuż tworzącej cylindra (osi  $y$ ). W ten sposób przyjęty podział na elementy skończone pozwala na wierniejsze oddanie deformacji prostego brzegu cylindra. Przykładową dyskretyzację  $10 \times 20$  pokazano na rys. 6.17. Ze względu na kształt elementów skończonych bardzo zbliżony do kwadratowego w niniejszym przykładzie ogra-

niczono się do prezentacji wyników uzyskanych za pomocą elementów z interpolacją niezależnych odkształceń i uogólnionych naprężeń zdefiniowaną we współrzędnych skorygowanych.



Rys. 6.17. Utwierdzona powłoka walcowa: geometria, warunki brzegowe, dyskretyzacja  $10 \times 20$  ES

W liniowej analizie zbieżności podziału zastosowano następujące siatki elementów skończonych:  $4 \times 8$ ,  $6 \times 12$ ,  $8 \times 16$ ,  $10 \times 20$ ,  $12 \times 24$ ,  $16 \times 32$ ,  $20 \times 40$ . Zależność ugięcia  $w_A$  punktu A (zob. rys. 6.17) od liczby węzłów na prostym brzegu cylindra porównano między autorskimi elementami powłokowymi oraz elementami EANS4 i CAME16 na rys. 6.18 dla siły  $P = 100$ . Dodatkowo wartości ugięcia  $w_A$  uzyskane w analizie liniowej dla trzech wybranych dyskretyzacji zaprezentowano w tab. 6.17. Krzywe na rys. 6.18 pokazują, że nieznacznie szybszą zbieżność rozwiązań uzyskano w przypadku elementów mieszanych niż dla elementów częściowo mieszanych. Ze względu na to, że początkowo deformacja jest zdominowana przez stan zgięciowy zaobserwowano bardzo mały wpływ wariantu interpolacji składowych membranowych na wartość  $w_A$  (zob. tab. 6.17). W przypadku ubogich dyskretyzacji zbieżność opracowanych 4-węzłowych elementów powłokowych jest znacznie szybsza niż 16-węzłowych elementów CAME16.

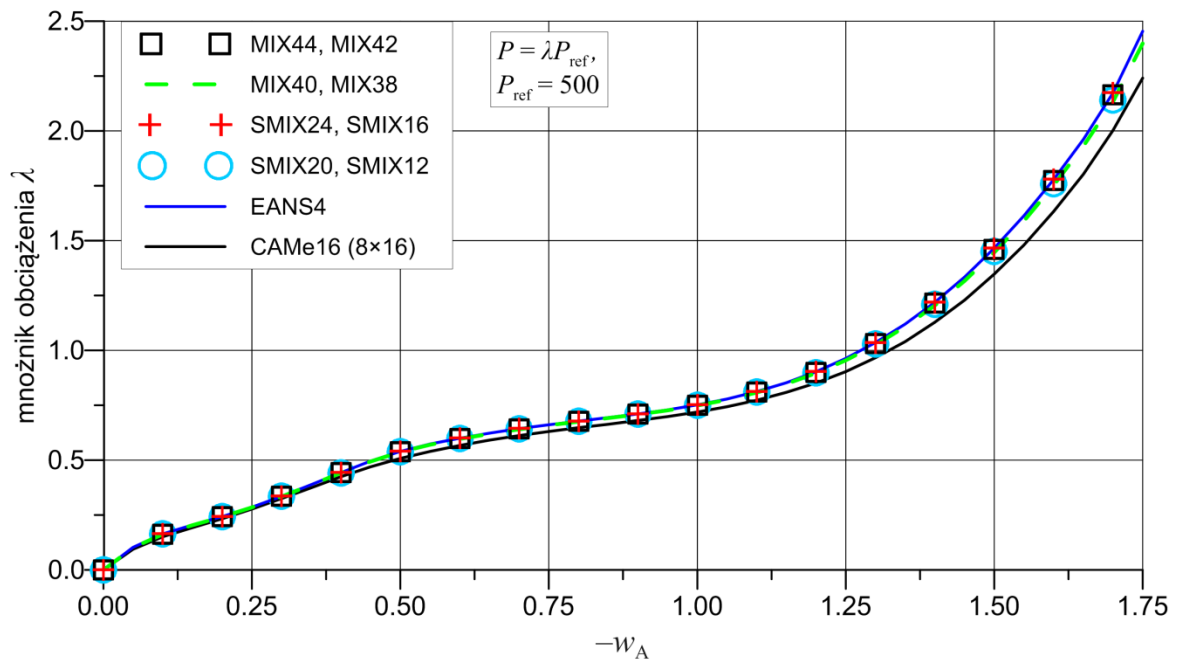


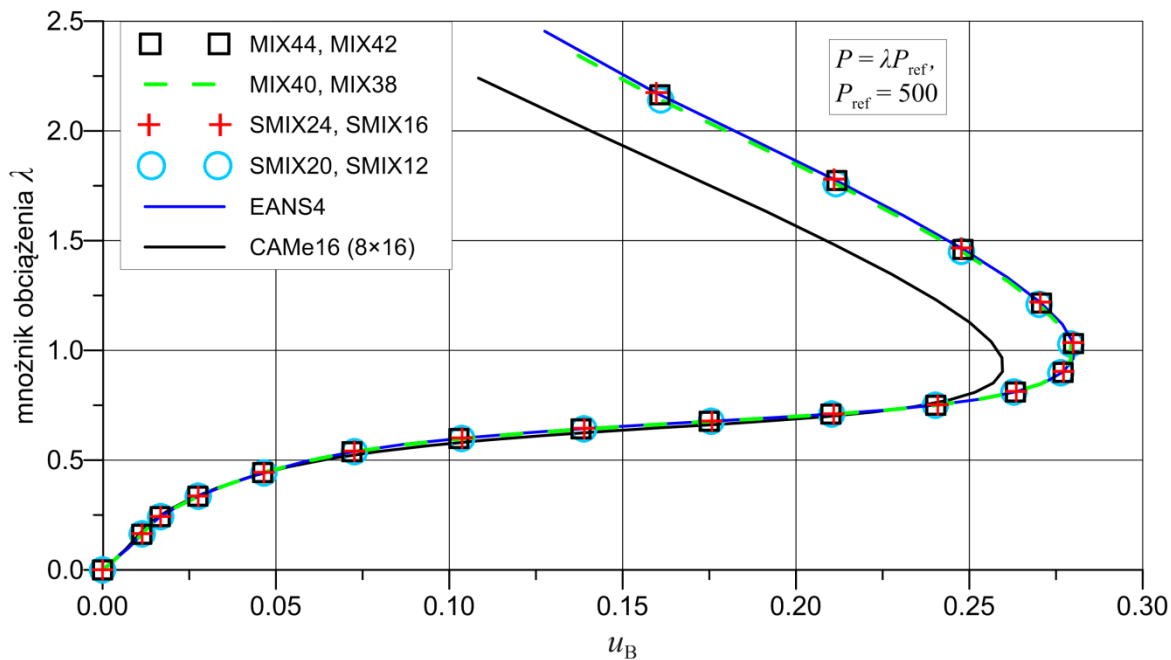
Rys. 6.18. Utwierdzona powłoka walcowa obciążona siłą  $P = 100$ , liniowa analiza zbieżności podziału dla autorskich elementów mieszanych i częściowo mieszanych

Tabela 6.17. Porównanie wartości ugięcia  $w_A$  punktu A powłoki walcowej obciążonej siłą  $P = 100$  wyznaczonych w analizie liniowej za pomocą autorskich elementów powłokowych oraz elementów EANS4 i CAME16

siatka ES	CAMe16	EANS4	MIX44, MIX42	MIX40, MIX38	SMIX24, SMIX16	SMIX20, SMIX12
6×12	0.08181	0.07037	0.07150	0.07178	0.07037	0.07062
10×20	0.08324	0.07718	0.07796	0.07806	0.07718	0.07728
16×32	–	0.08047	0.08091	0.08096	0.08047	0.08052

Biorąc pod uwagę wyniki z liniowej analizy zbieżności, w celu porównania opracowanych elementów powłokowych w zakresie geometrycznie nieliniowym zastosowano podział  $10 \times 20$ . Jako podstawowe rozwiązanie odniesienia przyjęto te wyznaczone dla siatki  $8 \times 16$  elementów CAMe16. W pracach [67, 370] wykazano bardzo dobrą zgodność rozwiązania uzyskanego za pomocą elementów CAMe16 z rozwiązaniami odniesienia z literatury [117, 242, 318]. Nieliniowe ścieżki równowagi wyznaczono w 35 przyrostach, stosując sterowanie przemieszczeniem i stały przyrost  $\Delta q = \Delta w_A = 0.05$  ugięcia w punkcie A. W rozwiązaniu przyjęto następującą wartość obciążenia odniesienia  $P_{\text{ref}} = 500$  ( $P = \lambda P_{\text{ref}}$ ). Krzywe  $\lambda(-w_A)$  i  $\lambda(u_B)$  wyznaczone za pomocą elementów mieszanych i częściowo mieszanych porównano odpowiednio na rys. 6.19 i rys. 6.20. W przypadku wszystkich autorskich elementów powłokowych otrzymano zbliżone nieliniowe ścieżki deformacji, nieco przeszywnione względem rozwiązania odniesienia. Rys. 6.20 sugeruje, że przyjęta dyskretyzacja  $10 \times 20$  dla  $\lambda > 0.75$  jest zbyt uboga, aby wiernie oddać deformację powłoki walcowej w sąsiedztwie punktu B (zob. rys. 6.17). Szczegółowe porównanie wyników uzyskanych za pomocą różnych elementów powłokowych umożliwia tab. 6.18, w której zestawiono wartości mnożnika obciążenia  $\lambda$  dla czterech różnych wartości przemieszczenia  $w_A$ . Rozwiązanie najbliższe rozwiązaniu odniesienia otrzymano w przypadku zastosowania elementów MIX40 i MIX38. Podobnie jak w zakresie liniowym mniej przeszywnione wyniki otrzymano za pomocą elementów mieszanych. Jednak tab. 6.18 pokazuje, że wraz ze wzrostem obciążenia rośnie znaczenie zastosowanego wariantu interpolacji składowych membranowych. Bliższe rozwiązaniu odniesienia wyniki otrzymano za pomocą elementów o uboższej 6-parametrowej interpolacji (np. MIX40 i SMIX20). W przypadku elementów SMIX24 i SMIX16 otrzymano takie same wyniki jak dla elementu EANS4.

Rys. 6.19. Utwierdzona powłoka walcowa – porównanie nieliniowych ścieżek deformacji  $\lambda(-w_A)$  uzyskanych za pomocą autorskich elementów powłokowych z rozwiązaniami odniesienia, dyskretyzacja  $10 \times 20$



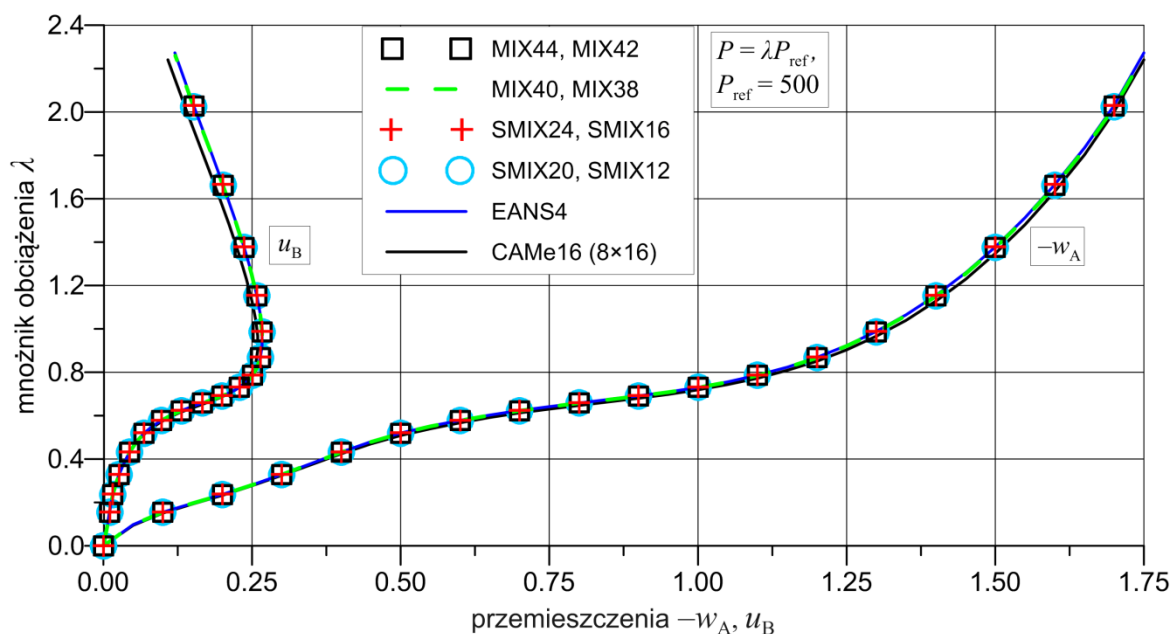
Rys. 6.20. Utwierdzona powłoka walcowa – porównanie nieliniowych ścieżek deformacji  $\lambda(-u_B)$  uzyskanych za pomocą autorskich elementów powłokowych z rozwiązaniami odniesienia, dyskretyzacja  $10 \times 20$

Tabela 6.18. Utwierdzona powłoka walcowa – porównanie wartości mnożnika obciążenia  $\lambda$  uzyskanych w analizie nieliniowej dla 4 wartości ugięcia  $w_A$  za pomocą różnych elementów powłokowych, dyskretyzacja  $10 \times 20$

element	CAMe16 ( $8 \times 16$ )	EANS4	MIX44	MIX42	MIX40	MIX38	SMIX24, SMIX16	SMIX20, SMIX12
$w_A = -0.1$	0.1505	0.1640	0.1625	0.1625	0.1623	0.1623	0.1640	0.1639
$w_A = -0.5$	0.5083	0.5399	0.5386	0.5386	0.5372	0.5371	0.5399	0.5385
$w_A = -1.3$	0.9668	1.0353	1.0313	1.0313	1.0248	1.0248	1.0353	1.0289
$w_A = -1.75$	2.2401	2.4539	2.4424	2.4423	2.3979	2.3976	2.4539	2.4102

Ze względu na zaobserwowane różnice w wynikach uzyskanych dla dyskretyzacji  $10 \times 20$  w celu sprawdzenia poprawności sformułowanych elementów powłokowych, obliczenia powtórzone dla zagęszczonej siatki ES  $16 \times 32$ . Otrzymane nieliniowe ścieżki równowagi dla przemieszczeń  $u_B$  i  $w_A$  zaprezentowano na rys. 6.21. W wyniku zagęszczenia dyskretyzacji otrzymano dobrą zgodność wyników z rozwiązaniem odniesienia uzyskanym za pomocą elementów CAMe16.

Następnie w celu oceny zbieżności rozwiązań uzyskanych za pomocą opracowanych elementów mieszanych i częściowo mieszanych dla dyskretyzacji  $10 \times 20$  określono maksymalny pierwszy przyrost mnożnika obciążenia  $\Delta\lambda_1$  oraz odpowiadającą temu przyrostowi liczbę iteracji równowagi  $N_1$ . Dodatkowo dla każdego opracowanego elementu powłokowego wyznaczono całkowitą liczbę iteracji  $N_{\text{iter}}$  w 35 przyrostach przeprowadzonej analizy nieliniowej, w której zastosowano sterowanie przemieszczeniem z przyrostem  $w_A = 0.05$ . Otrzymane wartości porównano w tab. 6.19 z tymi uzyskanymi dla elementów CAMe16 i EANS4. W przypadku wszystkich analizowanych elementów powłokowych możliwe było zastosowanie pierwszego dużego przyrostu obciążenia  $\Delta\lambda_1$ . W przeciwieństwie do poprzednich przykładów, w tym zadaniu można było zastosować ponad dwa razy większy pierwszy przyrost  $\Delta\lambda_1$  w przypadku elementów CAMe16 i EANS4 niż dla elementów mieszanych i częściowo mieszanych. Jednak większy przyrost obciążenia wiązał się z proporcjonalnie większą liczbą iteracji  $N_1$  (zob. tab. 6.19), a czas obliczeń zależy głównie od liczby iteracji. Mniejszy  $\Delta\lambda_1$  dla autorskich elementów może być spowodowany zaobserwowaną w pracy [87] niestabilnością rozwiązania związaną z istnieniem fikcyjnych punktów granicznych na ścieżce równowagi. Tymczasem w całej analizie nieliniowej opracowane elementy mieszane i częściowo mieszane potrzebowały nieznacznie mniejszej liczby iteracji  $N_{\text{iter}}$  w porównaniu do elementów CAMe16 i EANS4. Najmniejszej liczby iteracji równowagi wymagały obliczenia za pomocą elementów SMIX24 i SMIX20.

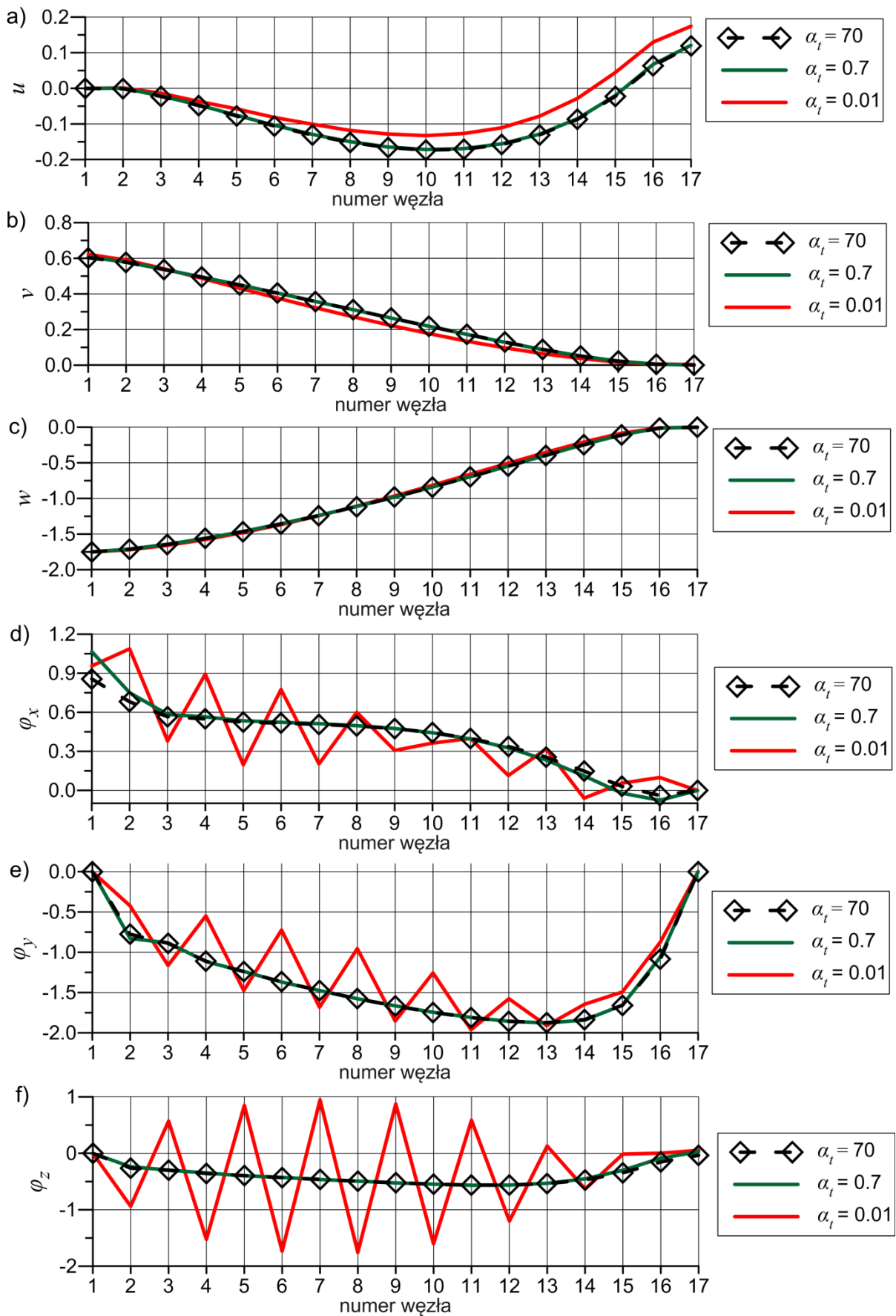


Rys. 6.21. Utwierdzona powłoka walcowa – porównanie nieliniowych ścieżek deformacji  $\lambda(-w_A)$ ,  $\lambda(u_B)$  uzyskanych za pomocą autorskich elementów powłokowych z rozwiązaniami odniesienia, dyskretyzacja  $16 \times 32$

Tabela 6.19. Utwierdzona powłoka walcowa – porównanie maksymalnego przyrostu mnożnika obciążenia w pierwszym kroku  $\Delta\lambda_1$ , liczby iteracji  $N_1$  dla kroku  $\Delta\lambda_1$  oraz całkowitej liczby iteracji  $N_{iter}$  w analizie nieliniowej (35 kroków obliczeniowych, sterowanie przemieszczeniem  $\Delta w_A = 0.05$ ), dyskretyzacja  $10 \times 20$

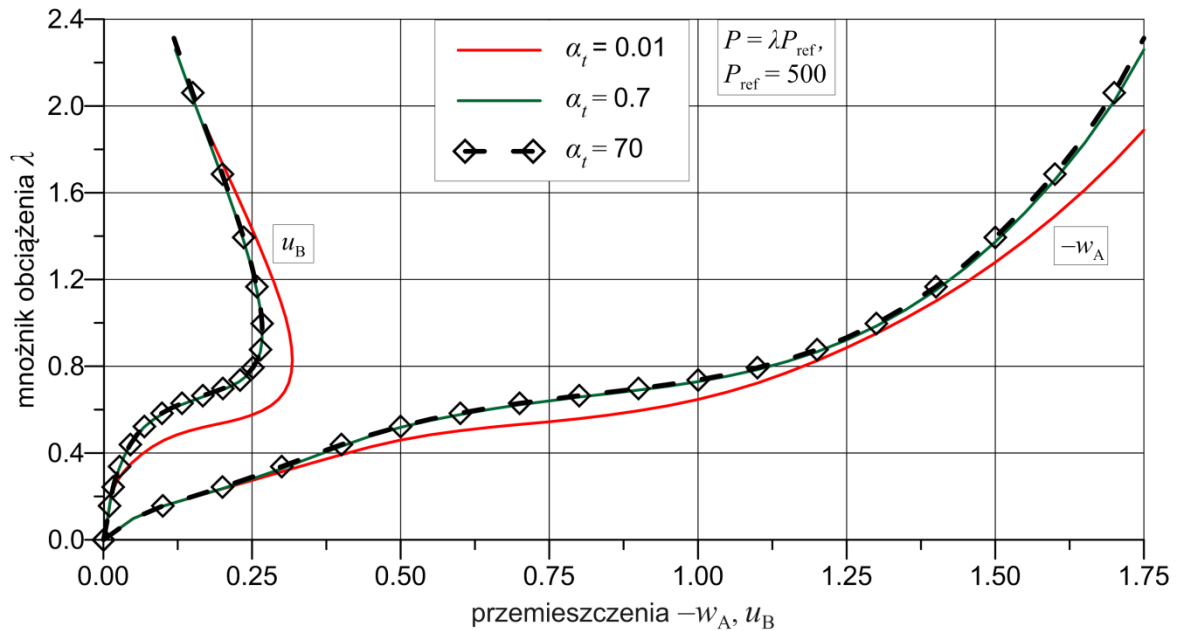
	CAMe16 (8×16)	EANS4	MIX44	MIX42	MIX40, MIX38	SMIX24, SMIX20	SMIX16, SMIX12
Max $\Delta\lambda_1$	0.88	0.82	0.32	0.32	0.3	0.32	0.26
$N_1$	25	19	11	12	10	8	6
$N_{iter}$	138	118	101	101	101	97	108

W wielu pracach, zob. np. [62, 67], poświęconych formułowaniu elementów skończonych w ramach nieliniowej 6-parametrowej teorii powłok badano wpływ współczynnika owinięcia  $\alpha_t$  na wyniki. W pracach tych pokazano, że dla  $\alpha_t > 1$  wraz ze zwiększaniem się wartości współczynnika owinięcia następuje usztywnienie deformacji powłoki. W niniejszym zadaniu w przypadku elementów o 6-parametrowej interpolacji składowych membranowych (MIX40, MIX40s, MIX38, MIX38s, SMIX20, SMIX20s, SMIX12, SMIX12s) zaobserwowano dodatkową rolę, jaką może odgrywać współczynnik  $\alpha_t$ . Ze względu na to, że spostrzeżona zależność jest taka sama dla wszystkich autorskich elementów o uboższej interpolacji składowych membranowych, poniżej ograniczono się do analizy wyników dla elementu MIX40. Wyniki uzyskane dla przyjętej w rozprawie wartości  $\alpha_t = 0.7$  porównano z tymi otrzymanymi dla wartości  $\alpha_t = 0.01$ , która była przyjmowana m.in. w pracach [67, 370] oraz zwiększonej stukrotnie wartości  $\alpha_t = 70$ . Wpływ współczynnika owinięcia na deformację swobodnego brzegu AB (zob. rys. 6.17) w ostatnim kroku analizy nieliniowej ( $w_A = -1.75$ ) zaprezentowano na rys. 6.22. W przypadku wartości  $\alpha_t = 0.01$  zaobserwowano na rys. 6.22d)–f) występowanie form pasożytniczych w kształcie krzywej opisującej zmienność kąta obrotu wzdłuż krawędzi AB. Dodatkowo zbadano wpływ współczynnika  $\alpha_t$  na nieliniowe ścieżki równowagi dla przemieszczeń  $w_A$  i  $u_B$  (zob. rys. 6.23). W przypadku  $\alpha_t = 0.01$  zaobserwowano, że w momencie pojawienia się form pasożytniczych ( $\lambda > 0.25$ ) dochodzi do rozgałęzienia ścieżek deformacji i powstania nowej ścieżki niezgodnej ze zbieżnym rozwiązaniem odniesienia. Postacie pasożytnicze związane z obrotowymi stopniami swobody powodują, że odpowiedź konstrukcji jest zbyt wiotka. Na rys. 6.22 i 6.23 zaobserwowano bardzo małe różnice w wynikach otrzymanych dla  $\alpha_t = 0.7$  i  $\alpha_t = 70$ . Śladu form pasożytniczych nie dostrzeżono w deformacji powłoki walcowej dla przyjętej w rozprawie wartości  $\alpha_t = 0.7$ . Zatem w zadaniu tym odpowiednio duża wartość  $\alpha_t$  w przypadku elementów o uboższej interpolacji składowych membranowych stabilizuje postacie pasożytnicze widoczne na obrotach stopniach swobody.



Rys. 6.22. Wpływ współczynnika owinięcia  $\alpha_t$  na translacje  $u$ ,  $v$ ,  $w$  oraz obroty  $\phi_x$ ,  $\phi_y$ ,  $\phi_z$  [rad] na swobodnym brzegu AB powłoki walcowej, dyskretyzacja  $16 \times 32$  elementami MIX40



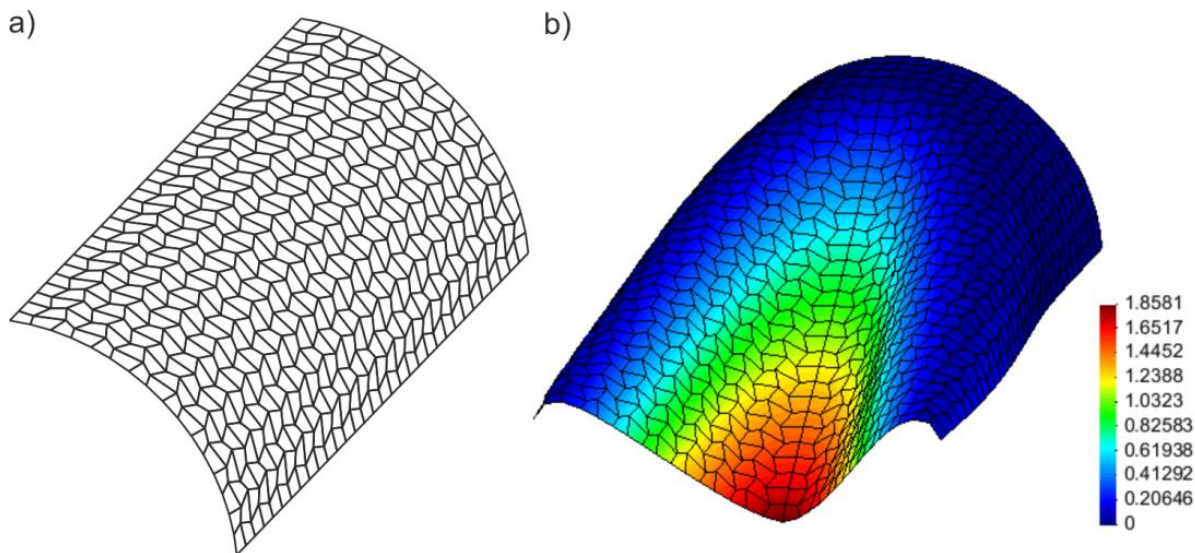


Rys. 6.23. Utwierdzona powłoka walcowa – wpływ współczynnika owinięcia  $\alpha_t$  na nieliniowe ścieżki deformacji  $\lambda(-w_A)$ ,  $\lambda(u_B)$  uzyskane za pomocą siatki  $16 \times 32$  elementów MIX40

W testach dystorsji siatki opisanych w podrozdziale 6.3.2 ograniczono się jedynie do analiz liniowych. W celu rozszerzenia ich na zakres geometrycznie nieliniowy dla utwierdzonej powłoki cylindrycznej wygenerowano nieregularną siatkę elementów skończonych  $16 \times 32$  pokazaną na rys. 6.24a. Następnie, stosując siatkę ES z dystorsją, powtórzono obliczenia nieliniowe dla wybranych autorskich elementów powłokowych (MIX42, MIX42s, MIX38, MIX38s, SMIX24, SMIX24s, SMIX20, SMIX20s). Otrzymane wartości mnożnika obciążenia  $\lambda$  dla czterech zadanych wartości ugięcia  $w_A$  porównano w tab. 6.20 z wartościami odniesienia otrzymanymi dla regularnego podziału  $8 \times 16$  elementów CAME16. W przypadku wszystkich elementów mieszanych i częściowo mieszanych dystorsja siatki spowodowała przeszywnienie deformacji powłoki walcowej. Najmniejsze wartości  $\lambda$ , najbliższe wartościom odniesienia, uzyskano za pomocą elementu MIX38, podobnie jak w przypadku wcześniejszej analizy dla regularnej siatki ES. Na rys. 6.24 zaprezentowano mapę deformacji na końcu analizy nieliniowej, uzyskaną za pomocą nieregularnego podziału elementami MIX38. Wyniki w tab. 6.20 wskazują na to, że zastosowanie współrzędnych skorygowanych w interpolacji niezależnych odkształceń i uogólnionych naprężeń daje nieznacznie lepsze wyniki niż użycie współrzędnych skośnych. Największe różnice w wartościach  $\lambda$  zaobserwowano między elementami SMIX24 i SMIX24s o 8-parametrowej interpolacji składowych membranowych dla  $w_A = -1.75$ . W przypadku elementu EANS4 otrzymano mniejsze wartości  $\lambda$  niż dla elementu SMIX24s, jednak większe od tych uzyskanych za pomocą elementu SMIX24.

Tabela 6.20. Porównanie wartości mnożnika obciążenia  $\lambda$  uzyskanych w analizie nieliniowej utwierdzonej powłoki walcowej z dystorsją siatki ES dla czterech wartości ugięcia  $w_A$ , dyskretyzacja  $16 \times 32$

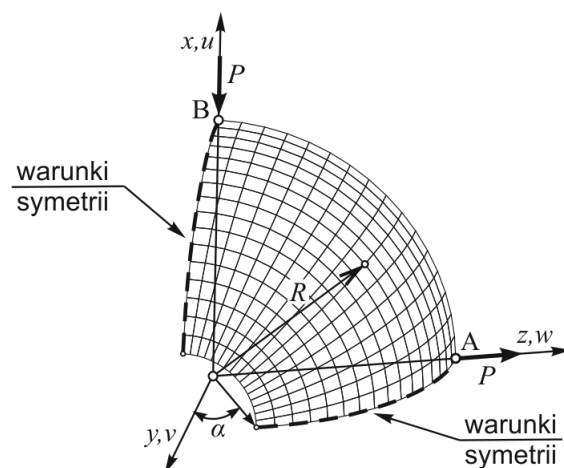
siatka ES	regularna	nieregularna								
element	CAME16	MIX42	MIX42s	MIX38	MIX38s	SMIX24	SMIX24s	SMIX20	SMIX20s	EANS4
$w_A = -0.1$	0.1505	0.1733	0.1735	0.1712	0.1713	0.1746	0.1748	0.1724	0.1726	0.1747
$w_A = -0.5$	0.5083	0.6669	0.6685	0.6515	0.6518	0.6688	0.6705	0.6534	0.6539	0.6692
$w_A = -1.3$	0.9668	1.4207	1.4251	1.3762	1.3781	1.4249	1.4297	1.3802	1.3824	1.4264
$w_A = -1.75$	2.2401	2.8483	2.8545	2.7522	2.7541	2.8633	2.8705	2.7653	2.7678	2.8669



Rys. 6.24. Utwierdzona powłoka walcowa: a) nieregularna dyskretyzacja  $16 \times 32$ , b) mapa deformacji na końcu analizy nieliniowej uzyskana za pomocą elementu MIX38

### 6.3.4. Swobodna półsfera z otworem obciążona siłami samozrównoważonymi

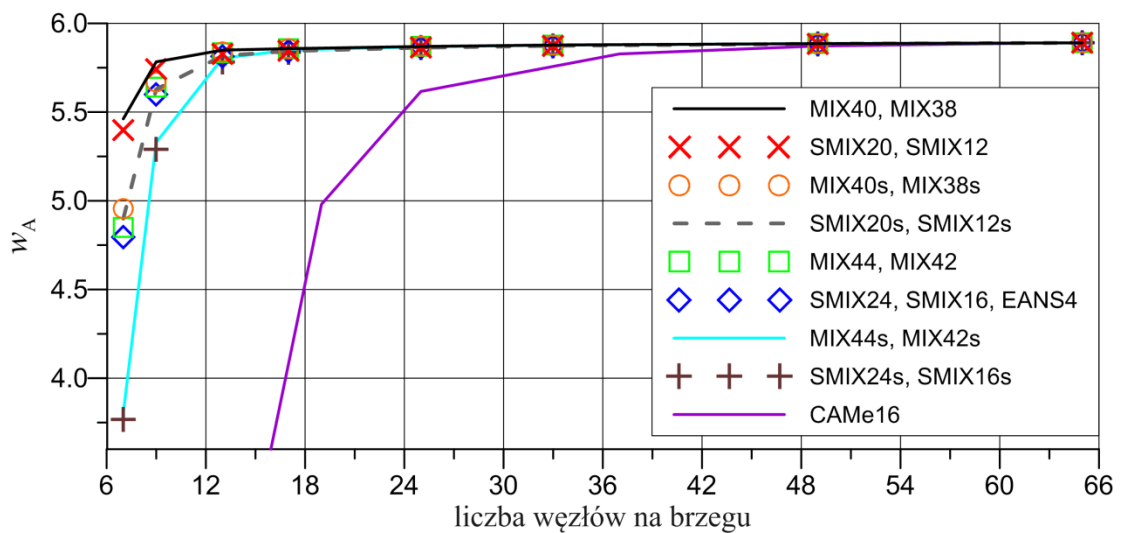
Przykładem powłoki o dużej wiotkości jest swobodna półsfera z otworem obciążona dwoma parami sił skupionych samozrównoważonych. Zadanie to zostało zaproponowane jako test powłokowych elementów skończonych w pracy [213]. Ze względu na dwie płaszczyzny symetrii w rozwiązaniu analizuje się  $1/4$  konstrukcji, stosując odpowiednie warunki symetrii na brzegach (rys. 6.25). W zadaniu przyjęto następujące stałe materiałowe:  $E = 6.825 \times 10^7$ ,  $\nu = 0.3$  oraz wymiary geometryczne:  $R = 10$ ,  $\alpha = 18^\circ$  (zob. rys. 6.25). Przykład ten był analizowany w wielu pracach, zob. np. [67, 296, 308, 318, 367] w zakresie liniowym oraz nieliniowym dla grubości powłoki  $h_0 = 0.04$ . W niniejszej rozprawie przyjęto jednak bardziej wymagający wariant tego zadania, zaproponowany w pracach [362, 367], z cztery razy mniejszą grubością powłoki  $h_0 = 0.01$ . W wariantcie tym bardzo wiotka ( $h_0/R = 0.001$ ) swobodna półsfera z otworem podlegająca dużej deformacji jest jeszcze bardziej podatna na efekt blokady membranowej.



Rys. 6.25. Swobodna półsfera z otworem: geometria, warunki brzegowe, dyskretyzacja  $16 \times 16$  ES

Na początku przeprowadzono liniową analizę zbieżności podziału, w której zastosowano następujące siatki ES:  $6 \times 6$ ,  $8 \times 8$ ,  $12 \times 12$ ,  $16 \times 16$ ,  $24 \times 24$ ,  $32 \times 32$ ,  $48 \times 48$ ,  $64 \times 64$ . Dyskretyzację  $16 \times 16$  ćwiartki półsfery z otworem pokazano na rys. 6.25. Krzywe opisujące zależność ugięcia  $w_A$  punktu A od liczby węzłów na swobodnym brzegu półsfery z otworem, otrzymane dla sił  $P = 1$ , pokazano na rys. 6.26. W przypadku wszystkich opracowanych elementów powłokowych uzyskano bardzo szybką zbieżność rozwiązań w zakresie liniowym, znacznie lepszą niż dla 16-węzłowych elementów CAME16. Naj-

szybszą zbieżność zaobserwowano dla krzywych otrzymanych za pomocą elementów MIX40 i MIX38 oraz w dalszej kolejności elementów SMIX20 i SMIX12. Dodatkowo wartości przemieszczenia  $w_A$  wyznaczone w analizie liniowej za pomocą elementów mieszanych i częściowo mieszanych porównano w tab. 6.21 z wartościami odniesienia z pracy [362]. W przypadku autorskich elementów powłokowych (z wyjątkiem elementów MIX44s, MIX42s, SMIX24s i SMIX16s) dla dyskretyzacji  $8 \times 8$  i  $16 \times 16$  otrzymano większe wartości ugięcia  $w_A$  niż dla elementów HW47 i HW29. Ponadto wartości zestawione w tab. 6.21 wskazują na to, że dla ubogich dyskretyzacji ( $6 \times 6$ ,  $8 \times 8$ ) lepsze wyniki daje zastosowanie współrzędnych skorygowanych w interpolacji niezależnych odkształceń i uogólnionych naprężeń niż użycie współrzędnych skośnych. Jednak różnica między np. elementami MIX44 i MIX44s szybko maleje wraz z zagęszczaniem podziału. Ze względu na dużą wiotkość swobodnej półsfery z otworem większy wpływ na wyniki ma zastosowany wariant interpolacji składowych membranowych niż sposób interpolacji składowych zgięciowych. Najmniej przesztymowane wyniki otrzymano w przypadku elementów mieszanych z 6-parametrową interpolacją składowych membranowych (MIX40 i MIX38). Nieznacznie większe wartości  $w_A$  uzyskano za pomocą elementów mieszanych w porównaniu do odpowiadających im elementów częściowo mieszanych.

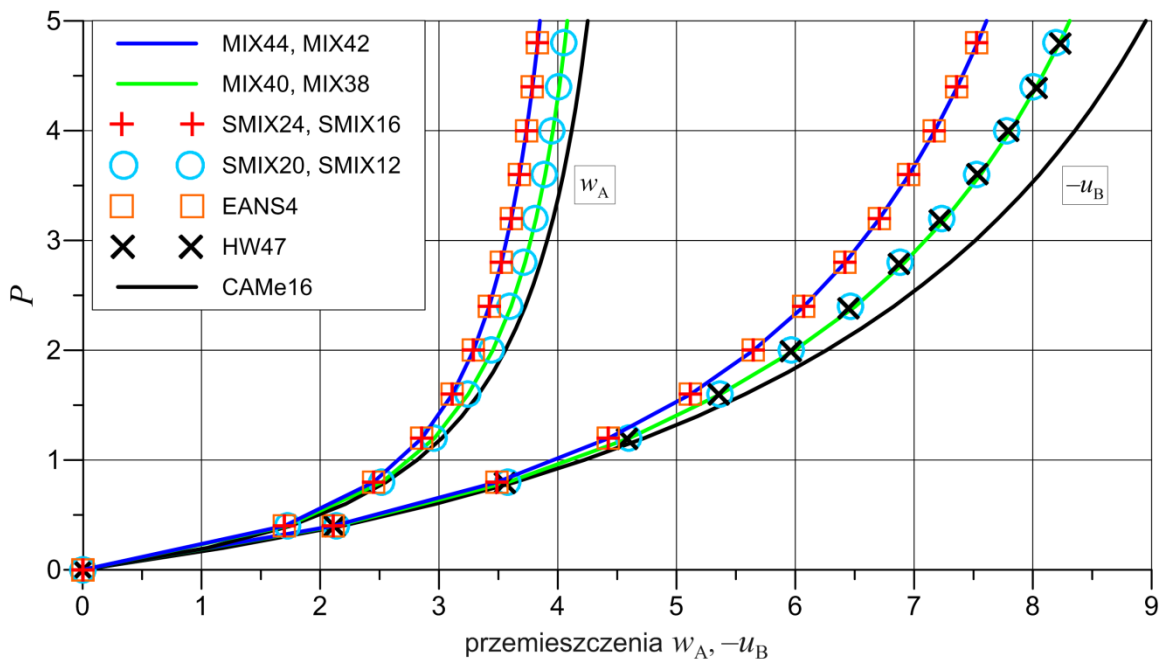


Rys. 6.26. Swobodna półsfery z otworem obciążona siłami  $P = 1$ , liniowa analiza zbieżności podziału dla autorskich elementów mieszanych i częściowo mieszanych

Tabela 6.21. Swobodna półsfery z otworem – porównanie wartości przemieszczeń  $w_A$  wyznaczonych w analizie liniowej za pomocą autorskich elementów powłokowych z rozwiązaniami odniesienia z literatury

Element/Siatka ES	Przemieszczenie $w_A = -u_B$				
	6×6	8×8	16×16	32×32	64×64
MIX44, MIX42	4.8506	5.6399	5.8555	5.8773	5.8904
MIX44s, MIX42s	3.8034	5.3291	5.8498	5.8772	5.8904
MIX40, MIX38	5.4625	5.7832	5.8581	5.8774	5.8904
MIX40s, MIX38s	4.9555	5.6705	5.8562	5.8774	5.8904
SMIX24, SMIX16, EANS4	4.7969	5.5987	5.8429	5.8737	5.8894
SMIX24s, SMIX16s	3.7667	5.2915	5.8373	5.8737	5.8894
SMIX20, SMIX12	5.3988	5.7407	5.8455	5.8738	5.8894
SMIX20s, SMIX12s	4.9001	5.6292	5.8436	5.8738	5.8894
HW47	–	5.3879	5.7679	–	5.8924
HW29	–	5.3753	5.7632	–	5.8920
CAME16	4.9810	5.6166	5.8723	–	–

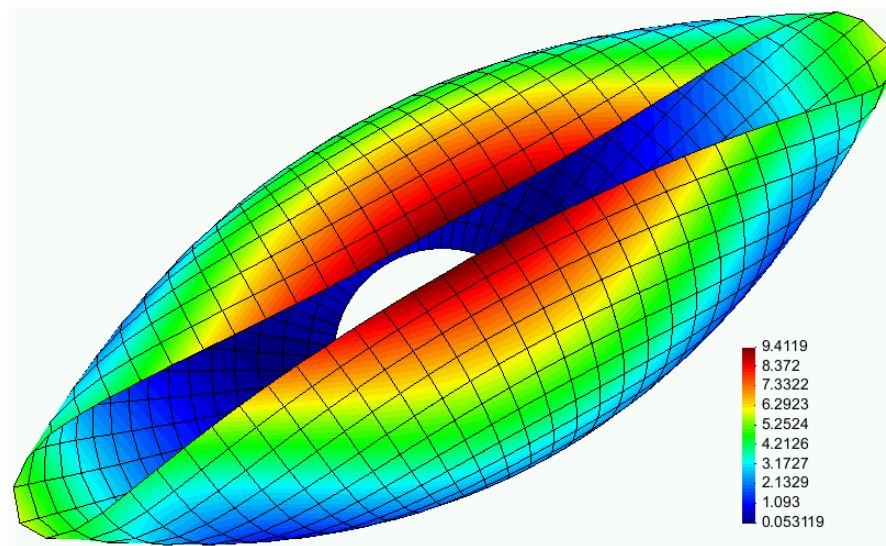
Na podstawie wyników z liniowej analizy zbieżności w obliczeniach w zakresie nieliniowym zastosowano dyskretyzację  $16 \times 16$ , co umożliwiło bezpośrednie porównanie wyników z tymi zaprezentowanymi w pracy [362] dla elementów HW47 i HW29. Nieliniowe ścieżki równowagi dla przemieszczeń  $w_A$  i  $u_B$  wyznaczone za pomocą elementów mieszanych i częściowo mieszanych zaprezentowano na rys. 6.27. W celu zachowania odpowiedniej czytelności wykresu ograniczono się jedynie do prezentacji krzywych dla elementów z interpolacją niezależnych odkształceń i uogólnionych naprężeń określoną we współrzędnych skorygowanych, gdyż w przypadku elementów z interpolacją zdefiniowaną we współrzędnych skośnych otrzymano minimalnie sztywniejszą odpowiedź konstrukcji. Wartości przemieszczeń  $w_A$  i  $u_B$  obliczone dla czterech poziomów obciążenia za pomocą wszystkich autorskich elementów powłokowych porównano z rozwiązaniami odniesienia (HW47, HW29, CAME16) w tab. 6.22. Pomimo uzyskania zbieżnego rozwiązania za pomocą podziału  $16 \times 16$  w analizie liniowej, w przypadku wszystkich elementów mieszanych i częściowo mieszanych otrzymano nieliniowe ścieżki deformacji zauważalnie przeszywnione względem podstawowego rozwiązania odniesienia wyznaczonego za pomocą elementów CAME16. Ze względu na bardzo dużą wiotkość powłoki, w analizowanym wariancie przykładu uzyskano gorszą zbieżność w zakresie nieliniowym niż w przypadku wariantu przykładu z  $h_0 = 0.04$ , zazwyczaj opisywanego w literaturze. W przypadku elementów o uboższej 6-parametrowej interpolacji składowych membranowych (np. MIX40 i SMIX20) otrzymano krzywe bliższe rozwiązaniu odniesienia i pozostające w dobrej zgodności z krzywą uzyskaną za pomocą elementów HW47. Natomiast rozwiązania wyznaczone za pomocą elementów z bogatszą interpolacją składowych membranowych (np. MIX44 i SMIX24) są zbieżne z krzywą otrzymaną za pomocą elementów EANS4. Podobnie jak w analizie liniowej, dla tych samych poziomów obciążenia nieznacznie większe wartości przemieszczeń uzyskano w przypadku elementów mieszanych w porównaniu do elementów częściowo mieszanych o tym samym wariancie interpolacji składowych membranowych. W zakresie liniowym oraz nieliniowym nie zaobserwowano wpływu wyboru sposobu interpolacji składowych ścinania poprzecznego na uzyskane wyniki. Natomiast w przypadku sposobu interpolacji składowych związanych z owinięciem, odnotowane różnice w wartościach przemieszczeń pomiędzy np. elementami MIX40 i MIX38 były tak małe (zob. tab. 6.22), że pominięto je na wykresach. Mapę wypadkowych przemieszczeń dla swobodnej półsfery z otworem, uzyskaną za pomocą siatki  $16 \times 16$  elementów MIX40 dla  $P = 8.8$ , pokazano na rys. 6.28. Do jej stworzenia wykorzystano podwójną symetrię zadania.



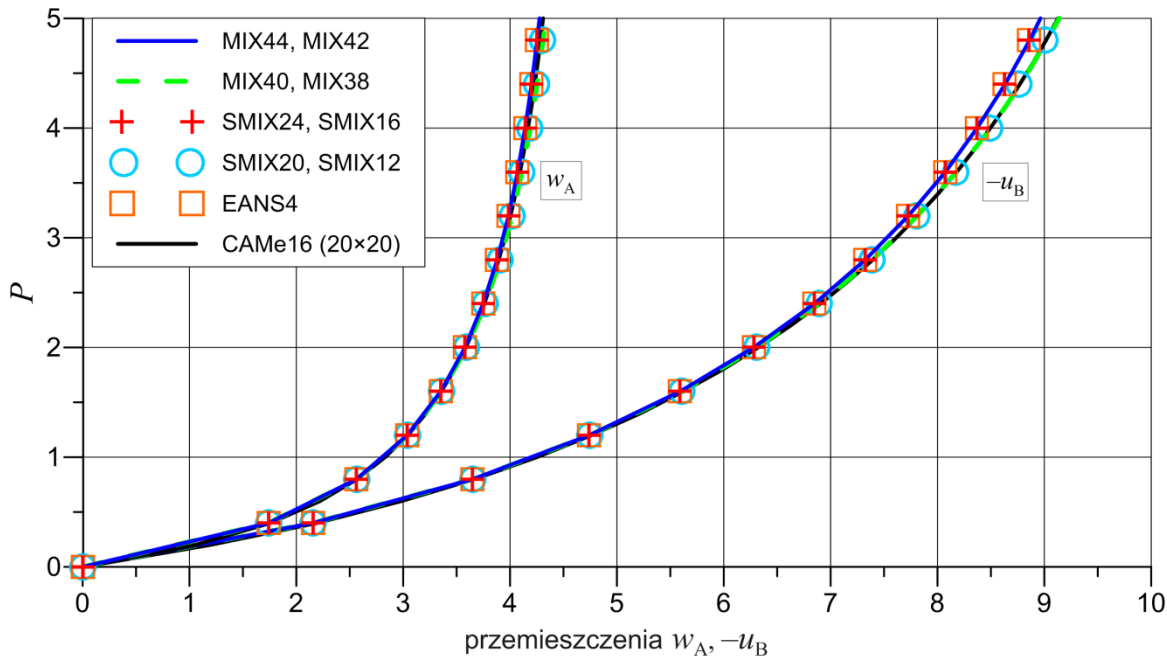
Rys. 6.27. Swobodna półsfera z otworem – porównanie nieliniowych ścieżek deformacji  $P(w_A)$ ,  $P(-u_B)$  uzyskanych za pomocą autorskich elementów powłokowych z rozwiązaniami odniesienia, dyskretyzacja  $16 \times 16$

Tabela 6.22. Swobodna półsfera z otworem – porównanie wartości przemieszczeń  $w_A$  i  $u_B$  uzyskanych w analizie nieliniowej za pomocą autorskich elementów powłokowych z wartościami odniesienia, dyskretyzacja  $16 \times 16$ 

Element	$P = 0.8$		$P = 2.4$		$P = 4.8$		$P = 8.8$	
	$w_A$	$-u_B$	$w_A$	$-u_B$	$w_A$	$-u_B$	$w_A$	$-u_B$
MIX44, MIX42	2.4511	3.4902	3.4243	6.0735	3.8311	7.5349	4.0898	8.5763
MIX44s, MIX42s	2.4497	3.4878	3.4237	6.0716	3.8308	7.5336	4.0896	8.5755
MIX40	2.5210	3.5825	3.6076	6.5056	4.0605	8.2243	4.3379	9.3939
MIX38	2.5210	3.5825	3.6076	6.5056	4.0605	8.2244	4.3379	9.3940
MIX40s	2.5209	3.5822	3.6076	6.5056	4.0605	8.2243	4.3378	9.3937
MIX38s	2.5209	3.5822	3.6076	6.5056	4.0605	8.2243	4.3378	9.3938
SMIX24, SMIX16, EANS4	2.4493	3.4875	3.4232	6.0704	3.8294	7.5244	4.0883	8.5668
SMIX24s, SMIX16s	2.4480	3.4851	3.4225	6.0686	3.8290	7.5232	4.0881	8.5659
SMIX20, SMIX12	2.5180	3.5784	3.5949	6.4642	4.0526	8.1951	4.3275	9.3609
SMIX20s, SMIX12s	2.5179	3.5781	3.5949	6.4642	4.0526	8.1951	4.3275	9.3608
HW47	–	3.56	–	6.48	–	8.24	–	–
HW29	–	3.55	–	6.44	–	8.19	–	–
CAMe16	2.5556	3.6444	3.7258	6.8295	4.2292	8.8464	4.5106	10.1958

Rys. 6.28. Mapa deformacji swobodnej półsferzy z otworem na końcu analizy nieliniowej dla  $P = 8.8$ , dyskretyzacja  $16 \times 16$  elementami MIX40

Ze względu na brak zbieżności wyników dla dyskretyzacji  $16 \times 16$  obliczenia w zakresie nieliniowym powtórzono, stosując dwukrotnie zagęszczoną siatkę ES  $32 \times 32$ . Nieliniowe ścieżki równowagi dla przemieszczeń  $u_B$  i  $w_A$ , wyznaczone za pomocą autorskich elementów powłokowych, zaprezentowano na rys. 6.29. W przypadku elementów MIX40, MIX38, SMIX20 i SMIX12 otrzymano bardzo dobrą zgodność wyników z rozwiązaniem odniesienia uzyskanym za pomocą elementów CAMe16 (podział  $20 \times 20$ ). Natomiast w przypadku pozostałych elementów mieszanych i częściowo mieszanych o bogatszej interpolacji składowych membranowych zaobserwowano bardzo małą rozbieżność wyników dla krzywej  $P(-u_B)$ .



Rys. 6.29. Swobodna półsfera z otworem – porównanie nieliniowych ścieżek deformacji  $P(w_A)$ ,  $P(-u_B)$  uzyskanych za pomocą autorskich elementów powłokowych z rozwiązaniami odniesienia, dyskretyzacja  $32 \times 32$

W celu oceny ogólnej efektywności obliczeniowej opracowanych elementów powłokowych wykonano w zakresie nieliniowym dwa typy analiz. W analizach tych zastosowano sterowanie obciążeniem oraz siatkę  $ES\ 16 \times 16$ . W pierwszym teście określono dla każdego typu elementu mieszane i częściowo mieszane maksymalny przyrost obciążenia  $\Delta P_1$  w pierwszym kroku obliczeniowym oraz odpowiadającą temu przyrostowi liczbę iteracji równowagi  $N_1$ . Wartość  $\Delta P_1$  wyznaczono z dokładnością do 0.05, stopniowo zwiększając wartość  $\Delta P_1$ , aż do utraty zbieżności rozwiązania. Jedynie w przypadku elementów częściowo mieszanych A oraz elementu EANS4, ze względu na małą wartość  $\Delta P_1$ , dokładność zwiększono do 0.01. Wartości uzyskane za pomocą autorskich elementów powłokowych porównano w tab. 6.23 z wartościami odniesienia dla elementów HW47 i HW29 [362] oraz elementów CAME16 i EANS4. W przypadku elementów mieszanych i częściowo mieszanych B uzyskano nieznacznie większy pierwszy przyrost obciążenia oraz mniejszą liczbę iteracji  $N_1$  niż w przypadku elementów HW47 i HW29. Zastosowanie największego przyrostu  $\Delta P_1 = 1.00$  było możliwe w obliczeniach za pomocą elementu SMIX20, jednak wymagały one aż 15 iteracji równowagi.

Następnie w ramach drugiego testu wyznaczono maksymalny stały przyrost obciążenia  $\Delta P$ , który umożliwił przeprowadzenie analizy nieliniowej dla swobodnej półsfery z otworem obciążonej siłami  $P = 8.8$  w całkowitej liczbie kroków obliczeniowych. W tab. 6.23 dla każdego typu elementu powłokowego zamieszczono: wartość  $\Delta P$ , liczbę przyrostów obciążenia  $N_{\text{krok}}$  oraz całkowitą liczbę iteracji równowagi  $N_{\text{iter}}$ . Najmniejszej liczby iteracji wymagały obliczenia za pomocą elementów mieszanych i częściowo mieszanych B o 8-parametrowej interpolacji składowych membranowych (np. MIX44, SMIX24). W przypadku odpowiadających im elementów o uboższej interpolacji składowych membranowych (np. MIX40) uzyskano większą liczbę iteracji, gdyż z powodu braku zbieżności w trakcie analizy nieliniowej z przyrostem  $\Delta P = 0.80$  konieczne było zwiększenie liczby kroków. Jednak wszystkie elementy mieszane i częściowo mieszane B potrzebowały mniejszej liczby iteracji  $N_{\text{iter}}$  niż elementy HW47 i HW29. Najgorszą zbieżnością rozwiązań charakteryzowały się: element EANS4 oraz w dalszej kolejności elementy częściowo mieszane A (np. SMIX12). W ich przypadku uzyskano najmniejsze wartości  $\Delta P_1$ , a obliczenia w zakresie nieliniowym musiały być prowadzone z bardzo małym przyrostem  $\Delta P$  oraz wymagały kilkuset iteracji równowagi.

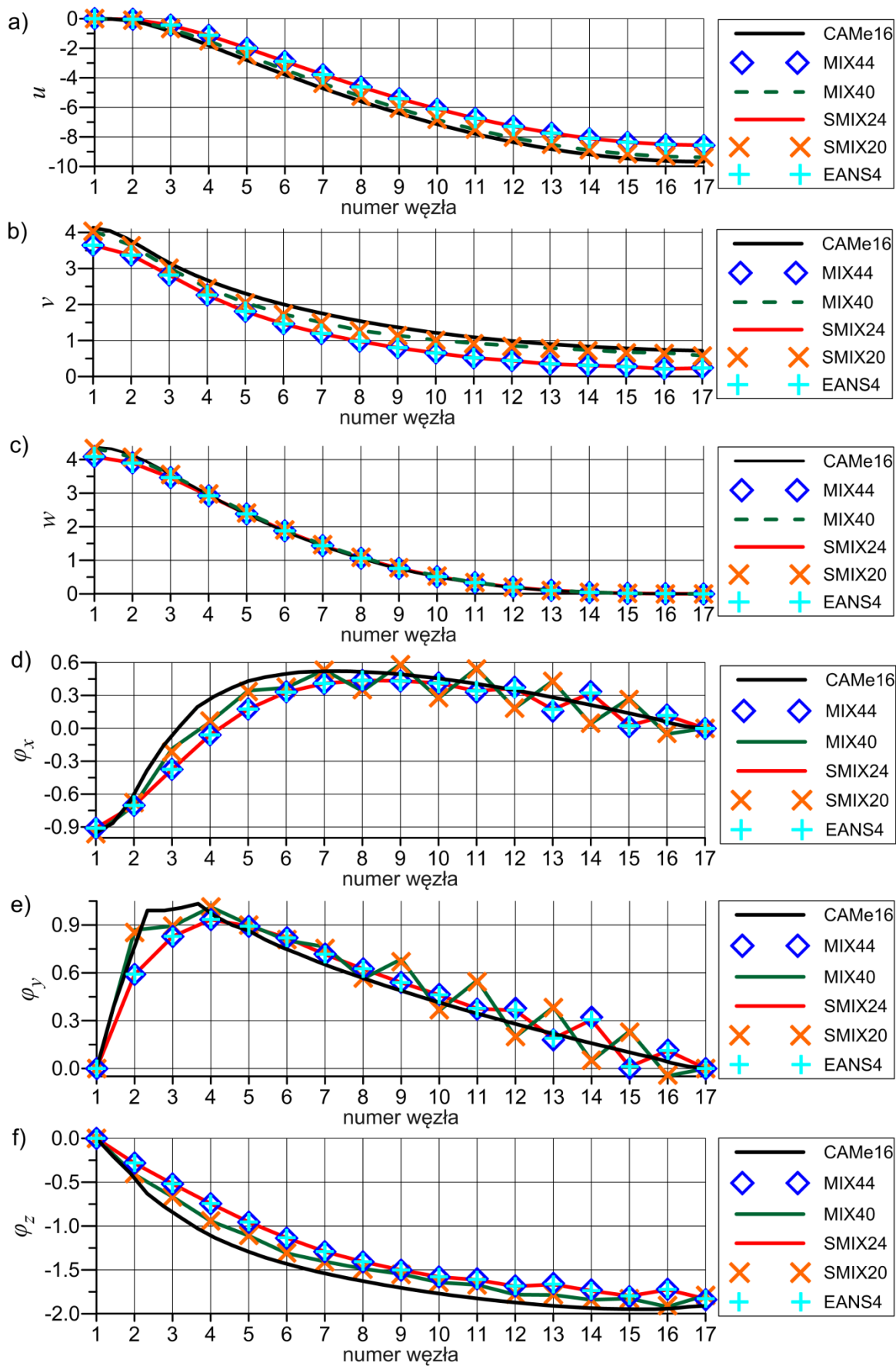
W rozważanym zadaniu w pracy [67] zaobserwowano tendencję do generowania form pasożytniczych w sformułowaniach alternatywnych, np. sformułowaniu mieszanym. W celu sprawdzenia czy problem ten dotyczy również opracowanych elementów mieszanych i częściowo mieszanych wyznaczoną za ich pomocą deformację powłoki w ostatnim przyroście analizy nieliniowej porównano z deformacją uzyskaną dla siatki  $12 \times 12$  elementów CAME16. Na rys. 6.30 pokazano jak zmienia się pole

Tabela 6.23. Swobodna półsfera z otworem – maksymalny przyrost obciążenia  $\Delta P_1$  i liczba iteracji  $N_1$  w pierwszym kroku obliczeniowym; maksymalny przyrost obciążenia  $\Delta P$ , liczba kroków  $N_{\text{krok}}$  oraz całkowita liczba iteracji  $N_{\text{iter}}$  w analizie nieliniowej dla siły  $P = 8.8$ , dyskretyzacja  $16 \times 16$

Element	Test 1 kroku		Analiza nieliniowa: $P = 8.8$		
	Max $\Delta P_1$	$N_1$	$\Delta P$	$N_{\text{krok}}$	$N_{\text{iter}}$
MIX44, MIX42	0.90	7	0.80	11	45
MIX44s, MIX42s	0.90	6	0.80	11	45
MIX40, MIX40s, MIX38, MIX38s	0.95	7	0.55	16	51
SMIX24, SMIX24s	0.95	7	0.80	11	45
SMIX20	1.00	15	0.55	16	59
SMIX20s	0.95	7	0.55	16	59
SMIX16	0.09	20	0.08	110	457
SMIX16s	0.08	5	0.08	110	457
SMIX12, SMIX12s	0.08	5	0.08	110	357
HW47	0.80	10	0.80	11	62
HW29	0.80	9	0.80	11	61
EANS4	0.07	5	0.05	176	723
CAMe16	0.25	7	0.20	44	158

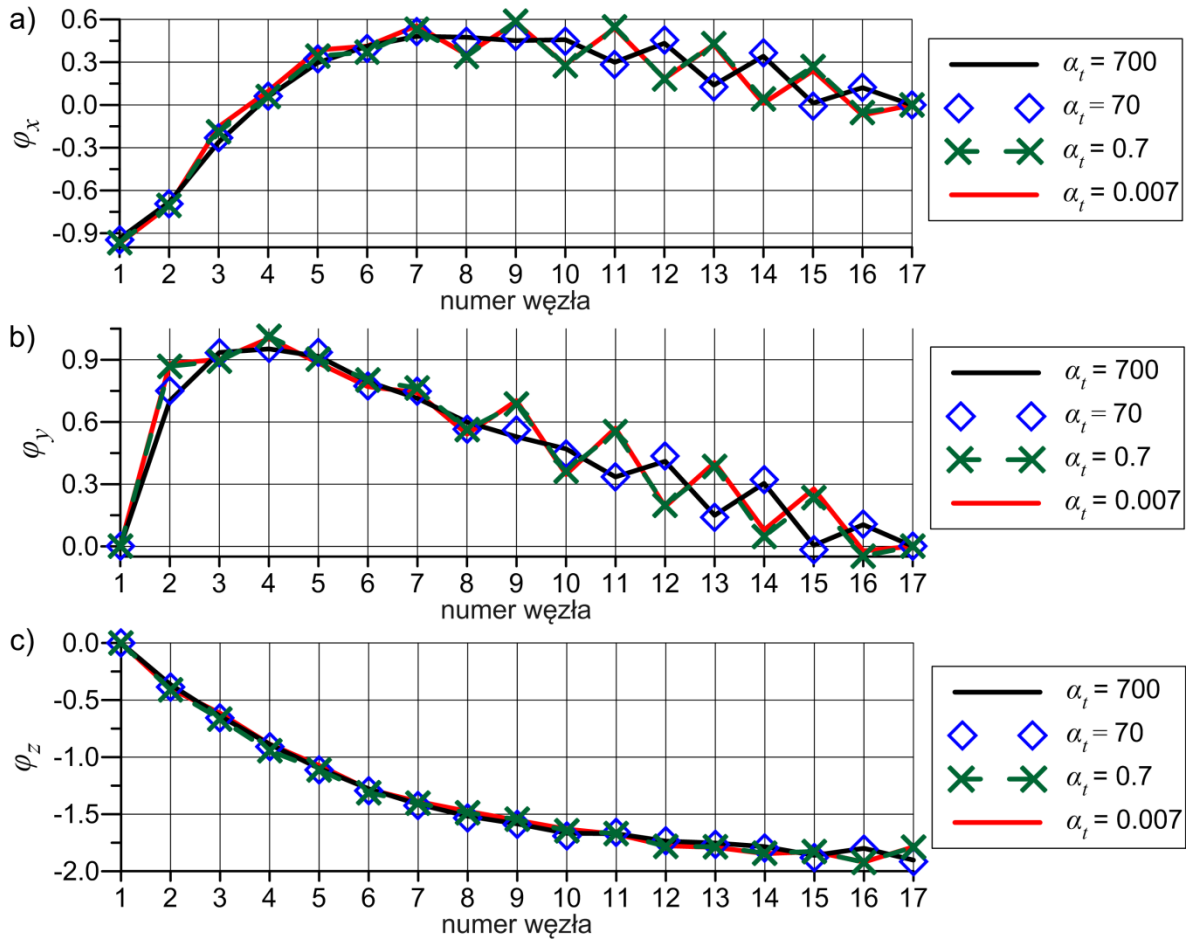
przesunięć  $u$ ,  $v$ ,  $w$  oraz pole obrotów  $\varphi_x$ ,  $\varphi_y$ ,  $\varphi_z$  wzdłuż swobodnej krawędzi AB w płaszczyźnie  $y = 0$  (zob. rys. 6.25). W celu zachowania odpowiedniej czytelności wykresów zaprezentowano na nich tylko krzywe dla wybranych autorskich elementów powłokowych, stosując podział  $16 \times 16$ . W kształcie krzywych opisujących pola translacji nie zauważono śladu postaci pasożytniczych. Występowanie form pasożytniczych dostrzeżono jednak w kształcie krzywych opisujących zmienność kątów obrotu  $\varphi_x$ ,  $\varphi_y$  i  $\varphi_z$  (rys. 6.30d–f), w szczególności dla elementów MIX40 i SMIX20. Tendencja do generowania form pasożytniczych w mniejszym stopniu jest widoczna również w przypadku elementów o 8-parametrowej interpolacji składowych membranowych MIX44, SMIX24 oraz elementu EANS4. Jednak ze względu na efekt przeszywnienia dla krzywych przesunięć  $u$ ,  $v$ ,  $w$  (rys. 6.30a–c) uzyskanych za pomocą tych elementów zaobserwowano gorszą zgodność z krzywymi odniesienia (CAMe16) niż w przypadku elementów MIX40 i SMIX20 o uboższej interpolacji składowych membranowych. Porównanie krzywych uzyskanych za pomocą elementów mieszanych i częściowo mieszanych wskazuje na niewielki wpływ sposobu interpolacji składowych zgięciowych i związanych z owinięciem na występowanie form pasożytniczych. W przeciwieństwie do przykładu utwierdzonej powłoki walcowej (rys. 6.23) w przypadku swobodnej półsfery z otworem formy pasożytnicze nie mają wpływu na nieliniowe ścieżki deformacji (zob. rys. 6.27 i 6.29) i globalną deformację powłoki, pokazaną na rys. 6.28.

Do analizy wpływu współczynnika owinięcia  $\alpha_t$  na uzyskane wyniki wybrano element mieszany MIX40, dla którego zaobserwowano formy pasożytnicze na rys. 6.30. W prezentacji wyników ograniczono się do pokazania wykresów dla obrotowych stopni swobody, gdyż tylko na nich widoczna jest tendencja do powstawania zeroenergetycznych form deformacji. Wpływ współczynnika  $\alpha_t$  na krzywe opisujące zmienność kątów obrotu  $\varphi_x$ ,  $\varphi_y$  i  $\varphi_z$  wzdłuż swobodnej krawędzi AB zaprezentowano na rys. 6.31, a na zmienność kątów obrotu  $\varphi_x$ ,  $\varphi_y$  wzdłuż południka półsfery na rys. 6.32. Rys. 6.31 pokazuje, że w rozważanym zadaniu wraz ze zwiększaniem współczynnika owinięcia formy pasożytnicze są tłumione, jednak nie zostają w pełni wyeliminowane. W wyniku zwiększenia wartości  $\alpha_t$  z 0.7 do 70 dochodzi do widocznej zmiany kształtu krzywych, opisujących zmienność kątów obrotu  $\varphi_x$  i  $\varphi_y$ , na kształt zbliżony do tego zaobserwowanego na rys. 6.30 w przypadku elementów MIX44, SMIX24 i EANS4. Tymczasem kształt krzywych na rys. 6.32 wskazuje na to, że do ustabilizowania form pasożytniczych na krawędzi wzdłuż południka półsfery wystarcza współczynnik  $\alpha_t = 0.7$ .

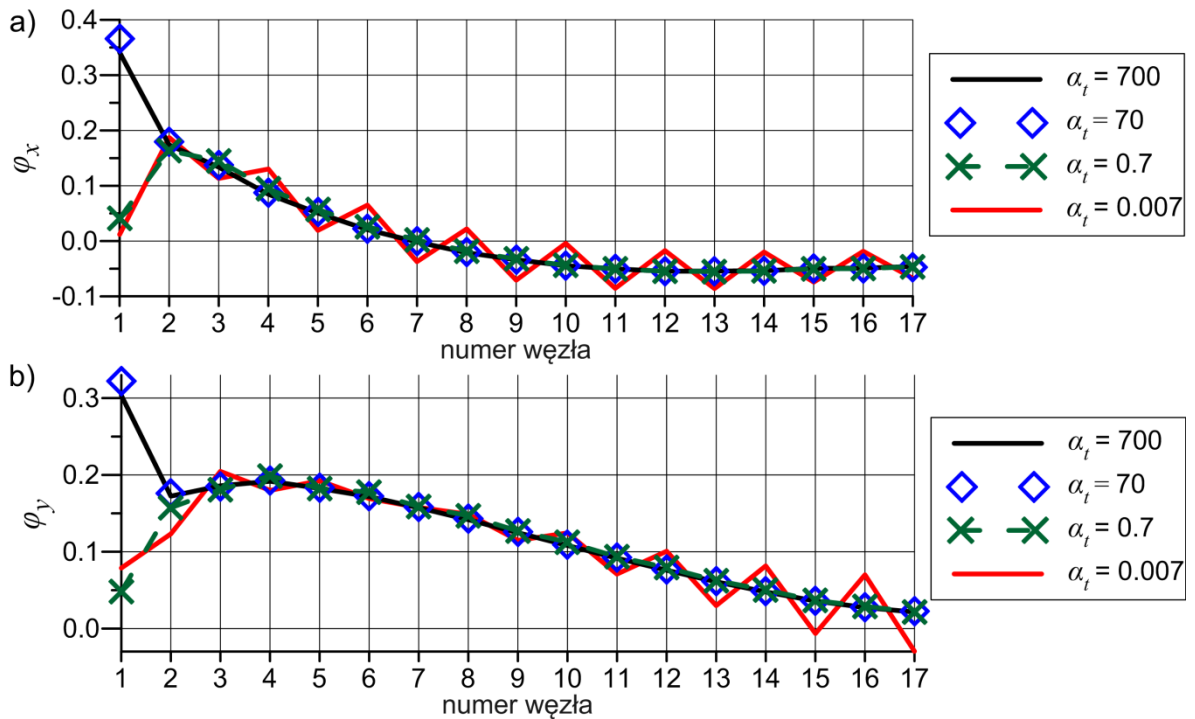


Rys. 6.30. Swobodna półsfera z otworem – krzywe translacji  $u$ ,  $v$ ,  $w$  oraz kątów obrotu  $\varphi_x$ ,  $\varphi_y$ ,  $\varphi_z$  na swobodnym brzegu AB uzyskane za pomocą wybranych elementów powłokowych dla  $P = 8.8$  i  $\alpha_i = 0.7$ , siatka ES  $16 \times 16$





Rys. 6.31. Zmiana wartości kątów obrotu  $\varphi_x$ ,  $\varphi_y$  i  $\varphi_z$  wzdłuż swobodnego brzegu AB półsfery z otworem w zależności od wartości współczynnika owinięcia  $\alpha_t$ , dyskretyzacja  $16 \times 16$  elementami MIX40



Rys. 6.32. Zmiana wartości kątów obrotu  $\varphi_x$  i  $\varphi_y$  wzdłuż południka swobodnej półsfery z otworem w zależności od wartości współczynnika owinięcia  $\alpha_t$ , dyskretyzacja  $16 \times 16$  elementami MIX40

W ostatnim etapie badań sprawdzono wpływ współczynnika owinięcia na zbieżność rozwiązań uzyskanych za pomocą siatki  $16 \times 16$  elementów MIX40. W tym celu wyznaczono maksymalny przyrost obciążenia  $\Delta P_1$  w pierwszym kroku, maksymalny przyrost  $\Delta P$  i całkowitą liczbę iteracji  $N_{\text{iter}}$  w analizie nieliniowej oraz wartości ugięcia  $u_B$  punktu B dla dwóch poziomów obciążenia. Uzyskane wyniki dla sześciu wartości  $\alpha_t$  porównano w tab. 6.24. W zakresie  $\alpha_t \in [0.007, 7]$  pomimo takiej samej wartości  $\Delta P_1$  uzyskano różne wartości  $\Delta P$  i duże różnice w całkowitej liczbie iteracji. W przypadku  $\alpha_t = 0.007, 0.7, 7$  zmniejszenie  $\Delta P$  było konieczne ze względu na brak zbieżności w trakcie obliczeń prowadzonych z krokiem  $\Delta P = 0.80$ . Prawdopodobnym powodem problemów ze zbieżnością w trakcie analizy nieliniowej była obecność form pasożytniczych, przyczyniająca się do niestabilności rozwiązania. W przypadku analiz ze współczynnikiem  $\alpha_t \geq 70$  zaobserwowano zwiększenie maksymalnego przyrostu w pierwszym kroku oraz zmniejszenie całkowitej liczby iteracji. Zatem widoczna na rys. 6.31 częściowa stabilizacja form pasożytniczych spowodowała zauważalną poprawę zbieżności w analizie nieliniowej. Jednak dla  $\alpha_t > 7$  zaobserwowano również nieznaczne usztywnienie deformacji półsfery z otworem, zob. wartości  $u_B(P = 4.8)$  w tab. 6.24.

Tabela 6.24. Swobodna półsfera z otworem – wpływ współczynnika  $\alpha_t$  na: maksymalny przyrost obciążenia  $\Delta P_1$  i liczbę iteracji  $N_1$  w pierwszym kroku obliczeniowym, maksymalny przyrost obciążenia  $\Delta P$ , liczbę kroków  $N_{\text{krok}}$  oraz całkowitą liczbę iteracji  $N_{\text{iter}}$  w analizie nieliniowej (całkowita siła  $P = 8.8$ ), wartość przemieszczenia  $u_B$  dla dwóch poziomów obciążenia; podział  $16 \times 16$  elementami MIX40

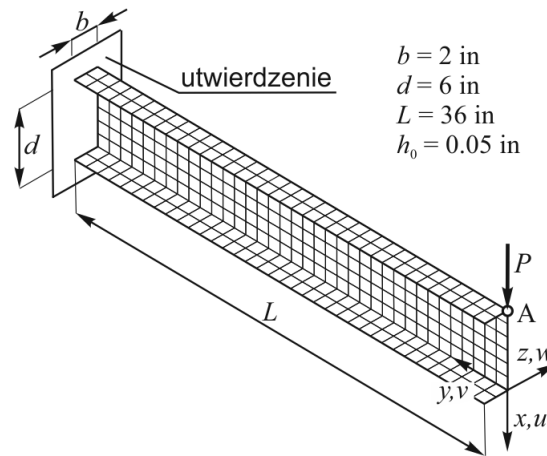
	$\alpha_t$	0.007	0.07	0.7	7	70	700
Test 1 kroku	Max $\Delta P_1$	0.95	0.95	0.95	0.95	1.05	1.20
	$N_1$	8	7	7	7	8	13
Analiza nieliniowa $P = 8.8$	$\Delta P$	0.20	0.80	0.55	0.40	0.8	1.1
	$N_{\text{krok}}$	44	11	16	22	11	8
	$N_{\text{iter}}$	141	37	51	67	31	29
Ugięcie $-u_B$	$P = 0.8$	3.5833	3.5826	3.5825	3.5824	3.5813	3.5726
	$P = 4.8$	8.2322	8.2450	8.2244	8.2064	8.0872	7.9942

### 6.3.5. Wspornik ceowy obciążony na końcu siłą skupioną

W dotychczasowych przykładach analizowano powłoki gładkie, tzn. bez przecięć. Jednak 6-parametrowa nieliniowa teoria powłok w sposób szczególnie predestynowana jest do analizy powłok wielopłatowych, ze względu na ujęcie w naturalny sposób w ramach teorii szóstego stopnia swobody – owinięcia. Z tego powodu jako kolejny przykład analizuje się cienkościenny wspornik ceowy jako przykład powłoki z przecięciami. Zadanie to jest ważnym testem opracowanych w rozprawie elementów powłokowych, gdyż pozwala sprawdzić poprawność sformułowania elementu wyposażonego w trzy obrotowe stopnie swobody. Analiza cienkościennych powłok wielopłatowych jest trudna, gdyż w trakcie ich deformacji dochodzi zazwyczaj do silnego sprzężenia stanu membranowego ze stanem zgięciowym oraz stanem skrętnym układu. Ponadto występuje problem lokalnej utraty stateczności i jego wpływu na globalną stateczność konstrukcji, zob. np. [65, 67]. W przypadku powłok z geometrią zawierającą ortogonalne połączenia płatów może dojść również do sztywnego przemieszczania się dużych fragmentów konstrukcji. W trakcie takiej deformacji często ujawnia się silna tendencja do blokady rozwiązania przy całkowaniu pełnym.

Rozważany przykład został oryginalnie zaproponowany w pracy [203] jako belka swobodnie podparta (przesuwnie wzdłuż półki dolnej i na wysokości środka), obciążona liniowo na krawędzi połączenia środka z górną półką. Jednak w zaproponowanym wariantcie analiza tego zadania jest bardzo trudna, głównie ze względu na skomplikowane ścieżki równowagi. Z tego powodu w pracy [70] zaproponowano uproszczony wariant tego zadania, z jednym końcem belki utwierdzonym (zob. rys. 6.33), a drugim obciążonym siłą skupioną  $P$ , którą zastąpiono obciążeniem rozłożone. W tym wariantcie przykład ten był analizowany jako test elementów skończonych m.in. w pracach [77, 98, 168, 239, 274, 332, 362]. Geometrię i wymiary wspornika ceowego zaprezentowano na rys. 6.33. W obliczeniach przyjęto następujące stałe materiałowe:  $E = 10^7 \text{ lb/in}^2$ ,  $\nu = 0.333$  oraz obciążenie w postaci  $P = \lambda P_{\text{ref}}$ , gdzie  $P_{\text{ref}} = 100 \text{ lb}$ . W analizie liniowej oraz nieliniowej zastosowano dyskretyzację

$(2+6+2) \times 36$ , pokazaną na rys. 6.33. Oznaczenie  $(2+6+2) \times 36$  należy rozumieć jako: (liczba elementów na szerokości  $b$  półki dolnej + liczba elementów na wysokości środnika + liczba elementów na szerokości  $b$  półki górnej)  $\times$  liczba elementów na długości  $L$  wspornika.



Rys. 6.33. Wspornik o przekroju ceowym: geometria, warunki brzegowe, podział  $(2+6+2) \times 36$

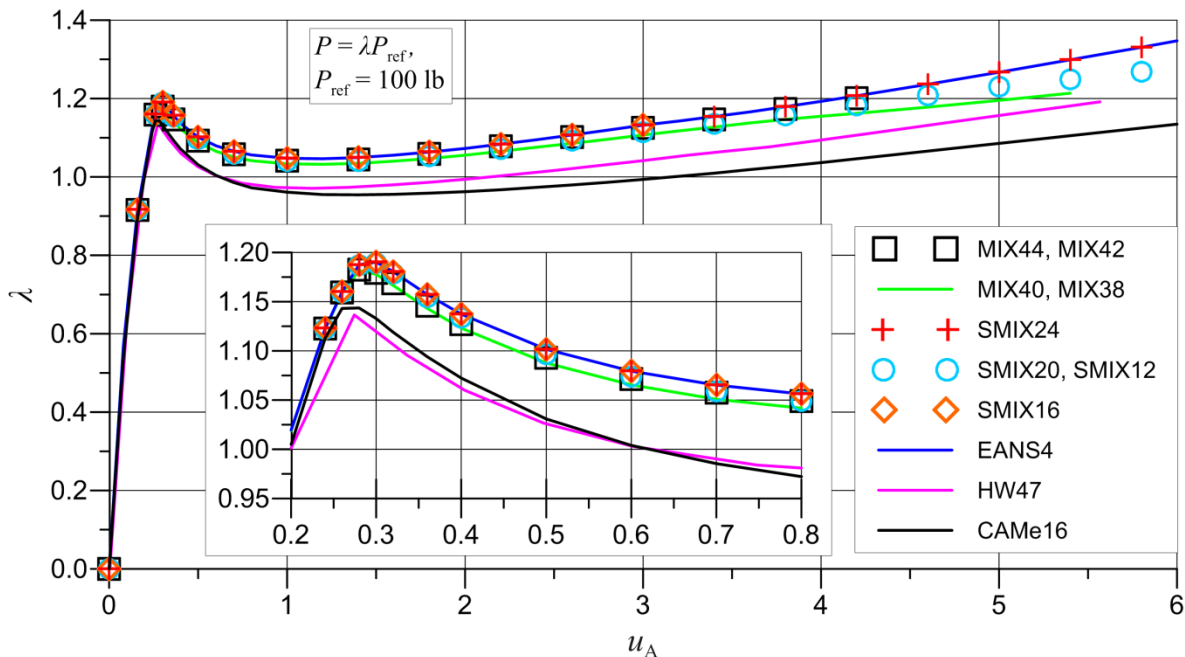
W rozważanym zadaniu ze względu na zastosowaną siatkę ES o kwadratowym kształcie ograniczono się do prezentacji wyników tylko dla elementów z interpolacją określoną we współrzędnych skorygowanych. W pierwszej kolejności wyznaczono wartości przemieszczeń  $u_A$  i  $w_A$  punktu A (zob. rys. 6.33) w analizie liniowej dla mnożnika obciążenia  $\lambda = 10$ . Przesunięcia uzyskane za pomocą elementów mieszanych i częściowo mieszanych porównano w tab. 6.25 z wartościami odniesienia uzyskanymi za pomocą elementów: HW47 [362], CAMe16 i EANS4. Wartości bliższe podstawowemu rozwiązaniu odniesienia (CAMe16) otrzymano w przypadku elementów o 6-parametrowej interpolacji składowych membranowych (np. MIX40, SMIX20). Wartość ugięcia  $u_A$  wyznaczona za pomocą elementów MIX40, MIX38, SMIX20, SMIX12 była minimalnie większa od wartości odniesienia dla elementu HW47. Nieznacznie mniejsze przemieszczenia uzyskano w przypadku elementów o bogatszej interpolacji składowych membranowych (np. MIX44).

Tabela 6.25. Wspornik o przekroju ceowym – porównanie wartości przemieszczeń  $u_A$  i  $w_A$  w punkcie przyłożenia siły uzyskanych w analizie liniowej dla  $\lambda = 10$  za pomocą autorskich elementów powłokowych z wartościami odniesienia otrzymanymi za pomocą elementów HW47, CAMe16 i EANS4, podział  $(2+6+2) \times 36$

element	CAMe16	EANS4	HW47	MIX44, MIX42	MIX40, MIX38	SMIX24, SMIX16	SMIX20, SMIX12
$u_A$ , in	1.1604	1.1529	1.1537	1.1529	1.1540	1.1529	1.1540
$-w_A$ , in	2.4361	2.4308	–	2.4309	2.4316	2.4308	2.4315

W analizie nieliniowej zastosowano taką samą siatkę ES jak w analizie liniowej, co umożliwiło bezpośrednie porównanie wyników z rozwiązaniami z pracy [362] dla elementu HW47. Nieliniowe ścieżki równowagi  $\lambda(u_A)$  wyznaczone za pomocą elementów mieszanych i częściowo mieszanych zaprezentowano na rys. 6.34. Rozwiązania nieliniowe uzyskano stosując sterowanie przemieszczeniem kontrolnym  $u_A$  w punkcie A (zob. rys. 6.33). Wartości mnożnika obciążenia  $\lambda_{\text{gran}}$  w punkcie granicznym krzywej  $\lambda(u_A)$  oraz wartości  $\lambda$  obliczone dla czterech wybranych wartości  $u_A$  za pomocą różnych elementów powłokowych zestawiono w tab. 6.26. Krzywe na rys. 6.34 oraz wartości w tab. 6.26 pokazują, że w przypadku elementów mieszanych i częściowo mieszanych otrzymano rozwiązania przeszywnione względem podstawowego rozwiązania odniesienia wyznaczonego za pomocą elementów CAMe16 oraz rozwiązania z pracy [362]. Nieliniowe ścieżki deformacji uzyskane za pomocą autorskich elementów powłokowych są do siebie zbliżone, a niewielkie różnice między nimi powoli rosną wraz ze zwiększaniem wartości przemieszczenia  $u_A$ . Wartości  $\lambda_{\text{gran}}$  wskazują na to, że w początkowym etapie deformacji decydującą rolę odgrywa zginanie i dlatego w przypadku elementów mieszanych otrzymano nieznacznie lepsze wyniki niż dla elementów częściowo mieszanych. Natomiast w dalszej fazie deformacji najbliższe rozwiązaniu odniesienia wyniki otrzymano za pomocą elementów o uboż-

szej interpolacji składowych membranowych (np. MIX40, SMIX20), ponieważ coraz większą rolę zaczyna odgrywać stan membranowy, zob. wartości  $\lambda$  wyznaczone dla  $u_A = 5$  in w tab. 6.26. Podobnie jak w poprzednich przykładach, w przypadku elementów SMIX24 i SMIX16 uzyskano takie same wyniki jak dla elementu EANS4. Ze względu na problemy ze zbieżnością obliczenia za pomocą elementów MIX44 i MIX42 zostały przerwane dla  $u_A = 4.4$  in, w przypadku elementów MIX40 i MIX 38 dla  $u_A = 5.4$  in, a w przypadku elementu SMIX16 dla  $u_A = 3.0$  in. Problemy ze zbieżnością zaobserwowano również w [362], gdyż w przypadku elementu HW47 analizę nieliniową udało się przeprowadzić do wartości  $u_A = 5.5$  in, a w przypadku pozostałych typów elementów do wartości  $u_A = 3.5$  in.



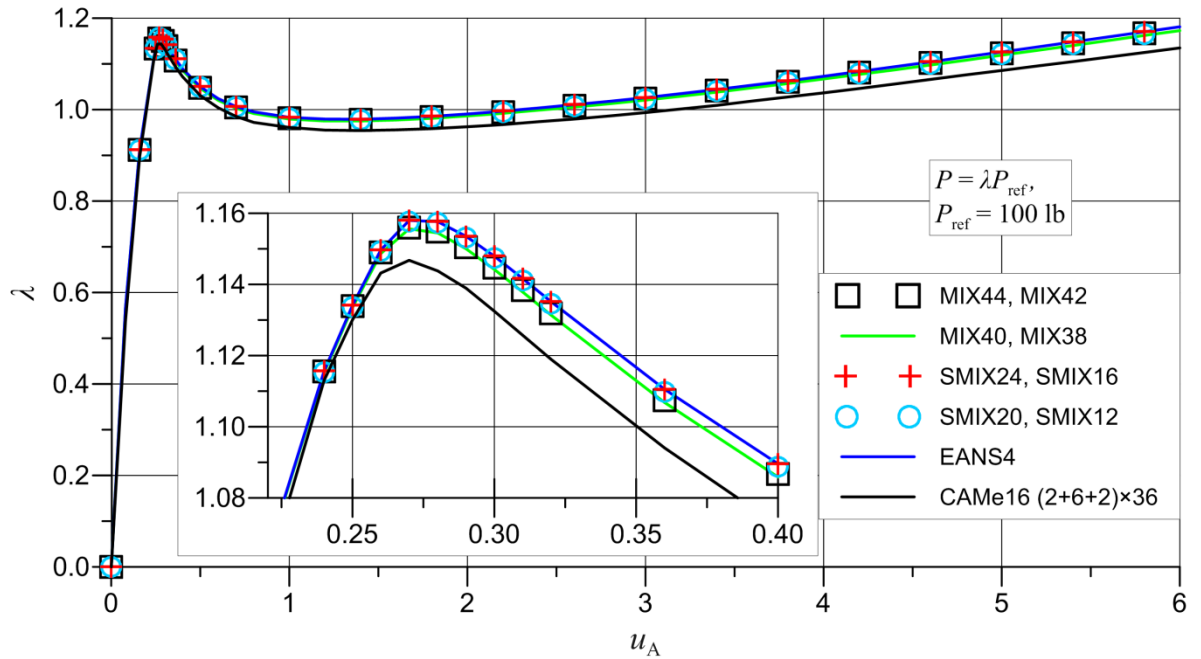
Rys. 6.34. Wspownik o przekroju ceowym – porównanie nieliniowych ścieżek deformacji  $\lambda(u_A)$  uzyskanych za pomocą autorskich elementów powłokowych z rozwiązaniami odniesienia, dyskretyzacja  $(2+6+2)\times 36$

Tabela 6.26. Wspownik o przekroju ceowym – wartości mnożnika obciążenia  $\lambda_{\text{gran}}$  w punkcie granicznym krzywej  $\lambda(u_A)$  oraz wartości  $\lambda$  uzyskane w analizie nieliniowej dla czterech wartości ugięcia  $u_A$  za pomocą różnych elementów powłokowych, dyskretyzacja  $(2+6+2)\times 36$

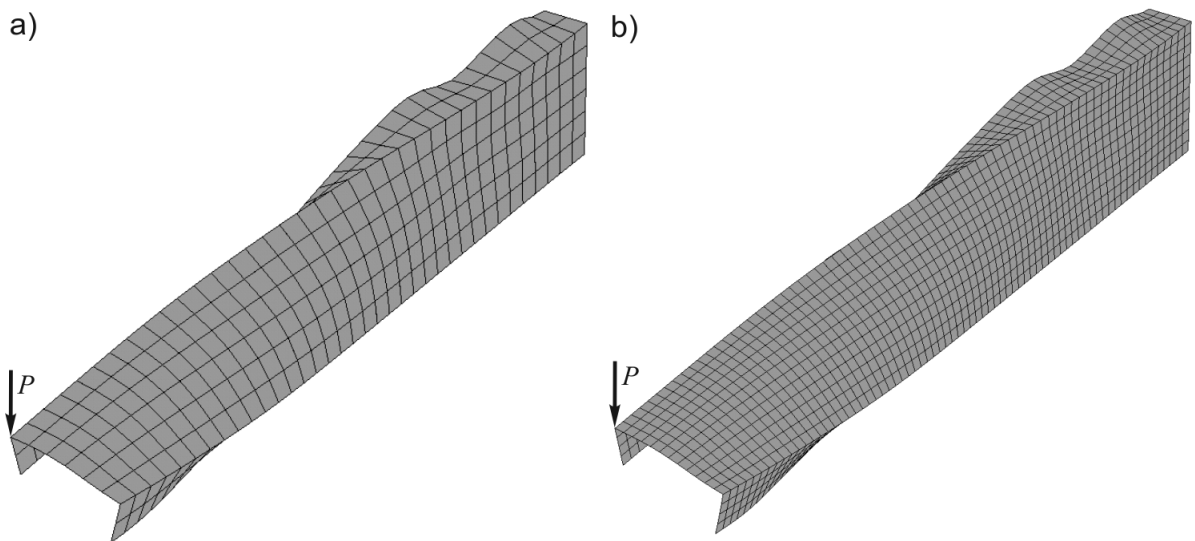
element	CAMe16	EANS4	HW47	MIX44, MIX42	MIX40	MIX38	SMIX24	SMIX16	SMIX20, SMIX12
$u_A = 0.16$ in	0.8970	0.9161	0.88	0.9161	0.9156	0.9156	0.9161	0.9161	0.9156
$\lambda_{\text{gran}}$	1.147	1.192	1.14	1.183	1.182	1.182	1.192	1.192	1.191
$u_A = 1.0$ in	0.9610	1.0478	0.97	1.0415	1.0333	1.0333	1.0478	1.0478	1.0399
$u_A = 3.0$ in	0.9937	1.1320	1.04	1.1249	1.1071	1.1071	1.1319	1.1320	1.1143
$u_A = 5.0$ in	1.0856	1.2672	1.16	–	1.1953	1.1952	1.2672	–	1.2301

Ze względu na brak zbieżności wyników zaobserwowany dla siatki ES  $(2+6+2)\times 36$  obliczenia w zakresie nieliniowym powtórzono, stosując podział  $(4+12+4)\times 72$ . Po zagęszczeniu dyskretyzacji w przypadku wszystkich typów elementów udało się przeprowadzić analizę nieliniową do założonej wartości  $u_A = 6.0$  in. Nieliniowe ścieżki równowagi  $\lambda(u_A)$  wyznaczone za pomocą autorskich elementów powłokowych porównano z krzywą otrzymaną za pomocą elementów CAMe16 (podział  $(2+6+2)\times 36$ ) na rys. 6.35. W wyniku zagęszczenia podziału otrzymano znacznie lepszą zbieżność wyników z rozwiązaniem odniesienia, jednak na rys. 6.35 wciąż widoczna jest pewna różnica między krzywymi. Zdeformowaną postać wspownika o przekroju ceowym uzyskaną w końcowej fazie analizy nieliniowej ( $u_A = 5.0$  in) w przypadku dwóch wariantów dyskretyzacji porównano na rys. 6.36. W zdeformowanej siatce widoczna jest lokalna deformacja półki, która nie może być wiernie odwzorowana za pomocą zbyt rzadkiej dyskretyzacji. Zaobserwowana na rys. 6.35 rozbieżność między krzywymi

świadczy o tym, że siatka ES  $(4+12+4) \times 72$  jest nadal zbyt mało gęsta, dlatego obliczenia powtórzono raz jeszcze dla podziału  $(8+24+8) \times 144$ . W przypadku tej dyskretyzacji otrzymano bardzo dobrą zgodność wyników z rozwiązaniem odniesienia.



Rys. 6.35. Wspornik o przekroju ceowym – porównanie nieliniowych ścieżek deformacji  $\lambda(u_A)$  uzyskanych za pomocą autorskich elementów powłokowych z rozwiązaniami odniesienia, dyskretyzacja  $(4+12+4) \times 72$



Rys. 6.36. Porównanie deformacji wspornika o przekroju ceowym uzyskanej w analizie nieliniowej dla przemieszczenia kontrolnego  $u_A = 5.0$  in: a) dyskretyzacja  $(2+6+2) \times 36$ , b) dyskretyzacja  $(4+12+4) \times 72$

W celu oceny zbieżności rozwiązań uzyskanych za pomocą opracowanych elementów mieszanych i częściowo mieszanych w tab. 6.27 podano całkowitą liczbę iteracji równowagi  $N_{iter}$  potrzebną do osiągnięcia przemieszczenia kontrolnego  $u_A = 3.0$  w analizie nieliniowej. Wartość  $u_A = 3.0$  wybrano ze względu na brak zbieżności zaobserwowany dla tej wartości w przypadku elementu SMIX16. Całkowitą liczbę iteracji  $N_{iter}$  uzyskano w 24 krokach obliczeniowych, stosując sterowanie przemieszczeniem ze zmiennym przyrostem parametru kontrolnego. Wyniki w tab. 6.27 pokazują, że najmniejszej liczby iteracji równowagi wymagały obliczenia za pomocą elementu SMIX20 i w dalszej kolejności elementów MIX40 i MIX38. W przypadku wszystkich autorskich elementów powłokowych potrzebnych było mniej iteracji niż w przypadku dotychczasowych elementów EANS4 i CAME16, sformułowanych w ramach teorii 6-parametrowej.

Tabela 6.27. Wspornik o przekroju ceowym – całkowita liczby iteracji  $N_{iter}$  w analizie nieliniowej prowadzonej do  $u_A = 3.0$  w przypadku różnych elementów powłokowych, dyskretyzacja  $(2+6+2) \times 36$

	CAMe16	EANS4	MIX44, MIX42	MIX40, MIX38	SMIX24	SMIX20	SMIX16	SMIX12
$N_{iter}$	99	122	85	66	72	63	82	80

#### 6.4. Podsumowanie rozwiązań testów liniowych i nieliniowych

Poniżej dokonano podsumowania wyników uzyskanych w zadaniach testowych w zakresie liniowym oraz nieliniowym. Na jego podstawie wybrano najlepszy typ elementu hybrydowo-mieszanego do analizy powłok izotropowych.

W analizowanych przykładach dla następujących par elementów: MIX44 i MIX42, MIX40 i MIX38, SMIX24 i SMIX16 oraz SMIX20 i SMIX12 uzyskano takie same lub bardzo zbliżone wyniki. Świadczy to o tym, że zastosowany sposób interpolacji niezależnych odkształceń i uogólnionych naprężeń w przypadku składowych ścinania poprzecznego oraz składowych związanych z owinięciem ma bardzo niewielki wpływ na uzyskane wyniki. W analizach liniowych i nieliniowych otrzymano, że wyniki bliższe wartościom odniesienia daje zastosowanie elementów z uboższą 6-parametrową interpolacją składowych membranowych (MIX40, MIX38, SMIX20 i SMIX12). Natomiast w zadaniach, w których znaczącą rolę odgrywało zginanie nieznacznie lepszą zgodność wyników uzyskano w przypadku elementów mieszanych w porównaniu do elementów częściowo mieszanych. W związku z tym najlepsze rozwiązania w zadaniach testowych otrzymano za pomocą elementów MIX40 i MIX38.

W zadaniach z nieregularną siatką ES porównywano wyniki uzyskane za pomocą elementów z interpolacją niezależnych odkształceń i uogólnionych naprężeń zdefiniowaną we współrzędnych skośnych z wartościami otrzymanymi za pomocą elementów z interpolacją określoną we współrzędnych skorygowanych. W liniowych testach dystorsji siatki oraz membranie Cooka korzystniejsze wyniki uzyskano w przypadku zastosowania współrzędnych skośnych. Jednak w przykładzie o zakrzywionej geometrii – półsfery z otworem w ramach analizy liniowej lepsze wyniki dało zastosowanie współrzędnych skorygowanych, w szczególności dla ubogich dyskretyzacji. Podobnie w testach nieliniowych: utwierdzonej powłoce walcowej z dystorsją siatki oraz półsfery z otworem minimalnie lepsze wyniki uzyskano w przypadku użycia współrzędnych skorygowanych zamiast współrzędnych skośnych. Biorąc pod uwagę, że w rozdziale siódmym analizowane będą nieliniowe zadania testowe podjęto decyzję o zastosowaniu elementu z interpolacją określoną we współrzędnych skorygowanych.

W testach nieliniowych oceniono również zbieżność rozwiązań otrzymanych za pomocą opracowanych elementów powłokowych. W przypadku elementów mieszanych oraz częściowo mieszanych B (SMIX24 i SMIX20) możliwe było zastosowanie dużych przyrostów, a obliczenia z ich pomocą wymagały znacząco mniejszej liczby iteracji niż w przypadku stosowanych do tej pory elementów EANS4 i CAMe16 w ramach teorii 6-parametrowej. W celu syntetycznej oceny opracowanych elementów powłokowych w tab. 6.28 zestawiono liczbę iteracji uzyskaną w analizowanych przykładach nieliniowych. Biorąc pod uwagę sumaryczną liczbę iteracji ze wszystkich zadań testowych, najkorzystniej wypadają elementy mieszane MIX40 i MIX38 oraz element częściowo mieszany SMIX20. Jedynie w przykładzie półsfery z otworem w obliczeniach za pomocą tych elementów potrzebnych było nieznacznie więcej iteracji, co można tłumaczyć skłonnością do form pasożytniczych, gdyż po zwiększeniu  $\alpha_t$  liczba iteracji znacząco zmalała, zob. tab. 6.24.

Podsumowując, zarówno w kryterium dokładności obliczeń jak i kryterium zbieżności rozwiązań najkorzystniej wypadają elementy MIX40 i MIX38. Natomiast spośród elementów częściowo mieszanych najlepszymi wynikami oraz zbieżnością obliczeń charakteryzuje się element SMIX20. W nieliniowych zadaniach testowych, w których zaobserwowano różnice w wynikach uzyskanych za pomocą elementów MIX40 i MIX38, minimalnie bliższe rozwiązaniu odniesienia było rozwiązanie wyznaczone za pomocą elementów MIX38. Dodatkowo, w przypadku elementu MIX38 potrzebna jest mniejsza liczba niezależnych parametrów niż w przypadku elementu MIX40, co korzystnie wpływa na czas prowadzonych obliczeń. W związku z tym spośród opracowanych elementów jako najlepszy w wykonanej analizie jednorodnych powłok izotropowych wybrano element mieszany MIX38. Na tej podstawie element ten wytypowano do analizy powłok o funkcyjnej zmienności materiału wzdłuż grubości powłoki w rozdziale siódmym rozprawy.

Tabela 6.28. Porównanie liczby iteracji  $N_{iter}$  potrzebnych w nieliniowych zadaniach testowych w przypadku autorskich elementów powłokowych

Test	Tabela	EANS4	MIX44	MIX42	MIX40	MIX38	SMIX24	SMIX20	SMIX16	SMIX12
6.3.1	6.11	73	17	17	17	17	16	16	154	154
6.3.2	6.15	5072	76	76	54	54	77	55	11181	6251
6.3.3	6.19	118	101	101	101	101	97	97	108	108
6.3.4	6.24	723	45	45	51	51	45	59	457	357
6.3.5	6.27	122	85	85	66	66	72	63	82	80
Suma		6108	324	324	289	289	307	290	11982	6950

W wykonanych testach w przypadku elementów o 6-parametrowej interpolacji składowych membranowych (np. elementu MIX38) zaobserwowano większą tendencję do generowania postaci pasożytniczych widocznych na obrotowych stopniach swobody. Przykład powłoki walcowej pokazuje, że dla małych wartości współczynnika owinięcia formy pasożytnicze mogą doprowadzić nawet do otrzymania nieliniowej ścieżki równowagi rozbieżnej z rozwiązaniem odniesienia. W związku z tym w przypadku zastosowania elementów o uboższej interpolacji składowych membranowych konieczne jest kontrolowanie występowania form pasożytniczych, których pojawienie się najczęściej związane jest z pogorszeniem zbieżności rozwiązania. Ponadto, w obliczeniach za pomocą tych elementów zaleca się stosowanie wartości  $\alpha_t \geq 0.7$ , gdyż dla nich nie odnotowano negatywnego wpływu skłonności do form pasożytniczych na deformację powłoki. Jednak należy wziąć również pod uwagę, że przyjęcie dużych wartości współczynnika  $\alpha_t$  może powodować przeszywnienie deformacji [67], dlatego wartość 0.7 wyznaczona w pracy [72] i zastosowana w rozprawie wydaje się optymalna.





## Rozdział 7

# PRZYKŁADY ANALIZY POWŁOK O FUNKCYJNEJ ZMIENNOŚCI MATERIAŁU WZDŁUŻ GRUBOŚCI

### 7.1. Uwagi wstępne

W niniejszym rozdziale zaprezentowano wyniki analiz powłok o funkcyjnej zmienności materiału wzdłuż grubości w zakresie geometrycznie nieliniowym. Obliczenia wykonano za pomocą autorskich elementów hybrydowo-mieszanych opisanych w rozdziale piątym rozprawy. Do interpolacji drugiej części niezależnych odkształceń zastosowano w nich macierz  $\mathbf{N}_4$  daną wzorem (5.68). Analizę nieliniową przeprowadzono dla przykładów powłok FGM, które w pracach autora niniejszej rozprawy [45, 91] zostały przeanalizowane odpowiednio za pomocą elementów CAME16 i EANS4. Podczas gdy w pracy [45] przyjęto stałą wartość korekcyjnego współczynnika ścinania  $\alpha_s = 5/6$ , w niniejszej rozprawie wartość  $\alpha_s$  wyznaczono w sposób opisany w podrozdziale 4.5 na podstawie wzoru (4.31). Jedną z całek w tym wzorze obliczono stosując całkowanie numeryczne wzdłuż grubości (zob. Dodatek C.1). W celu zweryfikowania poprawności autorskiej procedury do obliczania współczynnika  $\alpha_s$  uzyskane wartości porównano w tab. 7.1 z wartościami odniesienia z pracy [231]. W tab. 7.1 zaprezentowano wartości wyznaczone za pomocą 5, 7 i 9-punktowej kwadratury Gaussa oraz Lobatto dla różnych kombinacji wartości wykładnika  $n$  i stosunku  $E_c/E_m$ . W przypadku 7 i 9-punktowej kwadratury otrzymano bardzo dobrą zgodność z wartościami odniesienia. Biorąc pod uwagę wartości z tab. 7.1, do obliczania  $\alpha_s$  zastosowano w niniejszym rozdziale 7-punktową kwadraturę Gaussa.

Tabela 7.1. Porównanie wartości korekcyjnych współczynników ścinania obliczonych z wykorzystaniem kwadratury Gaussa i kwadratury Lobatto ( $n_g$  – liczba punktów całkowania) dla różnych wartości wykładnika  $n$  i stosunku modułów Younga  $E_c/E_m$  z wartościami odniesienia z pracy [231]

$n$	$E_c/E_m$	Wartości odniesienia [231]	Kwadratura Gaussa			Kwadratura Lobatto		
			$n_g = 5$	$n_g = 7$	$n_g = 9$	$n_g = 5$	$n_g = 7$	$n_g = 9$
0	5	0.8333	0.8333	0.8333	0.8333	0.8333	0.8333	0.8333
0.2	8	0.8445	0.8444	0.8445	0.8445	0.8448	0.8445	0.8445
0.4	2	0.8411	0.8411	0.8411	0.8411	0.8412	0.8411	0.8411
2	2	0.8095	0.8095	0.8095	0.8095	0.8095	0.8095	0.8095
3	20	0.6498	0.6501	0.6499	0.6500	0.6536	0.6498	0.6500
4	4	0.7248	0.7244	0.7247	0.7247	0.7225	0.7246	0.7247
6	6	0.6595	0.6600	0.6596	0.6595	0.6584	0.6598	0.6595
8	3	0.7563	0.7567	0.7564	0.7565	0.7599	0.7563	0.7565
15	5	0.7293	0.7261	0.7295	0.7290	0.7263	0.7293	0.7291
20	15	0.5780	0.5695	0.5801	0.5774	0.5686	0.5793	0.5777

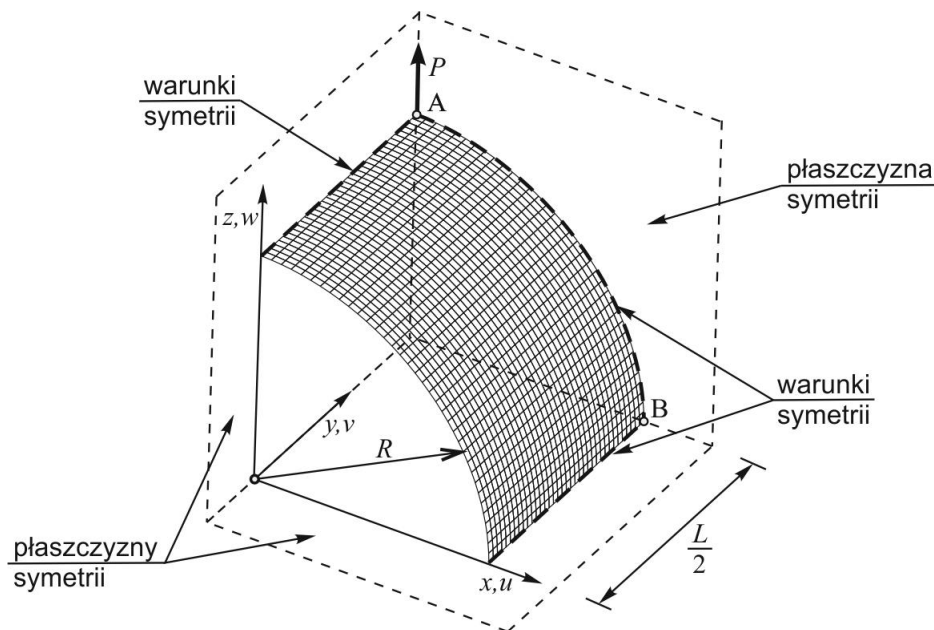
W zadaniach testowych założono, że jedna powierzchnia powłoki FGM jest wykonana z materiału ceramicznego, a druga z metalu. W obliczeniach przyjęto stałą wartość współczynnika Poissona  $\nu = 0.3$  na grubości powłoki, moduł Younga  $E_c = 1.51 \times 10^9$  dla materiału ceramicznego oraz wartość  $E_m = 0.7 \times 10^9$  dla metalu. W przypadku stałej  $N$  ośrodka Cosseratów użyto następującej domyślnej wartości  $N = \sqrt{2}/2$ , dla której  $\mu_2 = 0$  (zob. tab. 4.2). Natomiast wartość długości charakterystycznej  $l$  uzależniono od grubości powłoki zgodnie z relacją  $l = 0.01h_0$  z wyjątkiem przykładów, w których badano wpływ długości charakterystycznej na wyniki.

W pierwszych dwóch zadaniach testowych zbadano wpływ stałych ośrodka Cosseratów oraz wykładnika  $n$  w prawie potęgowym na uzyskane rozwiązania. W analizie parametrycznej obliczenia wykonano dla następujących wartości wykładnika  $n = \{0; 0.5; 2.0; 10^6\}$ . Graniczne wartości 0 i  $10^6$  charakteryzują odpowiednio powłokę z materiału ceramicznego i powłokę z metalu. W dwóch kolejnych

przykładach: czaszy opartej na rzucie kwadratu oraz wsporniku skrzynkowym skupiono się na porównaniu wyników uzyskanych w przypadku zastosowania równań konstytutywnych wyznaczonych względem powierzchni środkowej z tymi otrzymanymi w przypadku użycia równań konstytutywnych sformułowanych względem powierzchni neutralnej. Badania ograniczono do wariantu powłoki FGM, w którym oczekiwano największych różnic między tymi podejściami. W tym celu określono wartość wykładnika  $n_{\max} = \sqrt{2E_c / E_m} = 2.077$ , dla której odległość  $\zeta_0$  (4.34) między powierzchnią środkową i powierzchnią neutralną jest największa. Na tej podstawie obliczenia przeprowadzono dla powłoki FGM opisaną za pomocą wykładnika  $n = 2.0$  – wartości w przybliżeniu równej  $n_{\max}$ .

## 7.2. Rozciągana swobodna powłoka cylindryczna

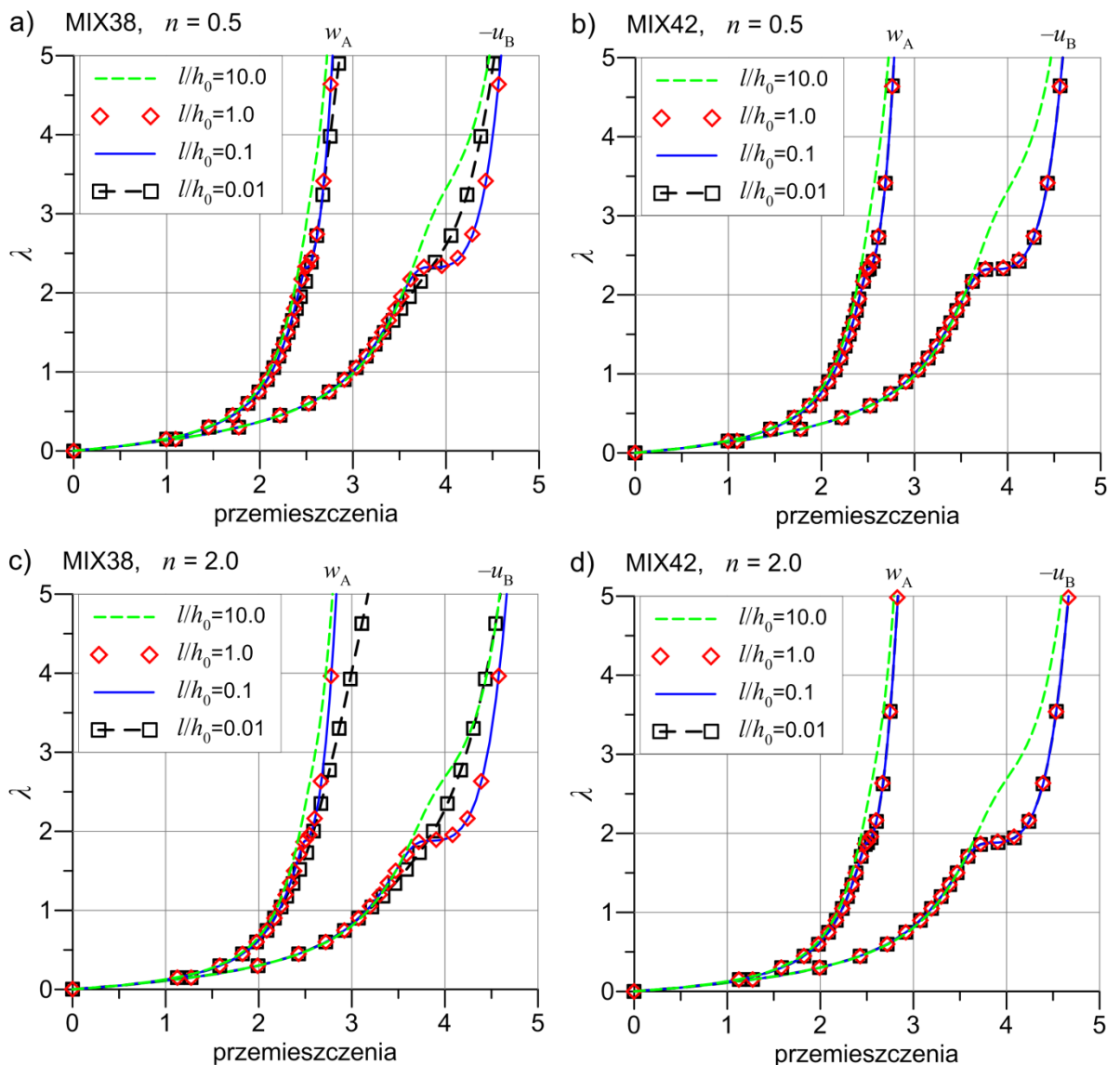
Jako pierwszy przykład przeanalizowano cienką powłokę cylindryczną o swobodnych brzegach, obciążoną parą samozrównoważonych sił rozciągających (rys. 7.1). Zadanie to jest popularnym testem efektywności elementów skończonych, które w przypadku powłok izotropowych było analizowane m.in. w [134, 190, 294, 369], natomiast w przypadku powłok FGM w pracach [11, 45, 91]. Podobnie jak w tych pracach przyjęto, że wewnętrzna powierzchnia cylindra jest wykonana z metalu, a zewnętrzna z materiału ceramicznego. W obliczeniach wykorzystano potrójną symetrię zadania, rozważając jedynie 1/8 cylindra z zadanymi warunkami symetrii na trzech brzegach (zob. rys. 7.1). Obciążenie siłą skupioną zdefiniowano w postaci:  $P(\lambda) = \lambda P_{\text{ref}}$ , gdzie  $P_{\text{ref}} = 2.5 \cdot 10^5$ . Dla analizowanej 1/8 konstrukcji zastosowano regularną siatkę ES  $32 \times 32$ , pokazaną na rys. 7.1. W zadaniu przyjęto następujące wymiary geometryczne:  $R = 4.953$ ,  $L = 10.35$  oraz grubość powłoki  $h_0 = 0.094$ .



Rys. 7.1. Rozciągana swobodna powłoka cylindryczna: geometria, warunki brzegowe, dyskretyzacja  $32 \times 32$  ES

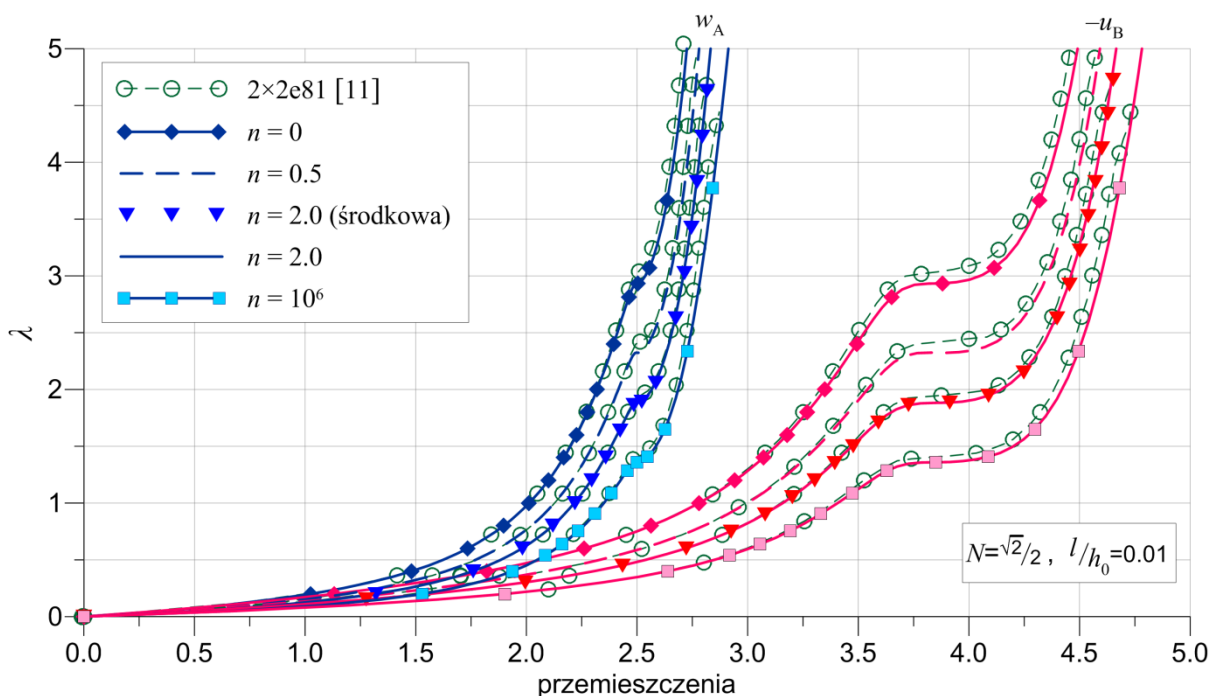
W rozdziale szóstym rozprawy pokazano, że najlepsze wyniki w analizie powłok izotropowych uzyskano za pomocą elementu mieszanego MIX38. Jednak w obliczeniach za pomocą tego elementu, w przypadku przyjęcia małej wartości współczynnika  $\alpha_t$ , zaobserwowano tendencję do powstawania form pasożytniczych. W przypadku powłok FGM w prawie konstytutywnym nie występuje współczynnik  $\alpha_t$ , jednak w podrozdziale 4.3.3 pokazano, że gdy założy się równoważność związków konstytutywnych to między  $\alpha_t$  i długością charakterystyczną  $l$  istnieje związek opisany wzorem (4.16). Na jego podstawie można np. wyznaczyć, że założonej w rozdziale szóstym wartości  $\alpha_t = 0.7$  odpowiada wartość  $l/h_0 \approx 0.17h_0$ . Jednak długość charakterystyczna jako stała materiałowa może przyjmować szeroki zakres wartości od bardzo małych w przypadku materiałów jednorodnych do dużych wartości dla materiałów niejednorodnych. Ze względu na brak danych eksperymentalnych dotyczących wartości długości charakterystycznej dla materiałów FGM, przeprowadza się analizę parametryczną dla następujących wartości  $l/h_0 = \{0.01; 0.1; 1.0; 10.0\}$ . Biorąc pod uwagę możliwość wystąpienia form pasożytniczych w przypadku elementu MIX38, obliczenia wykonano również za pomocą elementu mie-

szanego MIX42. Nieliniowe ścieżki równowagi dla przemieszczeń:  $w_A$  w punkcie A (zob. rys. 7.1) i  $u_B$  w punkcie B, uzyskane dla różnych wartości  $l$  porównano na rys. 7.2. Krzywe wyznaczone dla powłok FGM scharakteryzowanych za pomocą wartości wykładnika  $n = 0.5$  i  $n = 2.0$ . Na wszystkich wykresach zaobserwowano, że przyjęcie  $l/h_0 = 10.0$  powoduje usztywnienie deformacji powłoki cylindrycznej, podobnie jak w przypadku powłok izotropowych, zob. np. [47]. W analizach za pomocą elementów MIX38 i MIX42 otrzymano bardzo zbliżone wyniki, z wyjątkiem krzywych uzyskanych dla wariantu  $l/h_0 = 0.01$ . W przypadku elementu MIX38 zaobserwowano zniknięcie przegięcia krzywej rozwiązania w wyniku narastania form pasożytniczych widocznych na obrotowych stopniach swobody. Dalsze analizy własne dotyczące powłok FGM wykazały, że tendencja do generowania form pasożytniczych w obliczeniach za pomocą elementu MIX38 występuje również w innych zadaniach testowych dla  $l/h_0 < 0.1$ . Ze względu na to, że w analizowanym zadaniu element MIX38 nie daje poprawnych wyników dla całego rozważanego zakresu wartości długości charakterystycznej, w dalszej części rozdziału do obliczeń zastosowano element mieszany MIX42. Element ten wybrano spośród autorskich elementów o bogatszej interpolacji składowych membranowych jako element zapewniający wysoką dokładność i zbieżność rozwiązań nieliniowych.

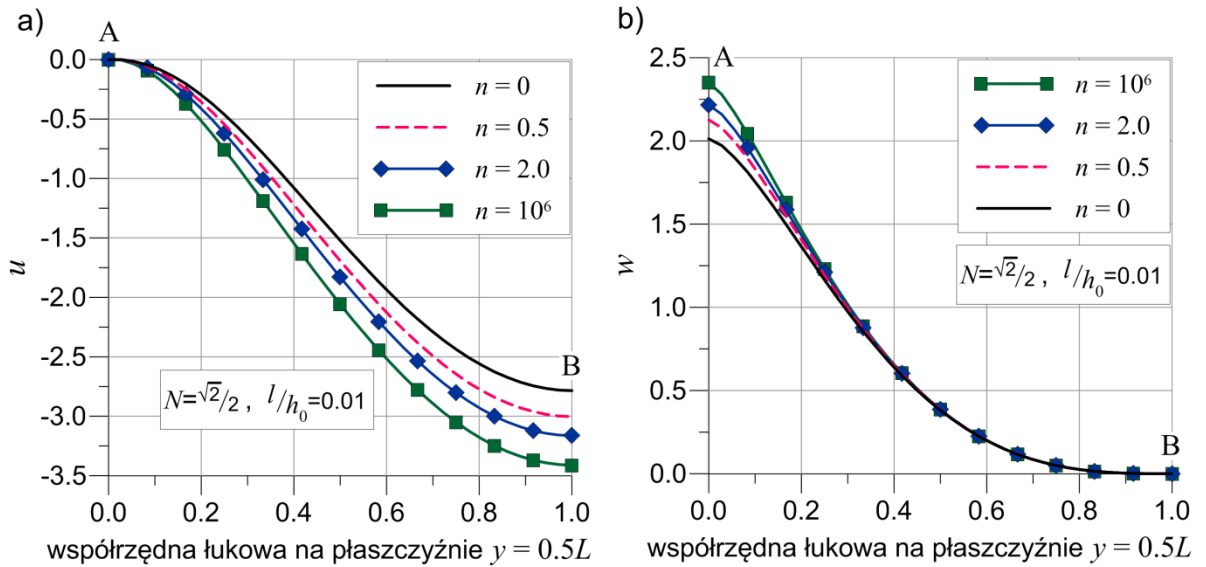


Rys. 7.2. Rozciągana swobodna powłoka cylindryczna – wpływ długości charakterystycznej  $l$  na nieliniowe ścieżki równowagi  $\lambda(w_A)$ ,  $\lambda(u_B)$  wyznaczone za pomocą elementów MIX38 i MIX42 dla dwóch wartości wykładnika  $n$ : a), b)  $n = 0.5$ ; c), d)  $n = 2.0$ , obliczenia względem neutralnej powierzchni odniesienia

Następnie zbadano wpływ wykładnika w prawie potęgowym  $n$  na nieliniowe ścieżki równowagi dla przemieszczeń  $w_A$  i  $u_B$  (zob. rys. 7.3). Nieliniowe rozwiązania wyznaczono stosując równania konstytutywne względem neutralnej powierzchni odniesienia i domyślne wartości stałych ośrodka Cosseratów  $N = \sqrt{2}/2$  i  $l = 0.01h_0$ . W początkowej fazie deformacji, w której dominuje stan zgięciowy, można zaobserwować duże, prawie sztywne ruchy fragmentów powłoki cylindrycznej. W trakcie fazy przejściowej, widocznej na wykresie w postaci przegięcia krzywej, dochodzi do zapadnięcia się powierzchni bocznych cylindra. Natomiast w końcowej fazie analizy następuje usztywnienie deformacji powłoki, gdyż cylinder jest głównie rozciągany, a dominującą rolę zaczyna odgrywać sztywność membranowa. Rysunek 7.3 pokazuje, że w obliczeniach otrzymano dobrą zgodność wyników z krzywymi odniesienia z pracy [11]. W tej pracy otrzymano nieznacznie sztywniejszą odpowiedź konstrukcji w fazie przejściowej i końcowej niż w rozwiązaniach własnych. Analizy własne wykazały bardzo dobrą zgodność między nieliniowymi ścieżkami deformacji otrzymanymi za pomocą elementu MIX42, a ścieżkami deformacji zaprezentowanymi w pracach [45, 91] uzyskanymi odpowiednio za pomocą elementów CAME16 i EANS4. W przypadku powłoki FGM opisanej wykładnikiem  $n = 2.0$  sprawdzono, że wykonanie obliczeń względem środkowej powierzchni odniesienia dało bardzo zbliżone wyniki do tych uzyskanych względem neutralnej powierzchni odniesienia (rys. 7.3). Na rys. 7.3 zaobserwowano ponadto, że wraz ze zwiększaniem wartości wykładnika  $n$  w prawie potęgowym zmniejsza się sztywność powłoki cylindrycznej. W związku z tym na krawędzi AB cylindra, w płaszczyźnie symetrii  $y = 0.5L$  (zob. rys. 7.1), największe wartości przemieszczeń  $u$  i  $w$  otrzymano w przypadku przyjęcia  $n = 10^6$  (zob. rys. 7.4). Rysunek 7.4 pokazuje również, że wartość wykładnika  $n$  ma większy wpływ na przemieszczenie poziome  $u$ , gdyż w przypadku ugięcia  $w$  wpływ  $n$  zaobserwowano jedynie w otoczeniu punktu A. W przypadku powłok FGM ( $n = 0.5$ ,  $n = 2.0$ ) otrzymano ten sam kształt ścieżek deformacji (rys. 7.3) oraz kształt deformacji wzdłuż krawędzi AB (rys. 7.4) jak dla powłok izotropowych ( $n = 0$  i  $n = 10^6$ ).



Rys. 7.3. Rozciągana swobodna powłoka cylindryczna – porównanie nieliniowych ścieżek deformacji  $\lambda(w_A)$ ,  $\lambda(u_B)$  z rozwiązaniem odniesienia z pracy [11] dla czterech wartości wykładnika  $n$ , obliczenia wykonano względem neutralnej powierzchni odniesienia

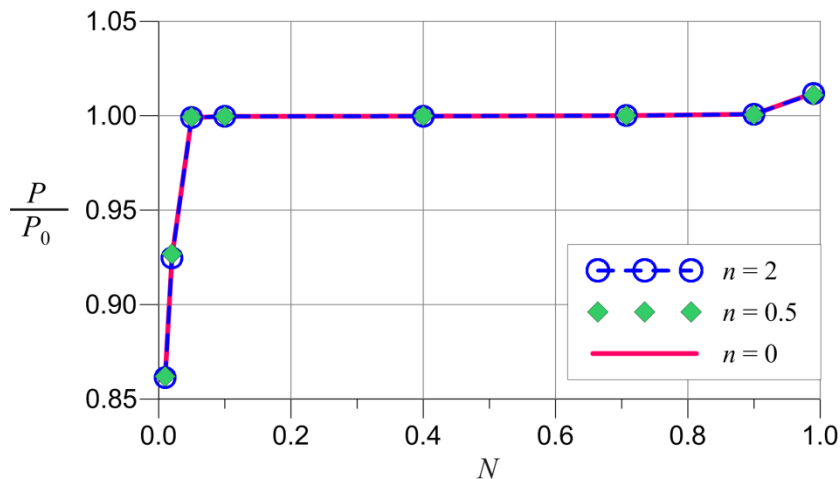


Rys. 7.4. Rozciągana swobodna powłoka cylindryczna – wpływ wartości wykładnika  $n$  na przesunięcia  $u$  i  $w$  na krawędzi AB (w płaszczyźnie  $y=0.5L$ , zob. rys. 7.1), deformację wyznaczono względem neutralnej powierzchni odniesienia dla mnożnika  $\lambda = 1.0$

W celu dokładniejszej oceny wpływu długości charakterystycznej, wartości mnożnika obciążenia  $\lambda$  obliczone dla trzech zadanych wartości ugięcia  $w_A$  w przypadku trzech wariantów stosunku  $l/h_0$  porównano w tab. 7.2. Wartości  $\lambda$  zaprezentowane dla dwóch wariantów powłoki FGM ( $n = 0.5$ ,  $n = 2.0$ ) pokazują, że gdy długość charakterystyczna spełnia warunek  $l \leq h_0$ , ma niewielki wpływ na uzyskane wyniki. Dopiero w wariancie  $l/h_0 = 10$  zaobserwowano znaczące zwiększenie sztywności powłoki FGM, szczególnie widoczne w fazie przejściowej dla  $w_A = 2.5$ , przejawiające się zniknięciem przegięcia krzywej (zob. rys. 7.2). Wartości zestawione w tab. 7.2 umożliwiają również dokładne porównanie wyników otrzymanych za pomocą równań konstytutywnych określonych względem neutralnej i środkowej powierzchni odniesienia powłoki. W początkowej fazie deformacji ( $w_A \leq 2.0$ ) minimalnie większe wartości mnożnika  $\lambda$  uzyskano w podejściu warstwy neutralnej. Jednak już w fazie przejściowej ( $w_A = 2.5$ ) dla  $l < h_0$  większe wartości  $\lambda$  otrzymano w analizach względem warstwy środkowej. Na koniec zbadano wpływ drugiej stałej ośrodka Cosseratów  $N$  na uzyskane wyniki. Ze względu na to, że największy wpływ stałej  $N$  zaobserwowano w fazie przejściowej deformacji na rys. 7.5 porównano wartości  $P/P_0$  obliczone dla ugięcia  $w_A = 2.5$  w przypadku różnych wartości wykładnika  $n$ . Na wykresie zaprezentowano krzywe  $P/P_0$  dla zakresu wartości  $N \in (0; 1)$  znormalizowane względem wartości odniesienia  $P_0$  obliczonej dla  $N = \sqrt{2}/2$ . Na rys. 7.5 zaobserwowano, że stała  $N$  w szerokim zakresie wartości  $N \in \langle 0.05; 0.9 \rangle$  nie ma praktycznie wpływu na wyniki. Jedynie dla wartości  $N$  bliskich zeru otrzymano spadek sztywności powłoki oraz dla wartości  $N \approx 1$  nieznaczny wzrost wartości  $P/P_0$ . Rysunek 7.5 pokazuje, że wartość wykładnika  $n$  nie ma wpływu na uzyskaną zależność  $P/P_0(N)$ .

Tabela 7.2. Rozciągana swobodna powłoka cylindryczna – wpływ długości charakterystycznej  $l$  i wyboru powierzchni odniesienia na wartość mnożnika obciążenia  $\lambda$  obliczonego dla trzech wartości ugięcia  $w_A$  w przypadku dwóch wariantów powłoki FGM ( $n = 0.5$ ,  $n = 2.0$ )

$w_A$	powierzchnia odniesienia	$n = 0.5$			$n = 2.0$		
		$l = 0.01h_0$	$l = h_0$	$l = 10h_0$	$l = 0.01h_0$	$l = h_0$	$l = 10h_0$
1.0	neutralna	0.15060	0.15073	0.15389	0.12326	0.12336	0.12597
	środkowa	0.15030	0.15043	0.15357	0.12286	0.12296	0.12555
2.0	neutralna	0.76590	0.76862	0.81185	0.62506	0.62725	0.66238
	środkowa	0.76301	0.76570	0.80853	0.62133	0.62348	0.65808
2.5	neutralna	2.32411	2.33713	2.89169	1.88125	1.89235	2.33213
	środkowa	2.32554	2.33801	2.87672	1.88176	1.89233	2.31314



Rys. 7.5. Rozciągana swobodna powłoka cylindryczna: wpływ stałej  $N$  osrodka Cosseratów na wartość siły  $P$  obliczonej dla ugięcia  $w_A = 2.5$  i trzech wartości wykładnika  $n$ ,  $P_0$  – wartość odniesienia siły wyznaczona dla  $N = \sqrt{2}/2$ , obliczenia przeprowadzono względem neutralnej powierzchni odniesienia

### 7.3. Chłodnia kominowa (hiperboloida)

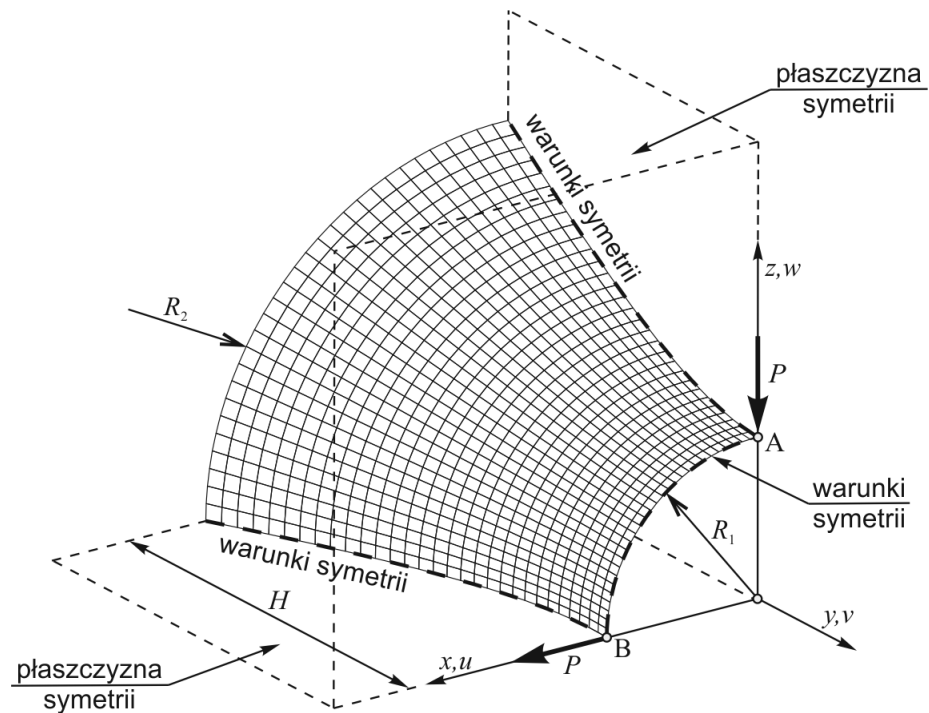
Przykład powłoki w kształcie chłodni kominowej obciążonej dwoma parami sił samozrównoważonych został zaproponowany w pracy [20]. Zadanie to stanowi wymagający test powłokowych elementów skończonych, ze względu na występujące w trakcie deformacji duże przemieszczenia i obroty. Przykład chłodni kominowej analizowano w przypadku powłok jednorodnych, izotropowych [24, 367], jednak głównie w przypadku powłok warstwowych, zob. np. [12, 20, 137, 348, 371]. Analizy tego zadania w przypadku powłoki FGM podjęto się w pracy autora niniejszej rozprawy [45]. Geometrię rozważanej hiperboloidy jednopowłokowej pokazano na rys. 7.6. W obliczeniach wykorzystano potrójną symetrię zadania, rozważając jedynie 1/8 chłodni kominowej o wysokości  $H = 20.0$  i grubości  $h_0 = 0.04$ . Zmianę promienia hiperboloidy wzdłuż osi obrotu  $y$  (rys. 7.6) opisuje wzór

$$R(y) = 7.5\sqrt{1 + 3(z/20)^2}, \quad (7.1)$$

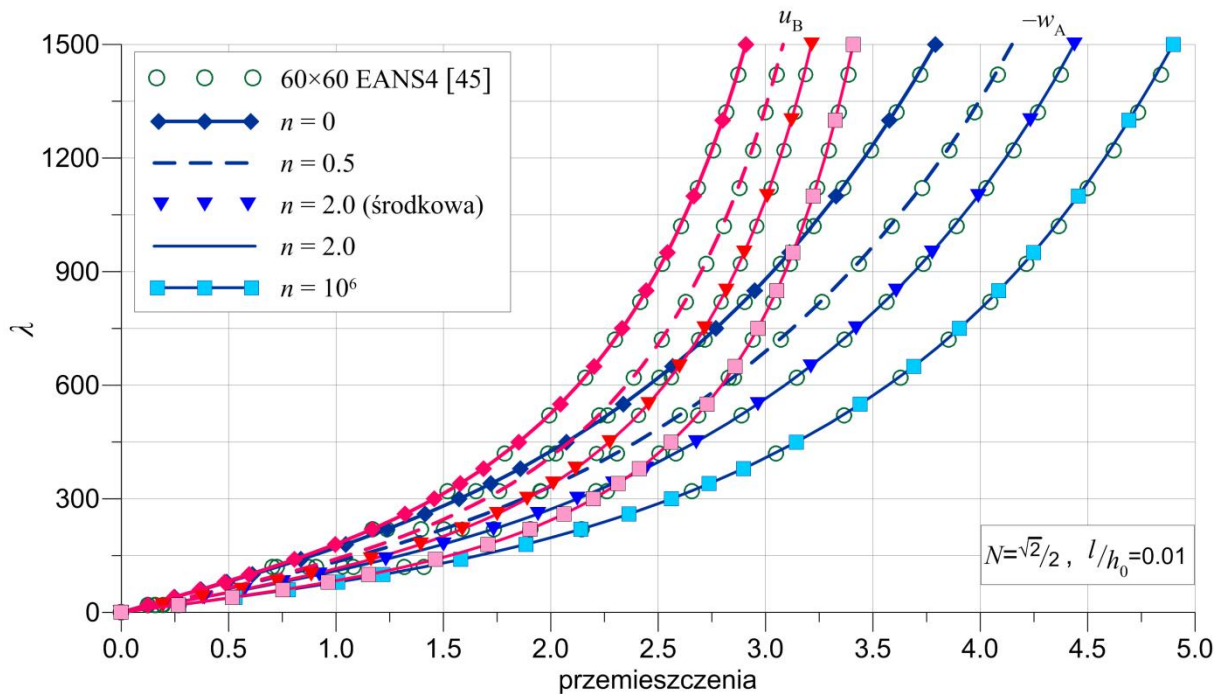
zgodnie z którym wartości promienia hiperboloidy na obu końcach wynoszą  $R_1 = 7.5$ ,  $R_2 = 15$ . Na rys. 7.6 zaprezentowano również warunki podparcia i sposób obciążenia chłodni kominowej siłami skupionymi określonymi następująco:  $P(\lambda) = \lambda P_{\text{ref}}$ ,  $P_{\text{ref}} = 5.0$ . W obliczeniach założono, że wewnętrzna powierzchnia hiperboloidy jest wykonana z metalu, a zewnętrzna z materiału ceramicznego. Dla analizowanej 1/8 chłodni kominowej zastosowano regularną siatkę  $30 \times 30$  (zob. rys. 7.6).

Obliczenia nieliniowe przeprowadzono względem neutralnej powierzchni odniesienia, stosując sterowanie obciążeniem i przyjmując:  $N = \sqrt{2}/2$  i  $l = 0.01h_0$ . Analiza tego przykładu potwierdziła bardzo dobrą zbieżność rozwiązań w przypadku autorskiego elementu mieszanego MIX42, gdyż wykonanie obliczeń do wartości mnożnika  $\lambda = 1500$  było możliwe w dwóch krokach obliczeniowych w których potrzebnych było łącznie 9 iteracji równowagi. Wpływ wykładnika w prawie potęgowym  $n$  na nieliniowe ścieżki równowagi dla przemieszczeń:  $w_A$  w punkcie A (zob. rys. 7.6) i  $u_B$  w punkcie B zaprezentowano na rys. 7.7. Uzyskane ścieżki deformacji porównano z krzywymi odniesienia z pracy [45], wyznaczonymi za pomocą dwukrotnie gęstszej siatki  $60 \times 60$  elementów EANS4. Rysunek 7.7 pokazuje, że w analizowanym zakresie deformacji otrzymano dobrą zgodność wyników z krzywymi odniesienia. Zatem zastosowany w obliczeniach podział  $30 \times 30$  ES jest wystarczająco gęsty. W obliczeniach dla wykładnika  $n = 2.0$  względem środkowej i neutralnej powierzchni odniesienia uzyskano praktycznie nierozróżnialne krzywe (zob. rys. 7.7). Na wykresach przedstawionych na rys. 7.7 i 7.8 widać, że wraz ze zwiększaniem wartości wykładnika  $n$  rosną wartości przemieszczeń  $w_A$  i  $u_B$ , a więc podatność analizowanej chłodni kominowej. W związku z tym na krawędzi AB hiperboloidy (zob. rys. 7.6), w płaszczyźnie symetrii  $xz$ , największe wartości przemieszczeń  $u$  i  $w$  otrzymano dla  $n = 10^6$  (zob. rys. 7.8). Zależność ta wynika z tego, że wraz ze zwiększaniem wartości  $n$  w powłoce FGM rośnie zawartość metalu o mniejszym założonym module Younga  $E_m = 0.7 \times 10^9$  niż dla materiału ceramicznego.

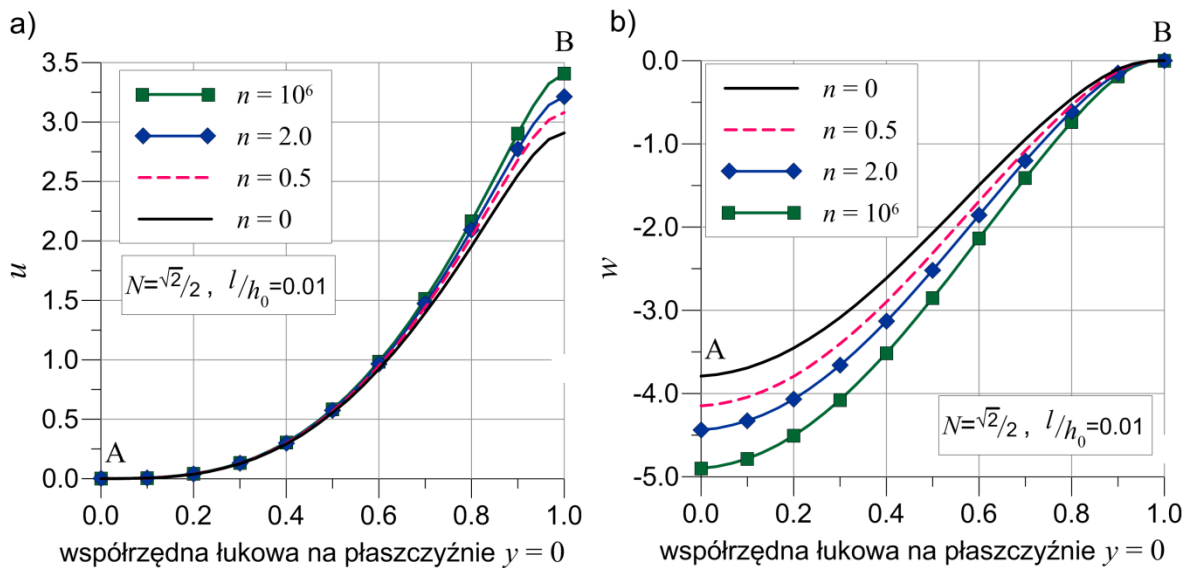
nego ( $E_c = 1.51 \times 10^9$ ). Ponadto rys. 7.8 pokazuje, że wykładnik  $n$  ma większy wpływ na przemieszczenie pionowe  $w$  niż na przemieszczenie poziome  $u$ . W przypadku powłok FGM ( $n = 0.5, n = 2.0$ ) otrzymano ten sam kształt ścieżek deformacji (rys. 7.7) oraz ten sam kształt deformacji wzdłuż krawędzi AB (rys. 7.8) jak dla powłok jednorodnych, izotropowych ( $n = 0$  i  $n = 10^6$ ).



Rys. 7.6. Chłodnia kominowa: geometria, warunki brzegowe, dyskretyzacja 30×30 ES

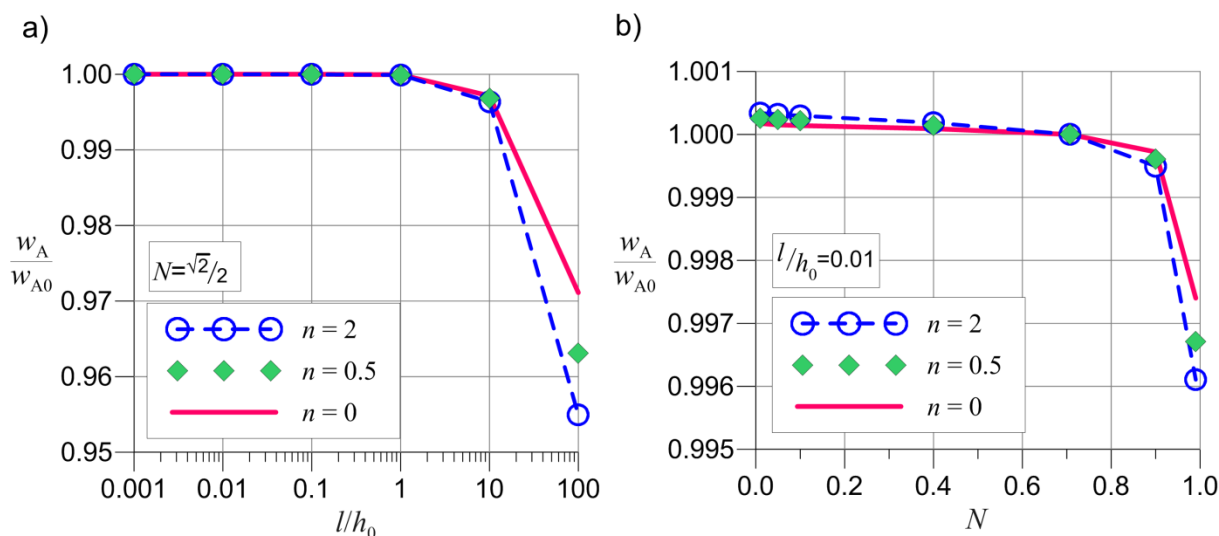


Rys. 7.7. Chłodnia kominowa: wpływ wykładnika  $n$  na nieliniowe ścieżki deformacji  $\lambda(u_B), \lambda(w_A)$ , porównanie krzywych z rozwiązaniami odniesienia z pracy [45], obliczenia wykonano względem neutralnej powierzchni odniesienia za pomocą siatki ES 30×30



Rys. 7.8. Chłodnia kominowa – wpływ wartości wykładnika  $n$  na przesunięcia  $u$  i  $w$  na krawędzi AB (w płaszczyźnie symetrii  $y=0$ , zob. rys. 7.6), deformację wyznaczono względem neutralnej powierzchni odniesienia dla mnożnika  $\lambda = 1500$

Następnie zbadano wpływ stałych ośrodka Cosseratów  $l$  i  $N$  na deformację powłoki. W tym celu na rys. 7.9 zaprezentowano zależność znormalizowanego ugięcia  $w_A/w_{A0}$  od wartości stałych  $l$  i  $N$ . Wartości  $w_A$  obliczono względem środkowej powierzchni odniesienia dla mnożnika obciążenia  $\lambda = 1500$ . Na rys. 7.9a zaobserwowano, że dla  $l \leq h_0$  długość charakterystyczna praktycznie nie ma wpływu na deformację powłoki. W wariancie  $l/h_0 = 10$  otrzymano jedynie nieznaczne zmniejszenie wartości  $w_A$ , dlatego nieliniową analizę przeprowadzono również dla wariantu  $l/h_0 = 100$ , w którym efekt zwiększenia sztywności powłoki FGM jest znacznie bardziej widoczny. Tymczasem na wykresie dla stałej  $N$  (zob. rys. 7.9b) minimalne usztywnienie deformacji chłodni kominowej zaobserwowano jedynie dla wartości  $N \approx 1$ . W przypadku hiperboloidy stała  $N$  ma znacznie mniejszy wpływ na wyniki niż w przykładzie rozciąganej powłoki cylindrycznej. Analiza równań konstytutywnych (4.54) i (4.55) wskazuje na to, że wpływ stałej  $N$  powinien przejawiać się w szczególności w przykładach, w których znaczącą rolę w deformacji odgrywają składowe odkształceń  $\varepsilon_{12}$ ,  $\varepsilon_{21}$ ,  $\kappa_{12}$  i  $\kappa_{21}$ . W przeciwieństwie do poprzedniego przykładu na rys. 7.9 spostrzeżono, że wpływ stałych ośrodka Cosseratów na wartość  $w_A/w_{A0}$  nieznacznie rośnie wraz z wartością  $n$  i jest największy dla wykładnika  $n = 2$ .



Rys. 7.9. Chłodnia kominowa – wpływ stałych ośrodka Cosseratów na wartość ugięcia  $w_A$  ( $\lambda = 1500$ ) dla trzech wartości wykładnika  $n$ : a) wpływ długości charakterystycznej  $l$  ( $w_{A0}$  dla  $l = 0.01h_0$ ), b) wpływ stałej  $N$  ( $w_{A0}$  dla  $N = \sqrt{2}/2$ ), obliczenia przeprowadzono względem środkowej powierzchni odniesienia



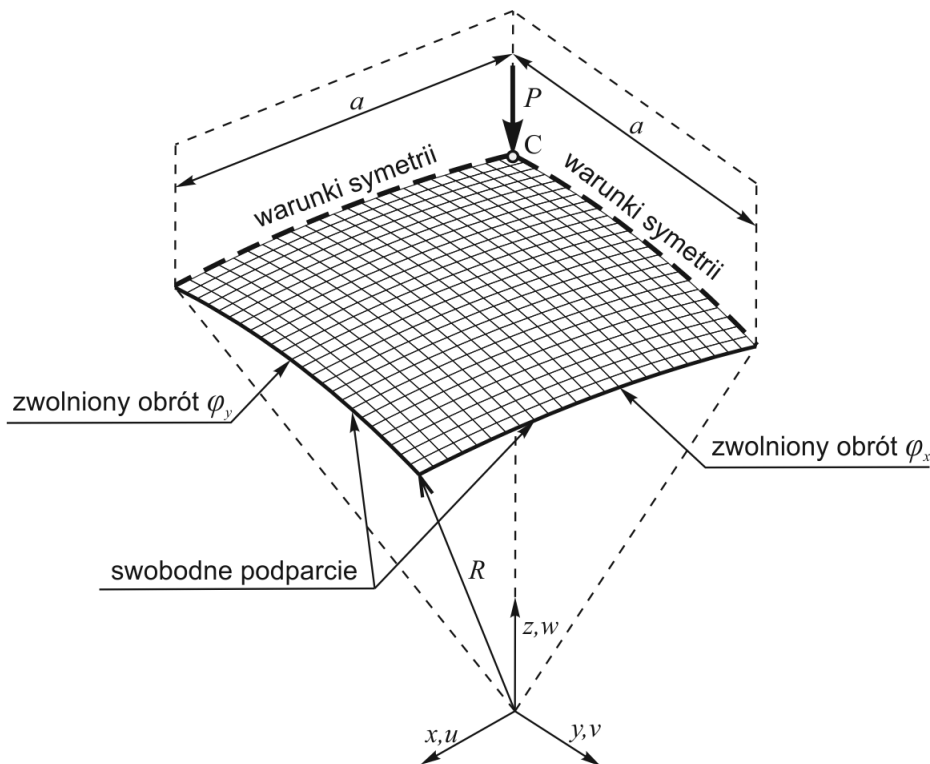
W celu dokładniejszej analizy wpływu wyboru powierzchni odniesienia i wartości długości charakterystycznej na deformację chłodni kominowej w tab. 7.3 porównano wartości  $w_A$  i  $u_B$  obliczone dla pięciu poziomów obciążenia i dwóch wariantów powłoki FGM ( $n = 0.5$ ,  $n = 2.0$ ). Na podstawie rys. 7.9a do obliczeń wybrano następujące wartości  $l/h_0 = \{0.01; 10.0; 100.0\}$ . Wyniki wskazują, że gdy długość charakterystyczna spełnia warunek  $l \leq 10h_0$  ma to niewielki wpływ na wartości przemieszczeń  $w_A$  i  $u_B$ . Ponadto zaobserwowano, że wpływ długości charakterystycznej na deformację rośnie wraz ze zwiększaniem obciążenia  $P$ . W przeprowadzonych obliczeniach minimalnie większe wartości przemieszczeń uzyskano w przypadku równań konstytutywnych określonych względem środkowej powierzchni odniesienia powłoki. Wartości  $w_A$  i  $u_B$  zestawione w tab. 7.3. pokazują, że nieznacznie większe różnice w wynikach uzyskanych względem neutralnej i środkowej powierzchni odniesienia otrzymano dla wykładnika  $n = 2.0$ .

Tabela 7.3. Chłodnia kominowa – wpływ długości charakterystycznej  $l$  i wyboru powierzchni odniesienia na wartość przemieszczeń  $w_A$  i  $u_B$  wyznaczonych dla pięciu wartości obciążenia  $P$  w przypadku dwóch wariantów powłoki FGM ( $n = 0.5$ ,  $n = 2.0$ )

$P$		powierzchnia odniesienia	$n = 0.5$			$n = 2.0$		
			$l = 0.01h_0$	$l = 10h_0$	$l = 100h_0$	$l = 0.01h_0$	$l = 10h_0$	$l = 100h_0$
1500	$-w_A$	neutralna	1.86854	1.86521	1.84937	2.12337	2.11920	2.09710
		środkowa	1.86915	1.86580	1.84996	2.12444	2.12024	2.09812
	$u_B$	neutralna	1.69503	1.69329	1.68862	1.88918	1.88683	1.87749
		środkowa	1.69554	1.69382	1.68915	1.89005	1.88772	1.87839
3000	$-w_A$	neutralna	2.80001	2.79350	2.75146	3.09037	3.08281	3.02938
		środkowa	2.80083	2.79430	2.75222	3.09176	3.08415	3.03066
	$u_B$	neutralna	2.35267	2.34813	2.31753	2.52928	2.52369	2.48076
		środkowa	2.35330	2.34879	2.31817	2.53031	2.52477	2.48181
5000	$-w_A$	neutralna	3.55023	3.54084	3.46351	3.84915	3.83805	3.73354
		środkowa	3.55117	3.54173	3.46436	3.85067	3.83950	3.73491
	$u_B$	neutralna	2.78469	2.77745	2.71366	2.93782	2.92948	2.84939
		środkowa	2.78536	2.77817	2.71434	2.93890	2.93064	2.85050
7500	$-w_A$	neutralna	4.14802	4.13483	3.99493	4.43686	4.42085	4.23697
		środkowa	4.14899	4.13575	3.99580	4.43841	4.42232	4.23836
	$u_B$	neutralna	3.08119	3.07172	2.97506	3.21354	3.20293	3.08894
		środkowa	3.08187	3.07247	2.97578	3.21464	3.20413	3.09010

#### 7.4. Czasza oparta na rzucie kwadratu, obciążona siłą skupioną

Zagadnienie deformacji wycinka czaszy kulistej, podpartej na krawędziach o rzucie kwadratu, obciążonej centralnie siłą skupioną jest jednym z popularniejszych zadań testowych powłok zakrzywionych w dwóch kierunkach. Przykład ten w przypadku powłok jednorodnych, izotropowych analizowano w zakresie nieliniowym m.in. w pracach [67, 155, 291, 325], natomiast w przypadku powłok warstwowych w [371]. W analizie wykorzystuje się podwójną symetrię zadania, rozważając 1/4 powłoki wyciętej ze sfery o promieniu  $R = 2.54$  za pomocą czterech płaszczyzn równoległych do osi  $z$ . Rzut wycinka czaszy na płaszczyznę  $xy$  tworzy kwadrat o boku  $a = 0.7849$  (zob. rys. 7.10). W obliczeniach przyjęto grubość powłoki  $h_0 = 0.09945$  za pracą [325] oraz warunki brzegowe zaprezentowane na rys. 7.10. Na dwóch zewnętrznych krawędziach wycinek czaszy podparto swobodnie nieprzesuwnie, blokując wszystkie stopnie swobody z wyjątkiem obrotu względem jednej wybranej globalnej osi współrzędnych. Natomiast w płaszczyznach symetrii zastosowano odpowiednie warunki symetrii. W obliczeniach dla siły skupionej  $P(\lambda) = \lambda P_{\text{ref}}$  przyjęto następującą wartość odniesienia  $P_{\text{ref}} = 2500$  oraz założono, że dolna powierzchnia czaszy jest wykonana z metalu, a górna powierzchnia z materiału ceramicznego.



Rys. 7.10. Czasza oparta na rzucie kwadratu: geometria, warunki brzegowe, dyskretyzacja  $24 \times 24$  ES

W obliczeniach dla analizowanego wycinka czaszy zastosowano regularny podział  $24 \times 24$  ES, pokazany na rys. 7.10. W przeciwieństwie do poprzednich przykładów w zadaniu tym ze względu na relatywnie większą grubość powłoki skupiono się na porównaniu wyników uzyskanych w obliczeniach względem powierzchni środkowej i względem powierzchni neutralnej. Analizy nieliniowe przeprowadzono dla jednej wartości wykładnika  $n = 2.0$ , dla której spodziewano się uzyskać największe różnice między podejściem warstwy środkowej i neutralnej. W przeprowadzonych obliczeniach przyjęto następujące wartości stałych ośrodka Cosseratów:  $N = \sqrt{2}/2$  i  $l = 0.01h_0$ .

Wobec braku w literaturze rozwiązania odniesienia dla materiału FGM, poza wynikami zaprezentowanymi w pracy autora niniejszej rozprawy [45], w przykładzie tym zdecydowano się porównać wyniki z tymi uzyskanymi za pomocą programu komercyjnego Abaqus 6.14 [1]. W programie Abaqus do obliczeń użyto ten sam podział  $24 \times 24$  oraz dwa typy elementów skończonych: element 4-węzłowy z całkowaniem pełnym S4 oraz element 8-węzłowy z całkowaniem zredukowanym S8R. W celu wymodelowania powłoki FGM w programie Abaqus skorzystano z opcji „generalized section”, która umożliwia zdefiniowanie wyrazów macierzy konstytutywnej dla przekroju powłoki. Jednak ze względu na to, że w programie jest zaimplementowana inna teoria powłok o symetrycznych miarach odkształceń i uogólnionych naprężeniach, niemożliwe było bezpośrednie zastosowanie równań konstytutywnych zestawionych w tab. 4.2. Zatem w celu wykonania obliczeń w programie Abaqus konieczne było dokonanie symetryzacji związków konstytutywnych opisanych w rozdziale czwartym rozprawy. W wyniku tej operacji równania konstytutywne powłok FGM względem środkowej powierzchni odniesienia (4.54) redukują się do postaci

$$\begin{bmatrix} N^{11} \\ N^{22} \\ N^{12} \\ Q^1 \\ Q^2 \\ M^{11} \\ M^{22} \\ M^{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{FGM} & \nu C_{FGM} & 0 & 0 & 0 & B_{FGM}^s & \nu B_{FGM}^s & 0 \\ \nu C_{FGM} & C_{FGM} & 0 & 0 & 0 & \nu B_{FGM}^s & B_{FGM}^s & 0 \\ 0 & 0 & qC_{FGM} & 0 & 0 & 0 & 0 & qB_{FGM}^s \\ 0 & 0 & 0 & q\alpha_s C_{FGM} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q\alpha_s C_{FGM} & 0 & 0 & 0 \\ B_{FGM}^s & \nu B_{FGM}^s & 0 & 0 & 0 & D_{FGM}^s & \nu D_{FGM}^s & 0 \\ \nu B_{FGM}^s & B_{FGM}^s & 0 & 0 & 0 & \nu D_{FGM}^s & D_{FGM}^s & 0 \\ 0 & 0 & qB_{FGM}^s & 0 & 0 & 0 & 0 & qD_{FGM}^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \kappa_{11} \\ \kappa_{22} \\ \bar{\kappa}_{12} \end{bmatrix}, \quad (7.2)$$

gdzie  $q = (1-\nu)/2$ . Tymczasem równania określone względem neutralnej powierzchni odniesienia (4.55) zostały wprowadzone do programu Abaqus w postaci

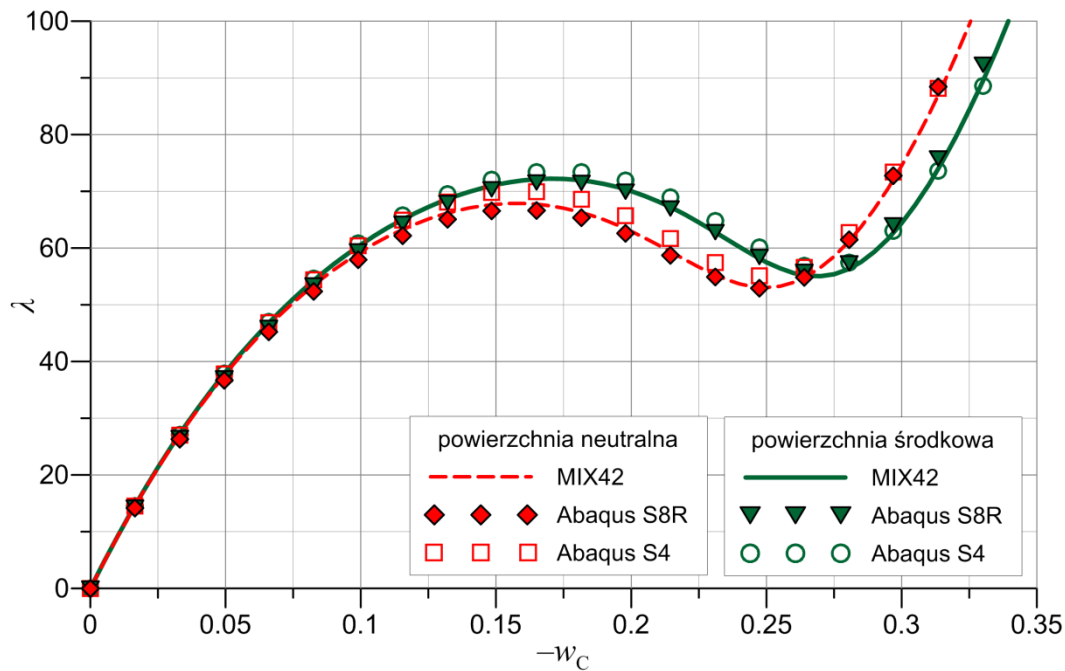
$$\begin{bmatrix} N^{11} \\ N^{22} \\ N^{12} \\ Q^1 \\ Q^2 \\ M^{11} \\ M^{22} \\ M^{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{FGM} & \nu C_{FGM} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu C_{FGM} & C_{FGM} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & qC_{FGM} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q\alpha_s C_{FGM} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q\alpha_s C_{FGM} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{FGM}^n & \nu D_{FGM}^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \nu D_{FGM}^n & D_{FGM}^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & qD_{FGM}^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \kappa_{11} \\ \kappa_{22} \\ \bar{\kappa}_{12} \end{bmatrix}. \quad (7.3)$$

Wyrazy macierzy konstytutywnych ze wzorów (7.2) i (7.3) obliczono za pomocą autorskiego skryptu napisanego w języku programowania Python, który po uruchomieniu tworzy odpowiednią sekcję w programie Abaqus. W związkach (7.2) i (7.3) uwzględniono, że w Abaquie są zaimplementowane inżynierskie miary odkształceń postaciowych  $\gamma_{12}$  i odkształceń skręcających  $\bar{\kappa}_{12}$ .

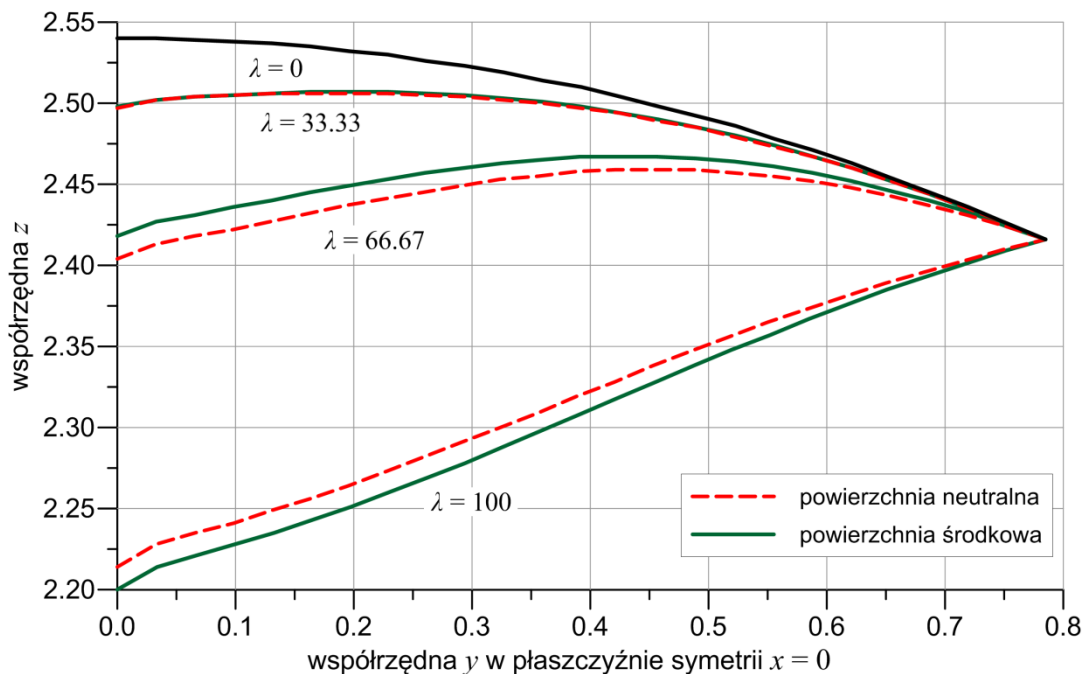
W analizach nieliniowych zastosowano sterowanie wartością przemieszczenia  $w_C$  w punkcie kontrolnym C (zob. rys. 7.10). Przeprowadzenie obliczeń do wartości  $w_C = -0.35$  było możliwe w jednym przyroście (11 iteracjach) w przypadku środkowej powierzchni odniesienia i w dwóch przyrostach (8 iteracjach) w przypadku neutralnej powierzchni odniesienia. Zatem w zadaniu tym potwierdzono bardzo dobrą zbieżność rozwiązań nieliniowych w przypadku autorskiego elementu mieszanego MIX42. Jednak w celu uzyskania gładkich ścieżek deformacji w obliczeniach przyjęto znacznie mniejszy przyrost  $\Delta w_C = -0.005$ . Nieliniowe ścieżki równowagi  $\lambda(w_C)$  wyznaczone za pomocą elementu autorskiego MIX42 oraz za pomocą elementów komercyjnych S4 i S8R porównano na rys. 7.11. Rozwiązanie własne znajduje się pomiędzy rozwiązaniami odniesienia otrzymanymi w programie Abaqus, pozostając w bardzo dobrej zgodności z krzywymi wyznaczonymi za pomocą elementu S8R. Ze względu na zaobserwowaną w tym przykładzie w poprzednich pracach [67, 371] tendencję do powstawania form pasożytniczych sprawdzono tutaj, że nie występują one w deformacji wycinka czaszy uzyskanej w przypadku zastosowania elementów S8R i MIX42. Kształt ścieżek deformacji dla czaszy FGM (zob. rys. 7.11) jest bardzo zbliżony do tego otrzymanego w literaturze [67, 155, 291, 325] w analizie wycinka czaszy wykonanego z materiału jednorodnego, izotropowego.

W celu lepszego porównania rozwiązania otrzymanego w obliczeniach względem środkowej powierzchni odniesienia z rozwiązaniem wyznaczonym względem powierzchni neutralnej na rys. 7.12 zaprezentowano kształt zdeformowanej krawędzi w płaszczyźnie symetrii czaszy  $x = 0$  dla trzech wartości mnożnika obciążenia  $\lambda$ . Krzywe na rys. 7.11 i 7.12 pokazują, że w początkowej fazie deformacji wybór powierzchni odniesienia nie ma wpływu na wyniki. Wraz ze zbliżaniem się do wartości krytycznej  $\lambda_k$ , dla której dochodzi do utraty stateczności czaszy i charakterystycznego przeskoku widocznego na ścieżkach deformacji pokazanych na rys. 7.11, rośnie wartość różnicy między krzywymi dla powierzchni środkowej i neutralnej. W tym przejściowym zakresie większą sztywność powłoki oraz wartość mnożnika krytycznego  $\lambda_k$  uzyskano w obliczeniach względem środkowej powierzchni odnie-

sienia w przeciwieństwie do poprzednich przykładów. W końcowej fazie analizy nieliniowej dochodzi do wzmocnienia deformacji czaszy ze względu na coraz większą rolę sztywności membranowej. W tej fazie analizy na rys. 7.11 i 7.12 ( $\lambda = 100$ ) większe wartości przemieszczeń zaobserwowano w przypadku krzywych wyznaczonych względem środkowej powierzchni odniesienia.



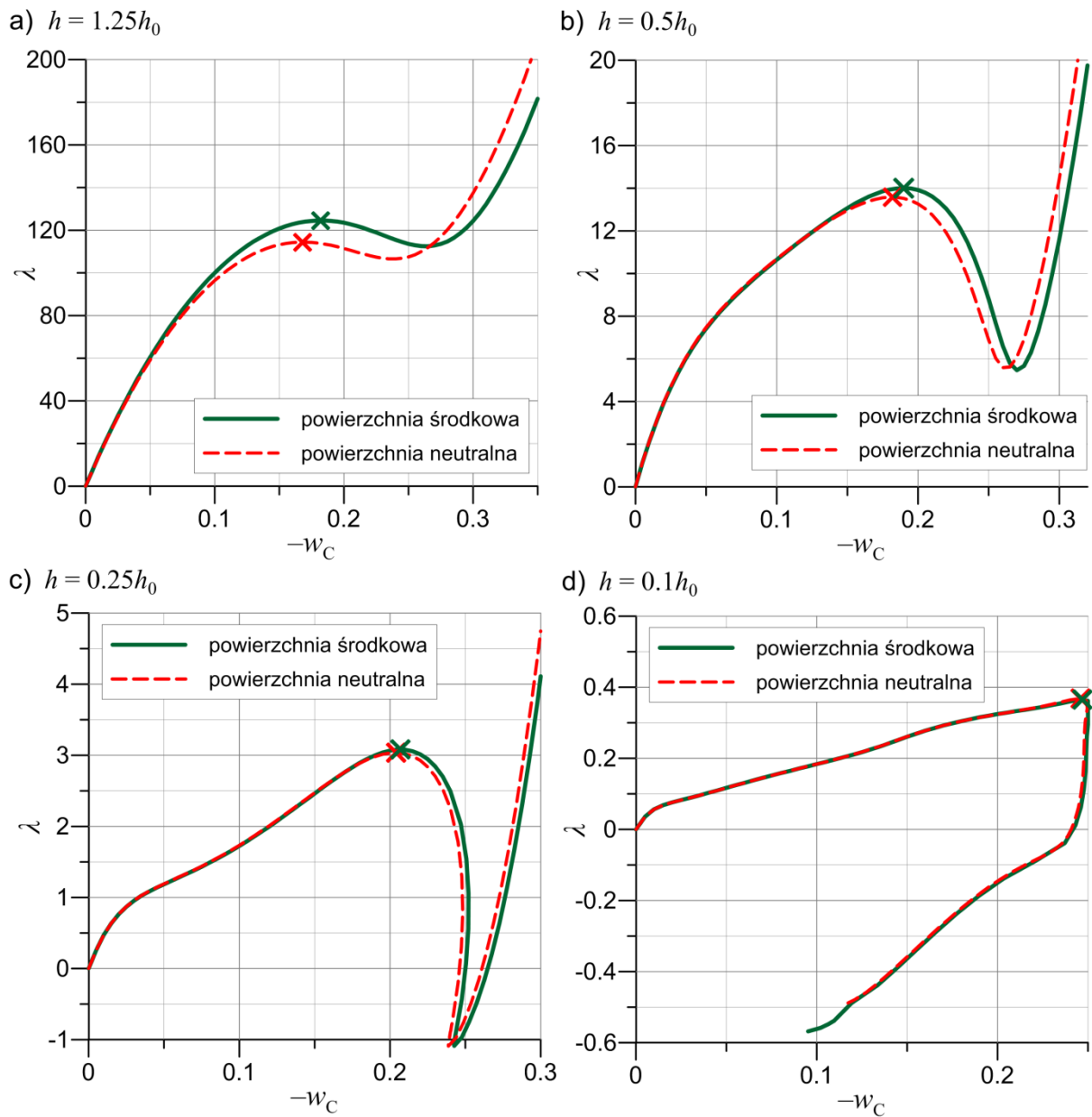
Rys. 7.11. Czasza oparta na rzucie kwadratu: porównanie nieliniowych ścieżek równowagi  $\lambda(w_C)$  wyznaczonych względem środkowej i neutralnej powierzchni odniesienia za pomocą elementu autorskiego MIX42 oraz elementów S4 i S8R w programie Abaqus,  $n = 2.0$ , dyskretyzacja  $24 \times 24$  ES



Rys. 7.12. Czasza oparta na rzucie kwadratu: wpływ wyboru powierzchni odniesienia na kształt zdeformowanej krawędzi w płaszczyźnie symetrii  $x = 0$  dla trzech wartości mnożnika obciążenia  $\lambda$

W przeciwieństwie do poprzednich przykładów w zadaniu tym zaobserwowano zauważalne różnice pomiędzy krzywymi wyznaczonymi względem środkowej i neutralnej powierzchni odniesienia. W związku z tym postanowiono zbadać jaki wpływ na te różnice ma przyjęta grubość czaszy. W tym

celu powtórzono analizy nieliniowe dla czterech następujących wariantów grubości powłoki  $h = \{1.25h_0, 0.5h_0, 0.25h_0, 0.1h_0\}$ . W ten sposób uzyskane ścieżki deformacji  $\lambda(w_C)$  w obliczeniach względem środkowej i neutralnej powierzchni odniesienia porównano na rys. 7.13. Na każdym wykresie za pomocą krzyżyka zaznaczono położenie punktu, w którym dochodzi do utraty stateczności konstrukcji. Podobnie jak dla oryginalnej grubości powłoki zaobserwowano rozchodzenie się ścieżek deformacji przed lokalnym maksimum. Wartości mnożnika krytycznego  $\lambda_k$  i odpowiadającego mu ugięcia  $w_C$  zestawiono dla wszystkich przeprowadzonych analiz w tab. 7.4. Dodatkowo dla każdego wariantu grubości czaszy obliczono różnicę w wartości mnożnika  $\Delta\lambda_k$  pomiędzy podejściem środkowej i neutralnej powierzchni. Na podstawie porównania krzywych zaprezentowanych na rys. 7.13 i wartości w tab. 7.4 zaobserwowano, że wraz ze zmniejszaniem grubości powłoki maleje różnica w wynikach uzyskanych względem neutralnej i środkowej powierzchni odniesienia. Ponadto, wartość różnicy  $\Delta\lambda_k$  jest proporcjonalna do grubości czaszy. Jedynie w wariantcie  $h = 0.1h_0$  uzyskano nieznacznie mniejszą wartość  $\lambda_k$  w analizie względem środkowej powierzchni odniesienia.



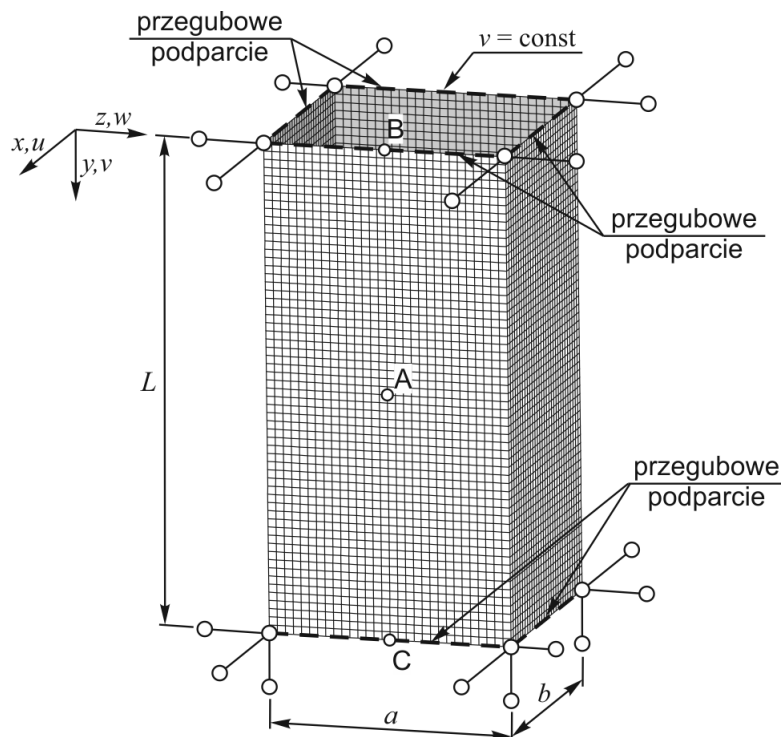
Rys. 7.13. Czasza oparta na rzucie kwadratu: porównanie nieliniowych ścieżek równowagi  $\lambda(w_C)$  wyznaczonych względem środkowej i neutralnej powierzchni odniesienia; obliczenia przeprowadzono dla różnych grubości powłoki: a)  $h = 1.25h_0$ , b)  $h = 0.5h_0$ , c)  $h = 0.25h_0$ , d)  $h = 0.1h_0$ ;  $n = 2.0$ ; podział  $24 \times 24$  ES

Tabela 7.4. Czasza oparta na rzucie kwadratu – wpływ grubości powłoki na różnicę  $\Delta\lambda_k$  między krytyczną wartością mnożnika  $\lambda_k$  wyznaczoną względem środkowej powierzchni odniesienia i wartością określoną w obliczeniach względem neutralnej powierzchni odniesienia,  $n = 2.0$

grubość powłoki	Powierzchnia środkowa		Powierzchnia neutralna		$\Delta\lambda_k$ [%]
	$-w_C$	$\lambda_k$	$-w_C$	$\lambda_k$	
$1.25h_0$	0.182	124.585	0.168	114.448	-8.14%
$h_0$	0.171	72.2351	0.158	67.8736	-6.04%
$0.5h_0$	0.190	14.0123	0.182	13.5834	-3.06%
$0.25h_0$	0.207	3.08126	0.204	3.03633	-1.46%
$0.1h_0$	0.247	0.36525	0.246	0.36820	0.81%

## 7.5. Stateczność słupa o przekroju skrzynkowym

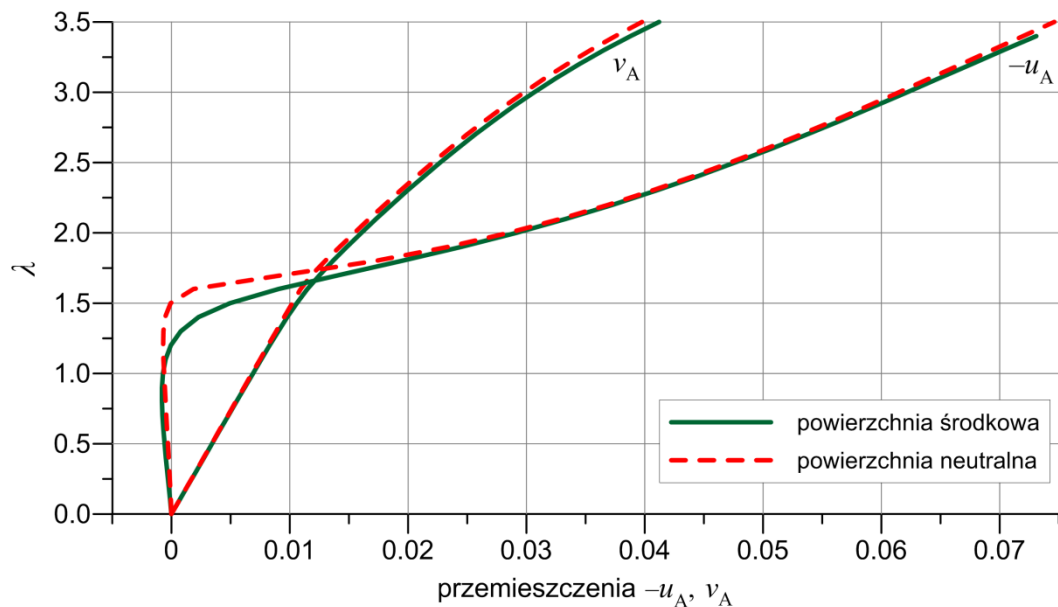
W ostatnim zadaniu analizuje się stateczność słupa o przekroju skrzynkowym. Przykład ten jest ważnym zadaniem testowym dla opracowanych równań konstytutywnych i elementu mieszanego, gdyż demonstruje zdolność teorii 6-parametrowej do analizy powłok wielopłatowych. Stateczność izotropowego, jednorodnego przekroju skrzynkowego analizowano m.in. w pracach [126, 237]. Analizy tego zadania w przypadku powłoki FGM, w której zmienność materiału wzdłuż grubości opisano za pomocą funkcji sigmoidalnej, podjęto się w pracy [143]. Tymczasem problem globalnej stateczności wspornika skrzynkowego FGM zbadano w pracy autora niniejszej rozprawy [92]. W rozprawie analizuje się wariant tego zadania pozwalający zbadać stateczność lokalną, zaproponowany w pracy [45]. Geometrię słupa o przekroju skrzynkowym i zastosowane warunki brzegowe pokazano na rys. 7.14. W obliczeniach przyjęto następujące wymiary geometryczne:  $a = 1.0$ ,  $b = 0.5$ ,  $L = 2.0$  oraz grubość powłoki  $h_0 = 0.05$ . Dolne i górne krawędzie przekroju skrzynkowego podparto przegubowo, blokując translacyjne stopnie swobody. Jedynie na górnych krawędziach zwolniono przesuw pionowy wzdłuż osi  $y$  (zob. rys. 7.14). W obliczeniach wymuszono taki sam przesuw  $v$  we wszystkich węzłach górnych krawędzi w celu ograniczenia lokalnej deformacji. Dla wypadkowego obciążenia  $P(\lambda) = \lambda P_{ref}$  przyjęto następującą wartość odniesienia  $P_{ref} = 10^6$ .



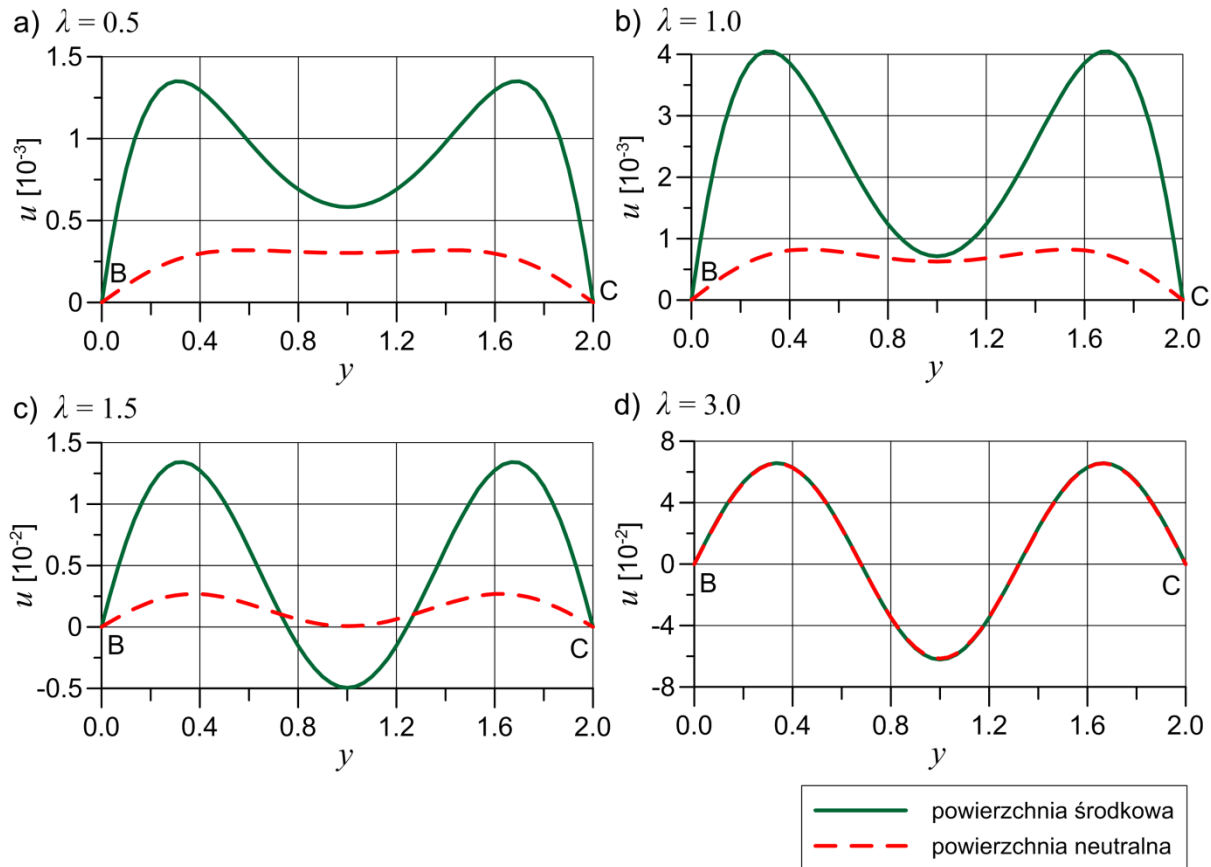
Rys. 7.14. Słup o przekroju skrzynkowym: geometria, warunki brzegowe, dyskretyzacja  $(30+15+30+15) \times 60$

W analizach przyjęto regularną siatkę  $(30+15+30+15) \times 60$  złożoną z kwadratowych elementów skończonych. Podział  $(30+15+30+15) \times 60$  oznacza, że zastosowano 30 elementów wzdłuż krawędzi o szerokości  $a$ , 15 elementów wzdłuż krawędzi o szerokości  $b$  oraz 60 elementów na wysokości słupa. W obliczeniach założono, że wewnętrzna powierzchnia przekroju skrzynekowego jest wykonana z metalu, a zewnętrzna powierzchnia z materiału ceramicznego.

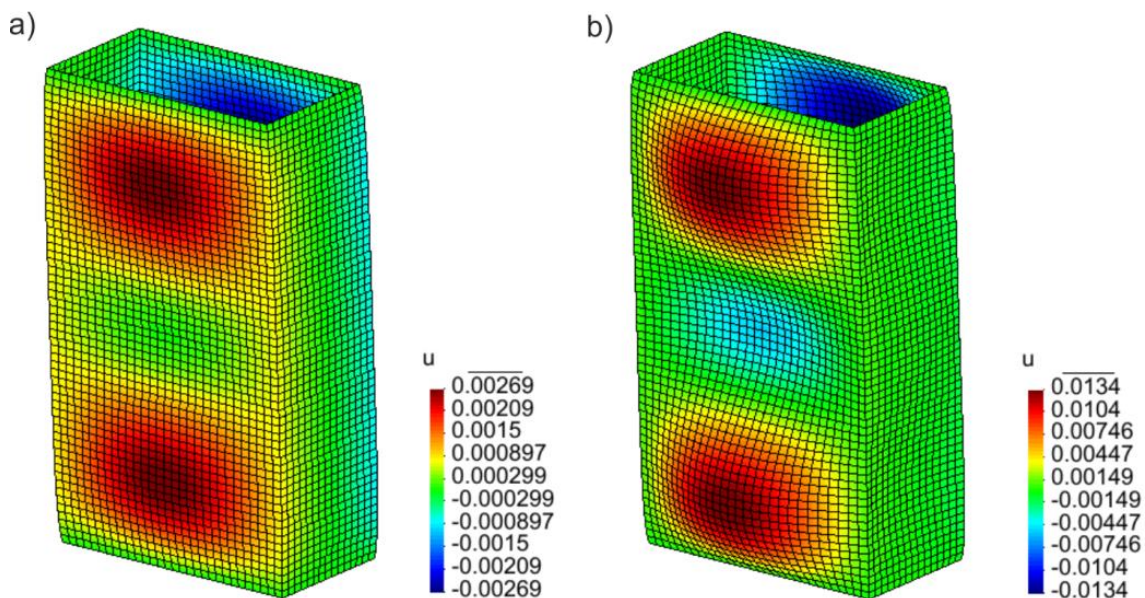
W zadaniu tym podobnie jak w poprzednim przykładzie skupiono się na porównaniu wyników uzyskanych w obliczeniach względem środkowej i neutralnej powierzchni odniesienia. Analizy nieliniowe przeprowadzono dla jednej wartości wykładnika  $n = 2.0$  i następujących wartości stałych ośrodka Cosseratów:  $N = \sqrt{2}/2$  i  $l = 0.01h_0$ . W obliczeniach zastosowano sterowanie obciążeniem do osiągnięcia końcowej wartości mnożnika  $\lambda = 3.5$ . Nieliniowe ścieżki deformacji dla translacji  $u_A$  i  $v_A$  w punkcie środkowym ściany A (zob. rys. 7.14) wyznaczone względem powierzchni środkowej i neutralnej porównano na rys. 7.15. Ze względu na zaobserwowane różnice między ścieżkami  $\lambda(-u_A)$  zbadano wpływ wyboru powierzchni odniesienia na deformację ściany słupa w przekroju pionowym między punktami B i C (zob. rys. 7.14). Krzywe otrzymane w obu podejściach porównano na rys. 7.16 dla czterech poziomów obciążenia. Wykresy na rys. 7.16 pokazują, że przed utratą stateczności deformacja z płaszczyzny ścianki słupa jest znacząco mniejsza w przypadku analizy względem powierzchni neutralnej. Różnicę tą można wytłumaczyć tym, że w podejściu powierzchni środkowej obciążenie jest przykładane mimośrodowo względem neutralnej powierzchni odniesienia, co powoduje wstępną lokalną deformację ścianek. W konsekwencji na rys. 7.15 zaobserwowano lokalną utratę stateczności dla mniejszej wartości mnożnika  $\lambda$  w przypadku analizy względem środkowej powierzchni odniesienia. Mapy przemieszczeń poziomych  $u$  zaprezentowane na rys. 7.17 dla wartości mnożnika  $\lambda = 1.5$  (zbliżonej do wartości krytycznej) potwierdzają, że deformacja ścianki słupa jest znacząco mniejsza w podejściu powierzchni neutralnej (zob. również rys. 7.16c). Tymczasem na rys. 7.16d zaobserwowano, że w końcowej fazie analizy nieliniowej, po lokalnej utracie stateczności, kształt zdeformowanej ścianki w obu podejściach jest taki sam. Jedynie porównanie ścieżek deformacji  $\lambda(v_A)$  na rys. 7.15 wskazuje na nieznacznie większą sztywność słupa o przekroju skrzynekowym w obliczeniach względem neutralnej powierzchni odniesienia.



Rys. 7.15. Słup o przekroju skrzynekowym: wpływ wyboru powierzchni odniesienia na nieliniowe ścieżki równowagi  $\lambda(v_A)$ ,  $\lambda(-u_A)$ ,  $n = 2.0$



Rys. 7.16. Słup o przekroju skrzyńkowym: porównanie deformacji ściany słupa w przekroju pionowym BC (zob. rys. 7.14) uzyskanej w obliczeniach względem neutralnej i środkowej powierzchni odniesienia dla czterech wartości mnożnika  $\lambda$ : a)  $\lambda = 0.5$ , b)  $\lambda = 1.0$ , c)  $\lambda = 1.5$ , d)  $\lambda = 3.0$ ;  $n = 2.0$



Rys. 7.17. Słup o przekroju skrzyńkowym: mapa przemieszczeń  $u$  wyznaczona dla mnożnika  $\lambda = 1.5$  w analizie względem: a) neutralnej powierzchni odniesienia, b) środkowej powierzchni odniesienia



## Rozdział 8

### PODSUMOWANIE PRACY I WNIOSKI

#### 8.1. Podsumowanie pracy

Głównym celem rozprawy było sformułowanie efektywnych 4-węzłowych hybrydowo-mieszanych elementów skończonych w ramach nieliniowej 6-parametrowej teorii powłok. Opracowane elementy powłokowe miały być w jak największym stopniu wolne od zjawiska blokady i charakteryzować się bardzo dobrą zbieżnością rozwiązań w zakresie nieliniowym. Drugim celem było sformułowanie oryginalnych równań konstytutywnych powłok o funkcyjnej zmienności materiału wzdłuż grubości w teorii ośrodka Cosseratów. Opracowane prawa konstytutywne i wybrany autorski element miały zostać zastosowane w analizie geometrycznie nieliniowej powłok FGM. Poniżej podsumowano przeprowadzone analizy numeryczne i kroki podjęte w celu zrealizowania założonych celów pracy.

##### **Rozdział drugi rozprawy:**

- opisano podstawowe kroki formułowania nieliniowej 6-parametrowej teorii powłok, w której szóstym stopniem swobody jest obrót prostopadły do powierzchni odniesienia powłoki (owinięcie);
- omówiono model kinematyczny powłoki, odpowiadający kinematyce powierzchni Cosseratów;
- zapisano naturalne niesymetryczne miary odkształceń oraz warunki nierozdzielności odkształceń w ramach nieliniowej 6-parametrowej teorii powłok.

##### **Rozdział trzeci rozprawy:**

- dokonano przeglądu zasad wariacyjnych i zaprezentowano relacje między tymi zasadami;
- zapisano zasadę przemieszczeń wirtualnych oraz zasadę wariacyjną Hu–Washizu potrzebną do sformułowania elementów mieszanych;
- autorsko zmodyfikowano zasadę wariacyjną Hu–Washizu w celu sformułowania na jej podstawie elementów częściowo mieszanych w ramach nieliniowej 6-parametrowej teorii powłok;
- dokonano linearyzacji wymienionych zasad wariacyjnych, wyznaczenie pierwszej i drugiej wariacji zmodyfikowanego funkcjonału Hu–Washizu stanowi oryginalny element pracy.

##### **Rozdział czwarty rozprawy:**

- zdefiniowano model powłoki FGM analizowany w rozprawie i omówiono metody określania efektywnych parametrów materiałowych w dowolnym punkcie na grubości powłoki;
- opisano sposób wyznaczania korekcyjnego współczynnika ścinania w przypadku powłok FGM;
- sformułowano oryginalne równania konstytutywne powłok FGM w teorii ośrodka Cosseratów, macierze konstytutywne wyznaczono analitycznie w wyniku całkowania po grubości PSN Cosseratów względem środkowej powierzchni odniesienia i neutralnej powierzchni odniesienia;
- porównano równania konstytutywne powłok FGM określone względem powierzchni środkowej z równaniami wyznaczonymi względem powierzchni neutralnej.

##### **Rozdział piąty rozprawy:**

- opisano skorygowane współrzędne naturalne i współrzędne skośne, wykorzystywane w interpolacji niezależnych uogólnionych naprężeń i niezależnych odkształceń;
- omówiono sposób implementacji dwustopniowej interpolacji odkształceń ścinania poprzecznego w ramach nieliniowej sześcioparametrowej teorii powłok;
- opisano zastosowany sposób interpolacji i oryginalne macierze interpolacyjne dla niesymetrycznych miar odkształceń i uogólnionych naprężeń, oryginalnym elementem pracy jest w szczególności uwzględnienie w ramach sformułowania hybrydowo-mieszanego składowych związanych z owinięciem i zaproponowanie dla nich dwóch wariantów interpolacji;
- sformułowano elementy mieszane i częściowo mieszane w ramach nieliniowej 6-parametrowej teorii powłok, opisano sposób kondensacji pól niezależnych odkształceń i uogólnionych naprężeń na poziomie elementu oraz zastosowaną metodę aktualizacji zmiennych;

- zaproponowano oryginalne 4-węzłowe elementy powłokowe: osiem elementów mieszanych i osiem elementów częściowo mieszanych.

#### Rozdział szósty rozprawy:

- sprawdzono czy zaproponowane elementy mieszane i częściowo mieszane spełniają test wartości własnych oraz test łąty;
- w liniowych testach dystorsji siatki oceniono wpływ wyboru macierzy interpolacyjnej dla drugiej części niezależnych odkształceń (wzboagaconych) na uzyskane wartości przemieszczeń;
- w zadaniach testowych o różnorodnej geometrii zbadano zgodność wyników wyznaczonych za pomocą autorskich elementów powłokowych z rozwiązaniami odniesienia;
- w zadaniach geometrycznie nieliniowych oceniono zbieżność rozwiązań w przypadku opracowanych elementów mieszanych i częściowo mieszanych na podstawie: wielkości maksymalnego przyrostu, całkowitej liczby iteracji równowagi oraz liczby iteracji w pierwszym przyroście;
- zbadano, które autorskie elementy powłokowe są w najmniejszym stopniu wrażliwe na efekt blokady i dają najlepsze wyniki w przypadku mniej gęstych podziałów;
- w przykładach, w których użyto dyskretyzacji złożonej z elementów o nieregularnym kształcie, porównano wyniki otrzymane w przypadku zastosowania skorygowanych współrzędnych naturalnych i współrzędnych skośnych w interpolacji niezależnych odkształceń i uogólnionych naprężeń;
- sprawdzono czy w deformacji powłoki nie występują formy pasożytnicze, zbadano wpływ wartości współczynnika owinięcia na tendencję do generowania form zeroenergetycznych;
- przeprowadzono analizę nieliniową dla przykładu powłoki wielopłatowej.

#### Rozdział siódmy rozprawy:

- wybrano typ elementu hybrydowo–mieszanego do analizy geometrycznie nieliniowej powłok o funkcyjnej zmienności materiału wzdłuż grubości;
- sprawdzono zgodność wyników analiz własnych z rozwiązaniami odniesienia;
- zbadano wpływ wykładnika w prawie potęgowym na nieliniowe ścieżki deformacji;
- przeprowadzono analizę wpływu stałych ośrodka Cosseratów na deformację powłoki FGM;
- porównano rozwiązania uzyskane za pomocą równań konstytutywnych wyznaczonych względem powierzchni środkowej z tymi otrzymanymi w przypadku użycia równań konstytutywnych sformułowanych względem neutralnej powierzchni odniesienia;

Efektom rozprawy jest rozszerzenie rodziny elementów powłokowych opracowanych w ramach nieliniowej sześcioparametrowej teorii powłok o efektywne 4-węzłowe elementy mieszane i częściowo mieszane sformułowane na podstawie trójpolowej zasady wariacyjnej Hu-Washizu. Elementy te oraz prawo konstytutywne zostały zaimplementowane do rozwijanego od wielu lat w zespole własnego systemu obliczeniowego MES. Umożliwia to pełną kontrolę nad uzyskiwanymi wynikami w przeciwieństwie do programów komercyjnych, w których użytkownik nie posiada pełnej wiedzy na temat zastosowanych metod i algorytmów oraz ma często bardzo ograniczoną możliwość ich edycji. Ponadto, zaimplementowanie elementów powłokowych w ramach autorskiego kodu stwarza możliwość jego dowolnej modyfikacji w przyszłości oraz użycia opracowanych elementów do różnych typów analiz. W rozprawie doktorskiej wybrany element MIX42 zastosowano do analizy powłok o funkcyjnej zmienności materiału wzdłuż grubości. W ten sposób rozszerzono zakres praw konstytutywnych określonych w ramach nieliniowej 6-parametrowej teorii powłok o równania konstytutywne powłok FGM.

## 8.2. Wnioski

W rozprawie udało się zrealizować założone cele. Za pomocą opracowanych powłokowych elementów hybrydowo–mieszanych uzyskano wyniki pozostające w bardzo dobrej zgodności z rozwiązaniami odniesienia, co potwierdza poprawność sformułowania elementów. W przeprowadzonych analizach liniowych oraz nieliniowych otrzymano wyniki lepsze lub takie same w porównaniu do elementu EANS4 – ostatniego 4-węzłowego elementu powłokowego sformułowanego w ramach teorii 6-parametrowej. Rozwiązania uzyskane za pomocą opracowanych elementów charakteryzują się w bardzo małym stopniu obarczone efektem blokady. Dodatkowo w przypadku większości zaproponowanych elementów możliwe jest zastosowanie dużych przyrostów parametru kontrolnego w analizach nieliniowych, a obliczenia wymagają znacznie mniejszej liczby iteracji równowagi.

Sformułowane w rozprawie elementy hybrydowo–mieszane spełniają test wartości własnych oraz test łąty. W liniowych testach dystorsji siatki zauważono, że wybór wariantu macierzy interpolacyjnej  $\mathbf{N}_k$  dla drugiej części niezależnych odkształceń ma niewielki wpływ na wyniki w stanie membranowym i bardzo mały wpływ na wyniki w stanie zgięciowym. W związku z tym do dalszych badań wybrano ubogą interpolację: macierz  $\mathbf{N}_4$  dla elementów z interpolacją określoną we współrzędnych skorygowanych i macierz  $\mathbf{N}_2$  dla elementów z interpolacją zdefiniowaną we współrzędnych skośnych.

W liniowych testach dystorsji siatki oraz w zadaniu z membraną Cooka dokładniejsze rozwiązania otrzymano w wyniku zastosowania współrzędnych skośnych w interpolacji niezależnych odkształceń i uogólnionych naprężeń. Jednak w przykładach o zakrzywionej geometrii: półsferyze z otworem oraz utwierdzonej powłoce walcowej z dystorsją siatki wyniki bliższe rozwiązaniu odniesienia uzyskano za pomocą elementów z interpolacją określoną we współrzędnych skorygowanych, w szczególności w przypadku ubogich dyskretyzacji. Na tej podstawie zaleca się stosowanie współrzędnych skośnych w przykładach o płaskiej geometrii oraz współrzędnych skorygowanych w zadaniach o przestrzennej geometrii. Natomiast rodzaj współrzędnych nie wpływa na wyniki w przykładach, w których zastosowano regularną siatkę złożoną z prostokątnych elementów skończonych.

W przeprowadzonych analizach zaobserwowano, że największy wpływ na wyniki ma przyjęty wariant interpolacji składowych membranowych. Zarówno w analizach liniowych oraz nieliniowych wartości bliższe rozwiązaniom odniesienia uzyskano za pomocą elementów z uboższą 6-parametrową interpolacją składowych membranowych (MIX40, MIX38, SMIX20 i SMIX12). W przykładach, w których znaczącą rolę odgrywało zginanie (np. wspornik płytowy w kształcie litery L, utwierdzona powłoka walcowa) nieznacznie lepszą zgodność wyników z rozwiązaniem odniesienia otrzymano w przypadku zastosowania elementów mieszanych niż w przypadku użycia elementów częściowo mieszanych. Porównanie rozwiązań uzyskanych za pomocą elementów częściowo mieszanych A i B o tym samym wariancie interpolacji składowych membranowych świadczy o tym, że uwzględnienie składowych ścinania poprzecznego w sformułowaniu hybrydowo–mieszanym nie ma praktycznie wpływu na wyniki. Wykonane analizy wskazują również na bardzo niewielki wpływ wariantu interpolacji składowych związanych z owinięciem na otrzymane rozwiązania. Podsumowując, wyniki najbliższe rozwiązaniom odniesienia uzyskano w przypadku elementów mieszanych MIX40 i MIX38. Natomiast wśród elementów częściowo mieszanych rozwiązania w największym stopniu wolne od zjawiska blokady otrzymano w przypadku elementów SMIX20 i SMIX12.

W zadaniach testowych w przypadku elementów częściowo mieszanych SMIX16 i SMIX24 uzyskano praktycznie takie same wyniki jak w obliczeniach za pomocą elementu EANS4. W wybranych przykładach dla tego samego podziału porównano rozwiązania własne z tymi uzyskanymi za pomocą 4-węzłowych elementów hybrydowo-mieszanych HW47 i HW29 [362]. W membranie Cooka oraz swobodnej półsferyze z otworem rozwiązania wyznaczone za pomocą elementów autorskich o uboższej interpolacji składowych membranowych są bardzo zbliżone do tych z pracy [362]. Tymczasem nieznacznie przesztynioną deformację względem tej wyznaczonej za pomocą elementów HW47 i HW29 otrzymano w przykładzie skróconej o  $90^\circ$  belki wspornikowej oraz przykładzie wspornika o przekroju ceowym. Jednak po dwukrotnym zagęszczeniu siatki ES uzyskano wyniki pozostające w bardzo dobrej zgodności z podstawowym rozwiązaniem odniesienia wyznaczonym za pomocą elementu CAME16.

Porównanie liczby iteracji w przypadku elementów częściowo mieszanych A i B (zob. tab. 6.28) pokazuje, że kluczowe znaczenie dla zbieżności rozwiązań uzyskanych za pomocą elementu hybrydowo–mieszanego ma uwzględnienie w interpolacji niezależnych odkształceń i uogólnionych naprężeń składowych ścinania poprzecznego. Z tego powodu tylko w przypadku elementów mieszanych oraz częściowo mieszanych B możliwe było zastosowanie bardzo dużych przyrostów, a obliczenia nieliniowe wymagały znacząco mniejszej liczby iteracji niż w przypadku elementów EANS4 i CAME16. Spośród opracowanych elementów najmniejszą całkowitą liczbę iteracji równowagi we wszystkich zadaniach nieliniowych (zob. tab. 6.28) uzyskano w przypadku elementów mieszanych MIX40 i MIX38 oraz elementu częściowo mieszanego SMIX20. Biorąc pod uwagę porównywalną całkowitą liczbę iteracji, najkrótszego czasu obliczeń należy się spodziewać w przypadku elementów częściowo mieszanych B ze względu na około dwa razy mniejszą liczbę niezależnych parametrów w porównaniu do elementów mieszanych. Poprawę zbieżności rozwiązań w porównaniu do tych uzyskanych za pomocą elementów sformułowanych wcześniej w ramach nieliniowej 6-parametrowej teorii powłok zaobserwowano szczególnie w przypadku bardzo wiotkich powłok: skróconej o  $90^\circ$  belki

wspornikowej oraz swobodnej półsfery z otworem. W tych zadaniach obliczenia nieliniowe wymagały również mniejszej liczby iteracji niż w przypadku elementów HW47 i HW29.

W przykładach: utwierdzonej powłoce walcowej oraz swobodnej półsfery z otworem zaobserwowano w przypadku elementów o uboższej interpolacji składowych membranowych większą tendencję do powstawania form pasożytniczych widocznych na obrotowych stopniach swobody niż w przypadku elementu EANS4 oraz elementów o bogatszej interpolacji składowych membranowych. Jednak dla przyjętej w analizach wartości współczynnika owinięcia  $\alpha_t = 0.7$  skłonność ta nie ma wpływu na deformację powłoki. Przeprowadzone analizy dla różnych wartości  $\alpha_t$  pokazały, że współczynnik owinięcia stabilizuje występowanie form pasożytniczych. W związku z tym dla bardzo małych wartości  $\alpha_t$  w przypadku elementów o uboższej interpolacji składowych membranowych może dojść do otrzymania nieliniowej ścieżki równowagi niezgodnej z rozwiązaniem odniesienia i pogorszenia zbieżności rozwiązania. Na tej podstawie w przypadku tych elementów zaleca się stosowanie wartości  $\alpha_t \geq 0.7$ . Biorąc pod uwagę związek (4.49) między wartościami  $l$  i  $\alpha_t$ , wynikający z przyrównania równań konstytutywnych powłok jednorodnych i powłok FGM, nie jest możliwe spełnienie warunku  $\alpha_t \geq 0.7$  bez ograniczenia zakresu wartości długości charakterystycznej. Z tego powodu do analiz powłok FGM wybrano element MIX42 o bogatszej interpolacji składowych membranowych, w przypadku którego nie zaobserwowano tendencji do powstawania form pasożytniczych i związanych z tym problemów.

W pracy zrealizowano również drugi cel rozprawy, którym było sformułowanie równań konstytutywnych powłok FGM w ośrodku Cosseratów i ich zastosowanie w analizie geometrycznie nieliniowej. Bardzo dobra zgodność wyników własnych z rozwiązaniami odniesienia z literatury i z programu Abaqus świadczy o poprawności zaimplementowanych równań. W analizowanych powłokach o funkcyjnej zmienności materiału wzdłuż grubości zaobserwowano wzrost sztywności wraz ze zmniejszeniem wykładnika w prawie potęgowym, ze względu na wzrost zawartości frakcji ceramicznej o większym module Younga. Nieliniowe ścieżki deformacji wyznaczone w przypadku powłok FGM mają podobny charakter do tych uzyskanych dla powłok jednorodnych. Przeprowadzona analiza parametryczna pokazuje, że stała  $N$  ośrodka Cosseratów ma bardzo ograniczony wpływ na wyniki. Natomiast w przypadku stałej  $l$ , podobnie jak w powłokach jednorodnych zaobserwowano, że przyjęcie długości charakterystycznej większej od grubości powłoki może powodować usztywnienie deformacji.

W zadaniach nieliniowych uzyskano bardzo zbliżone ścieżki deformacji w obliczeniach względem neutralnej i środkowej powierzchni odniesienia. Największe różnice między tymi podejściami zaobserwowano w momencie utraty stateczności. W przypadku przyjęcia środkowej powierzchni odniesienia obciążenie jest przykładane mimośrodowo względem osi obojętnej przekroju powłoki. Z tego powodu w ścisłym słupie o przekroju skrzynkowym zaobserwowano wcześniejszą utratę stateczności w przypadku zastosowania równań konstytutywnych określonych względem powierzchni środkowej. Jednak w zadaniu czaszy opartej na rzucie kwadratu mniejszą wartość siły krytycznej uzyskano w podejściu powierzchni neutralnej. Rozbieżność tą można tłumaczyć innym sposobem obciążenia konstrukcji w obu tych przykładach. W większości analizowanych przykładów nieznacznie większą sztywność powłoki FGM uzyskano w obliczeniach względem powierzchni neutralnej. Analiza parametryczna przeprowadzona w przykładzie czaszy opartej na rzucie kwadratu pokazuje, że różnica w wynikach między podejściem powierzchni środkowej i powierzchni neutralnej jest w przybliżeniu proporcjonalna do grubości powłoki. Zależność ta wynika z tego, że bezwzględna wartość przesunięcia powierzchni neutralnej względem powierzchni środkowej zależy od grubości powłoki, wykładnika w prawie potęgowym i stosunku modułu Younga ceramiki i metalu.

### 8.3. Kierunki dalszych badań

Opracowane elementy hybrydowo–mieszane zostały zaimplementowane w ramach autorskiego kodu, co stwarza możliwość jego dowolnej modyfikacji w przyszłości oraz zastosowania zaproponowanych elementów do różnych typów analiz. Autor niniejszej rozprawy jest jednym z wykonawców projektu badawczego pt. „Sformułowanie i numeryczna implementacja równań konstytutywnych opisujących deformacje nieodwracalne w ramach nieliniowej 6–parametrowej teorii powłok”, w którym jednym z tematów badawczych jest analiza powłok FGM w zakresie sprężysto–plastycznym. Wstępne wyniki przeprowadzonych badań zaprezentowano w pracach [42–44]. Jednak w niniejszej rozprawie ograniczono się do prezentacji wyników analiz powłok FGM w zakresie geometrycznie nieliniowym,

gdyż prace nad analizą sprężysto–plastyczną powłok FGM są wciąż prowadzone i będą kontynuowane w najbliższej przyszłości. W nieco dłuższym horyzoncie planuje się zastosowanie równań sprężysto–plastycznych ze zniszczeniem do opisu kruchego zachowania materiału ceramicznego. W tym celu planowane jest rozwinięcie sprężonego modelu plastyczności ze zniszczeniem w ośrodku Cosseratów z pracy [3]. Pozwoliłoby to na bardziej wiarygodne wyznaczenie nośności płyt i powłok o funkcyjnej zmienności materiału wzdłuż grubości.

W pracy [349] pokazano, że elementy hybrydowo–mieszane sformułowane na podstawie trójpołowej zasady Hu-Washizu charakteryzują się bardzo dobrą zbieżnością również w analizach sprężysto–plastycznych. Z tego powodu planuje się zastosowanie opracowanych w rozprawie elementów do analizy powłok FGM oraz powłok jednorodnych również w zakresie plastycznym. W ramach niniejszej rozprawy badano zbieżność rozwiązań na podstawie wielkości maksymalnego przyrostu oraz całkowitej liczby iteracji równowagi. W celu pełniejszej oceny efektywności obliczeniowej opracowanych elementów hybrydowo–mieszanych planuje się w toku dalszych badań porównać czas obliczeń dla poszczególnych elementów. Pozwoli to zbadać wpływ liczby parametrów dla niezależnych odkształceń i uogólnionych naprężeń na całkowity czas obliczeń. Przed wykonaniem tych badań autor niniejszej rozprawy zamierza część macierzy elementowych wyznaczyć analitycznie. Dodatkowo w celu zwiększenia efektywności obliczeniowej kod autorski zostanie zoptymalizowany, a w obliczeniach zostaną użyte efektywne solwery opisane m.in. w pracy [40].

W rozdziale siódmym rozprawy ze względu na formy pasożytnicze pojawiające się na obrotych stopniach swobody niemożliwe było zastosowanie elementów hybrydowo–mieszanych o uboższej interpolacji składowych membranowych dla małych wartości długości charakterystycznej. W dalszych badaniach planuje się opracowanie efektywnej metody stabilizacji tych form pasożytniczych, która pozwoli zastosować te elementy skończone w analizie powłok opisanych równaniami konstytutywnymi określonymi w ośrodku Cosseratów. W ramach tych badań zostaną sprawdzone również inne warianty interpolacji pól niezależnych odkształceń i uogólnionych naprężeń. W szczególności jest planowane uwzględnienie w nowych wariantach interpolacji zależności zaobserwowanej w pracy [265] między składowymi membranowymi i składowymi związanymi z owinięciem.



## Rozdział 9

### BIBLIOGRAFIA

- [1] *Abaqus 6.14-2 User Manual*: Providence, RI, USA: Dassault Systemes Simulia Corp., 2014.
- [2] ABRATE S.: *Functionally graded plates behave like homogeneous plates*. Composites Part B: Engineering, T. 39, nr 1, s. 151–158, 2008.
- [3] ADDESSI D.: *A 2D Cosserat finite element based on a damage-plastic model for brittle materials*. Computers and Structures, T. 135, s. 20–31, 2014.
- [4] ADDESSI D., i SACCO E.: *Enriched plane state formulation for nonlinear homogenization of in-plane masonry wall*. Meccanica, T. 51, nr 11, s. 2891–2907, 2016.
- [5] ALINIA M. M., i GHANNADPOUR S. A. M.: *Nonlinear analysis of pressure loaded FGM plates*. Composite Structures, T. 88, nr 3, s. 354–359, 2009.
- [6] ALTENBACH H., i EREMEYEV V. A.: *On the linear theory of micropolar plates*. ZAMM Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, T. 89, nr 4, s. 242–256, 2009.
- [7] ALTENBACH J., ALTENBACH H., i EREMEYEV V. A.: *On generalized Cosserat-type theories of plates and shells: A short review and bibliography*. Archive of Applied Mechanics, T. 80, nr 1, s. 73–92, 2010.
- [8] AMBROZIAK A.: *Locking effects in the finite element method*, Shell Structures: Theory and Applications, Vol. 3, (red.: Pietraszkiewicz W., i Górski J.) London: Taylor & Francis Group, s. 369–372, 2014.
- [9] AMIRPOUR M., DAS R., i SAAVEDRA FLORES E. I.: *Analytical solutions for elastic deformation of functionally graded thick plates with in-plane stiffness variation using higher order shear deformation theory*. Composites Part B: Engineering, T. 94, s. 109–121, 2016.
- [10] ANDELFINGER U., i RAMM E.: *EAS-elements for two-dimensional, three-dimensional, plate and shell structures and their equivalent to HR-elements*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, T. 36, nr 8, s. 1311–1337, 1993.
- [11] ARCINIEGA R. A., i REDDY J. N.: *Large deformation analysis of functionally graded shells*. International Journal of Solids and Structures, T. 44, nr 6, s. 2036–2052, 2007.
- [12] ARCINIEGA R. A., i REDDY J. N.: *Tensor-based finite element formulation for geometrically nonlinear analysis of shell structures*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, T. 196, nr 4–6, s. 1048–1073, 2007.
- [13] ARGYRIS J. H., BALMER H., DOLTSINIS J. S., DUNNE P. C., HAASE M., KLEIBER M., MALEJANNAKIS G. A., MLEJNEK H.-P., MÜLLER M., i SCHARPF D. W.: *Finite element method - The natural approach*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, T. 17/18, s. 1–106, 1979.
- [14] ARGYRIS J. H., DUNNE P. C., i SCHARPF D. W.: *On large displacement-small strain analysis of structures with rotational degrees of freedom*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, T. 14, nr 3, s. 401–451, 1978.
- [15] ARMERO F.: *On the locking and stability of finite elements in finite deformation plane strain problems*. Computers and Structures, T. 75, nr 3, s. 261–290, 2000.
- [16] ATLURI S. N., i MURAKAWA H.: *On hybrid finite element models in nonlinear solid mechanics*, Finite elements in nonlinear mechanics, (red.: Bergan P. G.) Norway: Tapir Press, s. 25–69, 1977.
- [17] ATLURI S. N., i PIAN T. H. H.: *Theoretical Formulation of Finite-Element Methods in Linear-Elastic Analysis of General Shells*. Journal of Structural Mechanics, T. 1, nr 1, s. 1–41, 1972.
- [18] BADUR J.: *Nieliniowa analiza powłok sprężystych według teorii drugiego przybliżenia do energii odształcenia. Rozprawa doktorska*, Instytuty Maszyn Przepływowych PAN, 1984.
- [19] BADUR J.: *Rozwój pojęcia energii*. Gdańsk: Instytut Maszyn Przepływowych PAN, 2009.
- [20] BAŞAR Y., DING Y., i SCHULTZ R.: *Refined shear-deformation models for composite laminates with finite rotations*. International Journal of Solids and Structures, T. 30, nr 19, s. 2611–2638, 1993.
- [21] BATHE K.-J.: *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1982.
- [22] BATHE K.-J., i DVORKIN E. N.: *A formulation of general shell elements—the use of mixed interpolation of tensorial components*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, T. 22, nr 3, s. 697–722, 1986.
- [23] BATHE K.-J., i DVORKIN E. N.: *A Four-node Plate Bending Element Based on Mindlin/ Reissner Plate Theory and a Mixed Interpolation.pdf*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, T. 21, s. 367–383, 1985.
- [24] BATHE K. J., LEE P. S., i HILLER J. F.: *Towards improving the MITC9 shell element*. Computers and Structures, T. 81, nr 8–11, s. 477–489, 2003.

- [25] BELABED Z., AHMED HOUARI M. S., TOUNSI A., MAHMOUD S. R., i ANWAR BÉG O.: *An efficient and simple higher order shear and normal deformation theory for functionally graded material (FGM) plates*. Composites Part B: Engineering, T. 60, s. 274–283, 2014.
- [26] BELYTSCHKO T., LIU N.-W., i MORAN B.: *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. John Wiley & Sons, Ltd., 2003.
- [27] BELYTSCHKO T., STOLARSKI H., i CARPENTER N.: *AC0 triangular plate element with one-point quadrature*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, T. 20, nr 5, s. 787–802, 1984.
- [28] BETSCH P., GRUTTMANN F., i STEIN E.: *A 4-node finite shell element for the implementation of general hyperelastic 3D-elasticity at finite strains*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, T. 130, nr 1–2, s. 57–79, 1996.
- [29] BETSCH P., MENZEL A., i STEIN E.: *On the parametrization of finite rotations in computational mechanics*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, T. 155, nr 3–4, s. 273–305, 1998.
- [30] BEVERIDGE A. J., WHEEL M. A., i NASH D. H.: *The micropolar elastic behaviour of model macroscopically heterogeneous materials*. International Journal of Solids and Structures, T. 50, nr 1, s. 246–255, 2013.
- [31] BIOT M. A.: *Rheological stability with couple stresses and its application to geological folding*. Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, T. 298, s. 402–423, 1967.
- [32] BISCHOFF M., i RAMM E.: *Shear deformable shell elements for large strains and rotations*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, T. 40, s. 4427–4449, 1997.
- [33] BISCHOFF M., RAMM E., i BRAESS D.: *A class of equivalent enhanced assumed strain and hybrid stress finite elements*. Computational Mechanics, T. 22, nr 6, s. 443–449, 1999.
- [34] BOBIŃSKI J.: *Implementacja i przykłady zastosowań nieliniowych modeli betonu z nielokalnym osłabieniem*. Praca doktorska, Politechnika Gdańska, 2006.
- [35] DE BORST R.: *A generalisation of J2 - flow theory for polar continua*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, T. 103, nr 3, s. 347–362, 1993.
- [36] DE BORST R.: *Simulation of strain localization: a reappraisal of the Cosserat continuum*. Engineering Computations, T. 8, s. 317–332, 1991.
- [37] BOUTAGOUGA D.: *A new enhanced assumed strain quadrilateral membrane element with drilling degree of freedom and modified shape functions*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, T. 110, nr 6, s. 573–600, 2017.
- [38] BRAESS D.: *Finite elements. Theory, fast solvers, and applications in solid mechanics. Third edition*. Cambridge University Press, 2007.
- [39] DE BUHAN P., FREARD J., GARNIER D., i MAGHOUS S.: *Failure properties of fractured rock masses as anisotropic homogenized media*. Journal of Engineering Mechanics, T. 128, nr 8, s. 869–875, 2002.
- [40] BURZYŃSKI S.: *Plastyczność w 6-parametrowej nieliniowej teorii powłok, efektywność obliczeń MES*. Praca doktorska, Politechnika Gdańska, 2014.
- [41] BURZYŃSKI S., CHRÓŚCIELEWSKI J., i WITKOWSKI W.: *Elastoplastic law of Cosserat type in shell theory with drilling rotation*. Mathematics and Mechanics of Solids, T. 20, nr 7, s. 790–805, 2015.
- [42] BURZYŃSKI S., CHRÓŚCIELEWSKI J., DASZKIEWICZ K., PIETRASZKIEWICZ W., SABIK A., SOBCZYK B., i WITKOWSKI W.: *On constitutive relations in the resultant non-linear theory of shells, STATICS, DYNAMICS AND STABILITY OF STRUCTURES*. Selected Problems of Solid Mechanics., (red.: Kołakowski Z., i Mania R. J.) T. 5, LODZ: LODZ UNIVERSITY OF TECHNOLOGY, s. 298–318, 2016.
- [43] BURZYŃSKI S., CHRÓŚCIELEWSKI J., DASZKIEWICZ K., i WITKOWSKI W.: *Elastoplastic analysis of axially loaded FGM box section column*, [w:] Proceedings of 14th International Symposium Functionally Graded Materials Multiscale & Multifunctional Structures, s. 77, 2016.
- [44] BURZYŃSKI S., CHRÓŚCIELEWSKI J., DASZKIEWICZ K., i WITKOWSKI W.: *Elastoplastic analysis of functionally graded shells in nonlinear 6 parameter shell theory*, [w:] Proceedings of 40th Solid Mechanics Conference, s. 1–2, 2016.
- [45] BURZYŃSKI S., CHRÓŚCIELEWSKI J., DASZKIEWICZ K., i WITKOWSKI W.: *Geometrically nonlinear FEM analysis of FGM shells based on neutral physical surface approach in 6-parameter shell theory*. Composites Part B: Engineering, T. 107, s. 203–213, 2016.
- [46] BURZYŃSKI S., CHRÓŚCIELEWSKI J., i WITKOWSKI W.: *Elastoplastic material law in 6-parameter nonlinear shell theory*, 10th Jubilee Conference on Shell Structures - Theory and Applications (SSTA), (red.: Pietraszkiewicz W., i Górski J.) London: CRC Press, s. 377–380, 2014.
- [47] BURZYŃSKI S., CHRÓŚCIELEWSKI J., i WITKOWSKI W.: *Geometrically nonlinear FEM analysis of 6-parameter resultant shell theory based on 2-D Cosserat constitutive model*. ZAMM - Journal of Applied



- Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, T. 96, nr 2, s. 191–204, 2016.
- [48] CARDOSO R. P. R., YOON J. W., i VALENTE R. A. F.: *Enhanced one-point quadrature shell element for nonlinear applications*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, T. 69, s. 627–663, 2007.
- [49] CAZZANI A., i ATLURI S. N.: *Four-noded mixed finite elements, using unsymmetric stresses, for linear analysis of membranes*. Computational Mechanics, T. 11, nr 4, s. 229–251, 1993.
- [50] CAZZANI A., GARUSI E., TRALLI A., i ATLURI S. N.: *A four-node hybrid assumed-strain finite element for laminated composite plates*. Computers, Materials and Continua, T. 2, nr 1, s. 23–38, 2005.
- [51] CAZZANI A., RIZZI N. L., STOCHINO F., i TURCO E.: *Modal analysis of laminates by a mixed assumed-strain finite element model*. Mathematics and Mechanics of Solids, s. 1–10, 2016.
- [52] CEN S., i SHANG Y.: *Developments of Mindlin-Reissner plate elements*. Mathematical Problems in Engineering, T. 2015, nr ID 456740, s. 1–12, 2015.
- [53] CEN S., SHANG Y., LI C.-F., i LI H.-G.: *Hybrid displacement function element method: a simple hybrid-Trefftz stress element method for analysis of Mindlin-Reissner plate*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, T. 98, nr 3, s. 203–234, 2014.
- [54] CEN S., ZHOU M. J., i FU X. R.: *A 4-node hybrid stress-function (HS-F) plane element with drilling degrees of freedom less sensitive to severe mesh distortions*. Computers and Structures, T. 89, nr 5–6, s. 517–528, 2011.
- [55] CERROLAZA M., SULEM J., i ELBIED A.: *A Cosserat non-linear finite element analysis software for blocky structures*. Advances in Engineering Software, T. 30, nr 1, s. 69–83, 1999.
- [56] DE CÉSAR SÁ J. M. A., NATAL JORGE R. M., FONTES VALENTE R. A., i ALMEIDA AREIAS P. M.: *Development of shear locking-free shell elements using an enhanced assumed strain formulation*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, T. 53, nr 7, s. 1721–1750, 2002.
- [57] CHEN W., i CHEUNG Y. K.: *Three-dimensional 8-node and 20-node refined hybrid isoparametric elements*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, T. 35, nr 9, s. 1871–1889, 1992.
- [58] CHI S.-H., i CHUNG Y.-L.: *Mechanical behavior of functionally graded material plates under transverse load-Part I: Analysis*. International Journal of Solids and Structures, T. 43, nr 13, s. 3657–3674, 2006.
- [59] CHI S.-H., i CHUNG Y.-L.: *Mechanical behavior of functionally graded material plates under transverse load-Part II: Numerical results*. International Journal of Solids and Structures, T. 43, nr 13, s. 3675–3691, 2006.
- [60] CHRAPOŃSKI J., SZALA J., MALIŃSKI M., i CWAJNA J.: *Metodyka generowania trójwymiarowych, modelowych struktur funkcjonalnych materiałów gradientowych*. Inżynieria Materiałowa, T. 27, nr 3, s. 572–575, 2006.
- [61] CHRÓSCIELEWSKI J., i WITKOWSKI W.: *On some constitutive equations for micropolar plates*. ZAMM Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, T. 90, nr 1, s. 53–64, 2010.
- [62] CHRÓSCIELEWSKI J.: *Rodzina elementów skończonych klasy C0 w nieliniowej sześcioparametrowej teorii powłok*. Gdańsk: Zeszyty Naukowe Politechniki Gdańskiej Nr 540, Budownictwo Lądowe nr LIII, 1996.
- [63] CHRÓSCIELEWSKI J., DASZKIEWICZ K., i WITKOWSKI W.: *Equivalent 4-node Enhanced Assumed Strain and hybrid stress shell elements in 6-parameter theory*, Shell Structures: Theory and Applications, Vol. 3, (red.: Pietraszkiewicz W., i Górski J.) London: Taylor & Francis, s. 385–388, 2014.
- [64] CHRÓSCIELEWSKI J., KREJA I., SABIK A., i WITKOWSKI W.: *Modeling of Composite Shells in 6-Parameter Nonlinear Theory with Drilling Degree of Freedom*. Mechanics of Advanced Materials and Structures, T. 18, nr 6, s. 403–419, 2011.
- [65] CHRÓSCIELEWSKI J., LUBOWIECKA I., SZYMCZAK C., i WITKOWSKI W.: *On some aspects of torsional buckling of thin-walled I-beam columns*. Computers & Structures, T. 84, nr 29–30, s. 1946–1957, 2006.
- [66] CHRÓSCIELEWSKI J., MAKOWSKI J., i PIETRASZKIEWICZ W.: *Non-linear dynamics of flexible shell structures*. Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences, T. 9, s. 341–357, 2002.
- [67] CHRÓSCIELEWSKI J., MAKOWSKI J., i PIETRASZKIEWICZ W.: *Statyka i Dynamika Powłok Wielopłatowych. Nieliniowa teoria i metoda elementów skończonych*. Warszawa: Wydawnictwo IPPT PAN, 2004.
- [68] CHRÓSCIELEWSKI J., MAKOWSKI J., i SMOLEŃSKI W. M.: *On the interpolation in the SO(3) group*, [w:] Proc. XI Polish Conf. on Computer Methods in Mechanics, Vol. I, s. 187–194, 1993.
- [69] CHRÓSCIELEWSKI J., MAKOWSKI J., i STUMPF H.: *Finite element analysis of smooth, folded and multi-shell structures*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, T. 141, nr 1–2, s. 1–46, 1997.

- [70] CHRÓŚCIELEWSKI J., MAKOWSKI J., i STUMPF H.: *Genuinely resultant shell finite elements accounting for geometric and material non-linearity*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, T. 35, nr 1, s. 63–94, 1992.
- [71] CHRÓŚCIELEWSKI J., i NOLTE L. P.: *Strategien zur Loesung nichtlinearer Probleme der Strukturmechanik und ihre modulare Aufbereitung im Konzept MESY*. Mitt. Institut für Mechanik, Nr. 48, Ruhr-Universität, Bochum, 1985.
- [72] CHRÓŚCIELEWSKI J., PIETRASZKIEWICZ W., i WITKOWSKI W.: *On shear correction factors in the non-linear theory of elastic shells*. International Journal of Solids and Structures, T. 47, nr 25–26, s. 3537–3545, 2010.
- [73] CHRÓŚCIELEWSKI J., SABIK A., SOBCZYK B., i WITKOWSKI W.: *Nonlinear FEM 2D failure onset prediction of composite shells based on 6-parameter shell theory*. Thin-Walled Structures, T. 105, s. 207–219, 2016.
- [74] CHRÓŚCIELEWSKI J., i SCHMIDT R.: *A solution control method for nonlinear finite element post-buckling analysis of structures*, [w:] Proc. EUROMECH Colloquium 200, s. 19–33, 1985.
- [75] CHRÓŚCIELEWSKI J., i WITKOWSKI W.: *Discrepancies of energy values in dynamics of three intersecting plates*. International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering, T. 26, nr 9, s. 1188–1202, 2010.
- [76] CHRÓŚCIELEWSKI J., i WITKOWSKI W.: *FEM analysis of Cosserat plates and shells based on some constitutive relations*. ZAMM Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, T. 91, nr 5, s. 400–412, 2011.
- [77] CHRÓŚCIELEWSKI J., i WITKOWSKI W.: *Four-node semi-EAS element in six-field nonlinear theory of shells*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, T. 68, nr 11, s. 1137–1179, 2006.
- [78] CHRÓŚCIELEWSKI J., i WITKOWSKI W.: *On some constitutive equations for micropolar plates*. ZAMM Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, T. 90, nr 1, s. 53–64, 2010.
- [79] COLEMAN B. D., i NOLL W.: *An approximation theorem for functionals, with applications in continuum mechanics*. Archive for Rational Mechanics and Analysis, T. 6, nr 1, s. 355–370, 1960.
- [80] COLEMAN B. D., i NOLL W.: *The thermodynamics of elastic materials with heat conduction and viscosity*. Archive for Rational Mechanics and Analysis, T. 13, nr 1, s. 167–178, 1963.
- [81] COOK R. D.: *Improved Two-Dimensional Finite Element*. Journal of the Structural Division, T. 100, nr 9, s. 1851–1863, 1974.
- [82] COSSERAT E., i COSSERAT F.: *Theorie des Corps Deformables*. Paris: Hermann et Fils, 1909.
- [83] COURANT R.: *Variational Methods for the Solution of Problems of Equilibrium and Vibrations*. Bulletin of the American Mathematical Society, T. 49, s. 1–23, 1943.
- [84] COWIN S. C.: *An incorrect inequality in micropolar elasticity theory*. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP, T. 21, nr 3, s. 494–497, 1970.
- [85] COWIN S. C.: *Stress functions for cosserat elasticity*. International Journal of Solids and Structures, T. 6, nr 4, s. 389–398, 1970.
- [86] COWPER G. R.: *The shear coefficient in Timoshenko's beam*. Journal of Applied Mechanics, T. 33, nr 4, s. 335–340, 1966.
- [87] CRISFIELD M. A., i PENG X.: *Instabilities induced by coarse meshes for a nonlinear shell problem*. Engineering Computations, T. 13, nr 6, s. 110–114, 1996.
- [88] DAI C., MÜHLHAUS H., MEEK J., i FAMA M. D.: *Modelling of Blocky Rock Masses Using the Cosserat Method*. International Journal of Rock Mechanics and Mining Science & Geomechanics Abstracts, T. 33, nr 4, s. 425–432, 1996.
- [89] DAI J. S.: *An historical review of the theoretical development of rigid body displacements from Rodrigues parameters to the finite twist*. Mechanism and Machine Theory, T. 41, nr 1, s. 41–52, 2006.
- [90] DASZKIEWICZ K.: *Analiza nieliniowa powłok z materiałów gradientowych w ośrodku mikropolarnym*, Wiedza i Eksperymenty w Budownictwie. Prace naukowe doktorantów, (red.: Bzówka J.) Gliwice: Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, s. 765–772, 2014.
- [91] DASZKIEWICZ K., CHRÓŚCIELEWSKI J., i WITKOWSKI W.: *Geometrically Nonlinear Analysis of Functionally Graded Shells Based on 2-D Cosserat Constitutive Model*. Engineering Transactions, T. 62, nr 2, s. 109–130, 2014.
- [92] DASZKIEWICZ K., CHRÓŚCIELEWSKI J., i WITKOWSKI W.: *Global postbuckling analysis of functionally graded box section cantilever*, [w:] PCM-CMM-2015 - 3rd Polish Congress of Mechanics & 21st Computer Methods in Mechanics Vol. 2, s. 881–882, 2015.
- [93] DASZKIEWICZ K., CHRÓŚCIELEWSKI J., i WITKOWSKI W.: *Wpływ parametrów materiałowych ośrodka mikropolarnego na geometrycznie nieliniową analizę MES powłok z materiałów o funkcyjnej gradacji właściwości*, [w:] XIII Konferencja Naukowo-Techniczna: TECHNIKI KOMPUTEROWE W

- INŻYNIERII, s. 45–46, 2014.
- [94] DODWELL T. J.: *Internal buckling instabilities in layered media*. Philosophical Magazine, T. 95, nr 28–30, s. 3225–3243, 2015.
- [95] DUNG D. Van, i HOA L. K.: *Nonlinear buckling and post-buckling analysis of eccentrically stiffened functionally graded circular cylindrical shells under external pressure*. Thin-Walled Structures, T. 63, s. 117–124, 2013.
- [96] DUNG D. Van, HOAI B. T. T., i HOA L. K.: *Postbuckling nonlinear analysis of FGM truncated conical shells reinforced by orthogonal stiffeners resting on elastic foundations*. Acta Mechanica, T. 228, nr 4, s. 1457–1479, 2017.
- [97] DVORKIN E. N., i BATHE K.-J.: *A continuum mechanics based four-node shell element for general nonlinear analysis*. Engineering Computations, T. 1, nr 1, s. 77–88, 1984.
- [98] EBERLEIN R., i WRIGGERS P.: *Finite element concepts for finite elastoplastic strains and isotropic stress response in shells: theoretical and computational analysis*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, T. 171, nr 3–4, s. 243–279, 1999.
- [99] EBRAHIMI F., SEPIANI H. A., i ARANI A. G.: *Progress in Analysis of Functionally Graded Structures, Mechanical engineering theory and applications*. New York: Nova Science Publishers, 2011.
- [100] ELLIS R., i SMITH C.: *A thin-plate analysis and experimental evaluation of couple-stress effects*. Experimental Mechanics, T. 7, nr 9, s. 372–380, 1967.
- [101] ERASLAN A. N., i AKIS T.: *Plane strain analytical solutions for a functionally graded elastic-plastic pressurized tube*. International Journal of Pressure Vessels and Piping, T. 83, nr 9, s. 635–644, 2006.
- [102] EREMEYEV V. A., i ALTENBACH H.: *On the Direct Approach in the Theory of Second Gradient Plates*, Shell and Membrane Theories in Mechanics and Biology, Springer, s. 147–154, 2015.
- [103] EREMEYEV V. a., LEBEDEV L. P., i ALTENBACH H.: *Foundations of Micropolar Mechanics*. Springer, 2013.
- [104] EREMEYEV V. A., i PIETRASZKIEWICZ W.: *Local symmetry group in the general theory of elastic shells*. Journal of Elasticity, T. 85, nr 2, s. 125–152, 2006.
- [105] ERICKSEN J. L., i TRUESDELL C.: *Exact theory of stress and strain in rods and shells*. Archive for Rational Mechanics and Analysis, T. 1, nr 1, s. 295–323, 1958.
- [106] ERINGEN A. C.: *Linear theory of micropolar elasticity*. Journal of Mathematics and Mechanics, T. 15, s. 909–923, 1966.
- [107] ERINGEN A. C.: *Microcontinuum Field Theories. I. Foundations and Solids*. New York: Springer-Verlag, 1999.
- [108] ERINGEN A. C.: *Theory of micropolar elasticity, Fracture*. An advanced treatise, (red.: Leibowitz H.) Academic Press, s. 622–729, 1968.
- [109] ERINGEN A. C., i SUHUBI E. S.: *Nonlinear theory of simple micro-elastic solids—I*. International Journal of Engineering Science, T. 2, nr 2, s. 189–203, 1964.
- [110] EULER L.: *Formulae generales pro translatione quacunque corporum rigidorum (General formulas for the translation of arbitrary rigid bodies)*. Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, T. 20, s. 189–207, 1776.
- [111] FATEMI J., VAN KEULEN F., i ONCK P. R.: *Generalized Continuum Theories: Application to Stress Analysis in Bone*. Meccanica, T. 37, nr 4–5, s. 385–396, 2002.
- [112] FAZZOLARI F. A.: *Reissner's Mixed Variational Theorem and variable kinematics in the modelling of laminated composite and FGM doubly-curved shells*. Composites Part B: Engineering, T. 89, s. 408–423, 2016.
- [113] FAZZOLARI F. A.: *Stability analysis of FGM sandwich plates by using variable-kinematics Ritz models*. Mechanics of Advanced Materials and Structures, T. 23, nr 9, s. 1104–1113, 2016.
- [114] FAZZOLARI F. A., i CARRERA E.: *Refined hierarchical kinematics quasi-3D Ritz models for free vibration analysis of doubly curved FGM shells and sandwich shells with FGM core*. Journal of Sound and Vibration, T. 333, nr 5, s. 1485–1508, 2014.
- [115] FELIPPA C. A.: *On the Original Publication of the General Canonical Functional of Linear Elasticity*. Journal of Applied Mechanics, T. 67, s. 217–219, 2000.
- [116] FISCHMEISTER H., i KARLSSON B.: *Plastizitätseigenschaften Grob-Zweiphasiger Werkstoffe*. Zeitschrift für Metallkunde, T. 68, nr 5, s. 311–327, 1977.
- [117] FONTES VALENTE R. A., NATAL JORGE R. M., CARDOSO R. P. R., CÉSAR DE SÁ J. M. A., i GRÁCIO J. J. A.: *On the use of an enhanced transverse shear strain shell element for problems involving large rotations*. Computational Mechanics, T. 30, nr 4, s. 286–296, 2003.
- [118] FOREST S., BARBE F., i CAILLETAUD G.: *Cosserat modelling of size effects in the mechanical behaviour of polycrystals and multi-phase materials*. International Journal of Solids and Structures, T. 37,

- s. 7105–7126, 2000.
- [119] FOREST S., PRADEL F., i SAB K.: *Asymptotic analysis of heterogeneous Cosserat media*. International Journal of Solids and Structures, T. 38, nr 26–27, s. 4585–4608, 2001.
- [120] FOREST S., i SAB K.: *Cosserat overall modeling of heterogeneous materials*. Mechanics Research Communications, T. 25, nr 4, s. 449–454, 1998.
- [121] FRAEIJIS DE VEUBEKE B. M.: *Diffusion des Inconnues Hyperstatiques dans les Voilures a Longeron Couples*. Bull. Serv. Technique de L'Aeronautique, T. 24, 1951.
- [122] FUNG Y. C.: *Podstawy mechaniki ciała stałego*. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1969.
- [123] GALERKIN B. G.: *Rods and Plates: Series in some problems of elastic equilibrium of rods and plates*. Vestnik Inzhenerov i Tekhnikov, T. 19, s. 897–908, 1915.
- [124] GARUSI E., TRALLI A., i CAZZANI A.: *An unsymmetric stress formulation for Reissner-Mindlin plates: a simple and locking-free rectangular element*. International Journal of Computational Engineering Science, T. 5, nr 3, s. 589–618, 2004.
- [125] GHANNADPOUR S. A. M., i ALINIA M. M.: *Large deflection behavior of functionally graded plates under pressure loads*. Composite Structures, T. 75, nr 1–4, s. 67–71, 2006.
- [126] GHANNADPOUR S. A. M., i OVESHY H. R.: *High accuracy postbuckling analysis of channel section struts*. ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, T. 92, nr 8, s. 668–680, 2012.
- [127] GHARZEDDINE F., i IBRAHIMBEGOVIC A.: *Incompatible mode method for finite deformation quasi-incompressible elasticity*. Computational Mechanics, T. 24, nr 6, s. 419–425, 2000.
- [128] GILEWSKI W.: *O kryteriach oceny elementów skończonych. Od belki Timoshenki do płyty o średniej grubości. Prace Naukowe, Budownictwo z. 144*. Warszawa: Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, 2005.
- [129] GILEWSKI W., i GOMULIŃSKI A.: *Physical shape functions in finite element analysis of moderately thick plates*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, T. 32, nr 5, s. 1115–1135, 1991.
- [130] GILEWSKI W., i PELCZYŃSKI J.: *Physical super-geometric FE formulation for moderately thick plates*, Shell Structures: Theory and Applications, Vol. 3, (red.: Pietraszkiewicz W., i Górski J.) London: Taylor & Francis Group, s. 405–408, 2014.
- [131] GILEWSKI W., AL SABOUNI-ZAWADZKA A., i PELCZYŃSKI J.: *Physical shape functions in 6-parameter shell theory*, Shell Structures: Theory and Applications, Vol. 4, (red.: Pietraszkiewicz W., i Witkowski W.) London: Taylor & Francis Group, s. 371–374, 2018.
- [132] GŁAZUNOW J.: *Metody wariacyjne*. Elbląg: Wydawnictwo Elbląskiej Uczelni Humanistyczno-Ekonomicznej, 2005.
- [133] GODA I., ASSIDI M., i GANGHOFFER J. F.: *A 3D elastic micropolar model of vertebral trabecular bone from lattice homogenization of the bone microstructure*. Biomechanics and Modeling in Mechanobiology, T. 13, nr 1, s. 53–83, 2014.
- [134] GRUTTMANN F., STEIN E., i WRIGGERS P.: *Theory and numerics of thin elastic shells with finite rotations*. Ingenieur-Archiv, T. 59, nr 1, s. 54–67, 1989.
- [135] GRUTTMANN F., i WAGNER W.: *A linear quadrilateral shell element with fast stiffness computation*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, T. 194, nr 39–41, s. 4279–4300, 2005.
- [136] GRUTTMANN F., i WAGNER W.: *A stabilized one-point integrated quadrilateral Reissner-Mindlin plate element*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, T. 61, nr 13, s. 2273–2295, 2004.
- [137] GRUTTMANN F., i WAGNER W.: *Structural analysis of composite laminates using a mixed hybrid shell element*. Computational Mechanics, T. 37, nr 6, s. 479–497, 2006.
- [138] GRUTTMANN F., WAGNER W., i KNUST G.: *A coupled global-local shell model with continuous interlaminar shear stresses*. Computational Mechanics, T. 57, nr 2, s. 237–255, 2016.
- [139] GU Y., NAKAMURA T., PRCHLIK L., SAMPATH S., i WALLACE J.: *Micro-indentation and inverse analysis to characterize elastic-plastic graded materials*. Materials Science and Engineering: A, T. 345, nr 1–2, s. 223–233, 2003.
- [140] GUPTA A., i TALHA M.: *Recent development in modeling and analysis of functionally graded materials and structures*. Progress in Aerospace Sciences, T. 79, s. 1–14, 2015.
- [141] GURTIN M. E., FRIED E., i ANAND L.: *The Mechanics and Thermodynamics of Continua*. Cambridge University Press, 2010.
- [142] HAMILTON W. R.: *The Mathematical Papers of Sir William Rowan Hamilton: Volume IV, Geometry, Analysis, Astronomy, Probability and Finite Differences, Miscellaneous*. Cambridge University Press, 2000.
- [143] HAN S. C., LEE W. H., i PARK W. T.: *Non-linear analysis of laminated composite and sigmoid*

- functionally graded anisotropic structures using a higher-order shear deformable natural Lagrangian shell element*. Composite Structures, T. 89, nr 1, s. 8–19, 2009.
- [144] HASSANPOUR S., i HEPPLER G. R.: *Micropolar elasticity theory: a survey of linear isotropic equations, representative notations, and experimental investigations*. Mathematics and Mechanics of Solids, T. 22, nr 2, s. 224–242, 2017.
- [145] HELLINGER E.: *Die allgemeinen Ansätze der Mechanik der Kontinua*, Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, nr Part 4, s. 601–694, 1914.
- [146] HERNIK S.: *Projektowanie elementów konstrukcyjnych z materiałów gradientowych*. Praca doktorska, Politechnika Krakowska, 2009.
- [147] HERRMANN G., i ACHENBACH J. D.: *Application of theories of generalized Cosserat continua to the dynamics of composite materials*, [w:] Mechanics of Generalized Continua. IUTAM Symposia (International Union of Theoretical and Applied Mechanics), s. 69–79, 1968.
- [148] HERRMANN M., i SOBEK W.: *Functionally graded concrete: Numerical design methods and experimental tests of mass-optimized structural components*. Structural Concrete, T. 18, nr 1, s. 54–66, 2017.
- [149] HILDEBRANDT F. B.: *Introduction to numerical analysis*. McGraw-Hill Book Company Inc., 1956.
- [150] HILL R.: *A Self-Consistent Mechanics of Composite Materials*. Journal of Mechanics and Physics of Solids, T. 13, s. 213–222, 1965.
- [151] HODOR K., ZIĘBA P., i OLSZOWSKA-SOBIERAJ B.: *Materiały gradientowe jako nowe możliwości współczesnej techniki*. Inżynieria Materiałowa, T. 20, nr 6, s. 595–600, 1999.
- [152] HOLZAPFEL G.: *Nonlinear Solid Mechanics*. Chichester: John Wiley & Sons, Ltd., 2001.
- [153] HOMMEL J.-H., i MESCHKE G.: *EAS concept for higher-order finite shell elements to eliminate volumetric locking*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, T. 75, s. 1416–1434, 2008.
- [154] HOPF H.: *Systeme symmetrischer Bilinearformen und euklidische Modelle der projektiven Räume*. Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, T. 85, nr 7, s. 165–177, 1940.
- [155] HERRIGMOE G., i BERGAN P. G.: *Nonlinear analysis of free-form shells by flat finite elements*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, T. 16, nr 1, s. 11–35, 1978.
- [156] HU H.-C.: *On some variational methods in the theory of elasticity and the theory of plasticity*. Scientia Sinica, T. 4, s. 33–54, 1955.
- [157] HU H. C.: *Necessary and sufficient conditions for correct use of generalized variational principles of elasticity in appropriate solutions*. Science in China, T. 33, nr 2, s. 196–205, 1989.
- [158] HUANG H. C.: *Membrane locking and assumed strain shell elements*. Computers & Structures, T. 27, nr 5, s. 671–677, 1987.
- [159] HUANG H. C., i HINTON E.: *A new nine node degenerated shell element with enhanced membrane and shear interpolation*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, T. 22, nr 1, s. 73–92, 1986.
- [160] HUANG H., i HAN Q.: *Elastoplastic buckling of axially loaded functionally graded material cylindrical shells*. Composite Structures, T. 117, nr 1, s. 135–142, 2014.
- [161] HUANG H., i HAN Q.: *Stability of pressure-loaded functionally graded cylindrical shells with inelastic material properties*. Thin-Walled Structures, T. 92, s. 21–28, 2015.
- [162] HUGHES T. J. R.: *Generalization of selective integration procedures to anisotropic and nonlinear media*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, T. 15, nr 9, s. 1413–1418, 1980.
- [163] HUGHES T. J. R.: *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamics Finite Element Analysis*. Mineola, New York: Dover Publications, Inc., 2000.
- [164] HUGHES T. J. R., TAYLOR R. L., i KANOKNUKULCHAI W.: *A simple and efficient finite element for plate bending*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, T. 11, nr 10, s. 1529–1543, 1977.
- [165] HUGHES T. J. R., i TEZDUYAR T. E.: *Finite elements based upon mindlin plate theory with particular reference to the four-node bilinear isoparametric element*. Journal of Applied Mechanics, T. 48, nr 3, s. 587–596, 1981.
- [166] IBRAHIMBEGOVIC A.: *On the choice of finite rotation parameters*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, T. 149, nr 1–4, s. 49–71, 1997.
- [167] IBRAHIMBEGOVIC A., i TAYLOR R. L.: *On the role of frame invariance in structural mechanics models at finite rotations*. Comput. Meth. Appl. Mech., T. 191, s. 5159–5176, 2002.
- [168] IBRAHIMBEGOVIĆ A., i FREY F.: *Stress resultant geometrically nonlinear shell theory with drilling rotations—Part II. Computational aspects*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, T. 118, nr 3–4, s. 285–308, 1994.

- [169] JEMIELITA G.: *Współczynnik ścinania*, Mechanika Techniczna, tom VIII. Mechanika Sprężystych Płyt i Powłok, (red.: Woźniak C.) Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, s. 136–141, 2001.
- [170] JEONG J., RAMEZANI H., MÜNCH I., i NEFF P.: *A numerical study for linear isotropic Cosserat elasticity with conformally invariant curvature*. ZAMM Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, T. 89, nr 7, s. 552–569, 2009.
- [171] JHA D. K., KANT T., i SINGH R. K.: *A critical review of recent research on functionally graded plates*. Composite Structures, T. 96, s. 833–849, 2013.
- [172] JIN G. Q., i LI W. D.: *Adaptive rapid prototyping/manufacturing for functionally graded material-based biomedical models*. International Journal of Advanced Manufacturing Technology, T. 65, nr 1–4, s. 97–113, 2013.
- [173] JIN Z. H., PAULINO G. H., i DODDS R. H.: *Cohesive fracture modeling of elastic-plastic crack growth in functionally graded materials*. Engineering Fracture Mechanics, T. 70, nr 14, s. 1885–1912, 2003.
- [174] KAFADAR C. B., i ERINGEN A. C.: *Micropolar Media - I. The Classical Theory*. International Journal of Engineering Science, T. 9, s. 271–305, 1971.
- [175] KALALI A. T., HASSANI B., i HADIDI-MOUD S.: *Elastic-plastic analysis of pressure vessels and rotating disks made of functionally graded materials using the isogeometric approach*. Journal of Theoretical and Applied Mechanics, T. 54, nr 1, s. 113–125, 2016.
- [176] KĄCZKOWSKI Z.: *Phyty - obliczenia statyczne*. Warszawa: Arkady, 1980.
- [177] KIEBACK B., NEUBRAND A., i RIEDEL H.: *Processing techniques for functionally graded materials*. Materials Science and Engineering A, T. 362, nr 1–2, s. 81–105, 2003.
- [178] KIKUCHI F., i ANDO Y.: *Rectangular Finite Element for Plate Bending Analysis Principle Based on Hellinger-Reissner's Variational Principle*. Journal of Nuclear Science and Technology, T. 9, nr 1, s. 28–35, 1972.
- [179] KIM D. N., i BATHE K. J.: *A triangular six-node shell element*. Computers and Structures, T. 87, nr 23–24, s. 1451–1460, 2009.
- [180] KLEIBER M.: *Wprowadzenie do Metody Elementów Skończonych*. Warszawa-Poznań: PWN, 1989.
- [181] KLEIBER M., TACZAŁA M., i BUCZKOWSKI R.: *Elasto-Plastic Response of Thick Plates Built in Functionally Graded Material Using the Third Order Plate Theory*, Advances in Computational Plasticity, T. 46, s. 185–199, 2018.
- [182] KLINKEL S., GRUTTMANN F., i WAGNER W.: *A mixed shelf formulation accounting for thickness strains and finite strain 3d material models*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, T. 74, nr 6, s. 945–970, 2008.
- [183] KO Y., LEE P. S., i BATHE K. J.: *The MITC4+ shell element and its performance*. Computers and Structures, T. 169, s. 57–68, 2016.
- [184] KOIZUMI M.: *FGM activities in Japan*. Composites Part B: Engineering, T. 28, nr 1–2, s. 1–4, 1997.
- [185] KORN G. A., i KORN T. M.: *Matematyka dla pracowników naukowych i inżynierów, Część I*. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1983.
- [186] KORN G. A., i KORN T. M.: *Matematyka dla pracowników naukowych i inżynierów, Część II*. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1983.
- [187] KREJA I.: *Geometrically non-linear analysis of layered composite plates and shells*. Gdańsk: Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej, 2007.
- [188] KREJA I.: *Mechanika Ośrodków Ciągłych*. Gdańsk: Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej, 2003.
- [189] KREJA I., i CYWIŃSKI Z.: *Is reduced integration just a numerical trick*. Computers and Structures, T. 29, nr 3, s. 491–496, 1988.
- [190] KREJA I., i SCHMIDT R.: *Large rotations in first-order shear deformation FE analysis of laminated shells*. International Journal of Non-Linear Mechanics, T. 41, nr 1, s. 101–123, 2006.
- [191] KUGLER S., FOTIU P. A., i MURIN J.: *Enhanced functionally graded material shell finite elements*. ZAMM Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, T. 94, nr 1–2, s. 72–84, 2014.
- [192] KUGLER S., FOTIU P. A., i MURIN J.: *The numerical analysis of FGM shells with enhanced finite elements*. Engineering Structures, T. 49, s. 920–935, 2013.
- [193] KUGLER S., FOTIU P. A., i MURIN J.: *Thermo-elasticity in shell structures made of functionally graded materials*, [w:] ECCOMAS Congress 2016 - Proceedings of the 7th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, s. 1–25, 2016.
- [194] KULIKOV G. M., CARRERA E., i PLOTNIKOVA S. V.: *Hybrid-Mixed Quadrilateral Element for Laminated Plates Composed of Functionally Graded Materials*. Advanced Materials & Technologies, nr 1, s. 44–55, 2017.
- [195] KULIKOV G. M., MAMONTOV A. A., PLOTNIKOVA S. V., i MAMONTOV S. A.: *Exact geometry solid-shell element based on a sampling surfaces technique for 3D stress analysis of doubly-curved*

- composite shells. Curved and Layered Structures*, T. 3, nr 1, s. 1–16, 2016.
- [196] KULIKOV G. M., i PLOTNIKOVA S. V.: *A family of ANS four-node exact geometry shell elements in general convected curvilinear coordinates*. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, T. 83, s. 1376–1406, 2010.
- [197] KULIKOV G. M., i PLOTNIKOVA S. V.: *A hybrid-mixed four-node quadrilateral plate element based on sampling surfaces method for 3D stress analysis*. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, T. 108, nr 1, s. 26–54, 2016.
- [198] LAKES R.: *Cosserat Elasticity; Micropolar elasticity*. <http://silver.neep.wisc.edu/~lakes/Coss.html>.
- [199] LAKES R.: *Experimental methods for study of Cosserat elastic solids and other generalized elastic continua*, *Continuum Models for Materials with Micro-structure*, (red.: Mühlhaus H.) New York: Wiley, s. 1–22, 1995.
- [200] LANCZOS C.: *The Variational Principles of Mechanics. Mathematical Expositions No. 4*. Toronto: University of Toronto Press, 1949.
- [201] LARSON R. A.: *A novel method for characterizing the impact response of functionally graded plates. Dissertation*, Air Force Institute of Technology Ohio, 2008.
- [202] LARSON R. A., i PALAZOTTO A. N.: *Property estimation in FGM plates subject to low-velocity impact loading*. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, T. 4, nr 7–8, s. 1429–1451, 2009.
- [203] LEE H. P., i HARRIS P. J.: *Post-buckling strength of thin-walled members*. *Computers and Structures*, T. 10, nr 4, s. 689–702, 1979.
- [204] LEE S. W., i PIAN T. H. H.: *Improvement of Plate and Shell Finite Elements by Mixed Formulations*. *AIAA Journal*, T. 16, nr 1, s. 29–34, 1978.
- [205] LEE S. W., i RHIU J. J.: *A new efficient approach to the formulation of mixed finite element models for structural analysis*. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, T. 23, nr 9, s. 1629–1641, 1986.
- [206] LEE S. W., i WONG S. C.: *Mixed formulation finite elements for mindlin theory plate bending*. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, T. 18, nr 9, s. 1297–1311, 1982.
- [207] LEIBNIZ G. W.: *Communicatio suae pariter, duarumque alienarum ad adendum sibi primum a Dn. Jo. Bernoullio, deinde a Dn. Marchione Hospitalio communicatarum solutionum problematis curvae celerrimi descensus a Dn. Jo. Bernoullio geometris publice propositi, una cum soluti*. *Acta Eruditorum*, s. 201–206, 1697.
- [208] LIBAI A., i SIMMONDS J. G.: *The Nonlinear Theory of Elastic Shells*. Cambridge: Cambridge University Press, 1998.
- [209] LUBOWIECKA I.: *Całkowanie nieliniowych dynamicznych równań ruchu w mechanice konstrukcji. Dynamika powłok sprężystych. Rozprawa doktorska*, Politechnika Gdańska, 2001.
- [210] LUBOWIECKA I., i CHRÓŚCIELEWSKI J.: *On dynamics of flexible branched shell structures undergoing large overall motion using finite elements*. *Computers and Structures*, T. 80, nr 9–10, s. 891–898, 2002.
- [211] MA L. S., i WANG T. J.: *Nonlinear bending and post-buckling of a functionally graded circular plate under mechanical and thermal loadings*. *International Journal of Solids and Structures*, T. 40, nr 13–14, s. 3311–3330, 2003.
- [212] MACNEAL R. H.: *A simple quadrilateral shell element*. *Computers and Structures*, T. 8, nr 2, s. 175–183, 1978.
- [213] MACNEAL R. H., i HARDER R. L.: *A proposed standard set of problems to test finite element accuracy*. *Finite Elements in Analysis and Design*, T. 1, nr 1, s. 3–20, 1985.
- [214] MAKOWSKI J., i STUMPF H.: *Buckling equations for elastic shells with rotational degrees of freedom undergoing finite strain deformation*. *International Journal of Solids and Structures*, T. 26, nr 3, s. 353–368, 1990.
- [215] MAKOWSKI J., i STUMPF H.: *Finite Strains and Rotations in Shells*, *Finite Rotations in Structural Mechanics. Lecture Notes in Engineering*, Vol 19, (red.: Pietraszkiewicz W.) Berlin, Heidelberg: Springer, s. 175–194, 1986.
- [216] MAKOWSKI J., i STUMPF H.: *Geometric structure of fully nonlinear and linearized Cosserat type shell theory*. *Mitt. Institut für Mechanik*, Nr. 62, Ruhr-Universität Bochum, 1988.
- [217] MAKOWSKI J., i STUMPF H.: *Mechanics of Irregular Shell Structures*. *Mitt. Institut für Mechanik*, Nr. 95, Ruhr-Universität Bochum, 1994.
- [218] *Materiały z gradientem właściwości*: <http://encyklopedia.pwn.pl/haslo/materialy-z-gradientem-wlasciwosci;3938588.html>.
- [219] MCGREGOR M., i WHEEL M. A.: *On the coupling number and characteristic length of micropolar media of differing topology*. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering*

- Sciences, T. 470, s. 20140150, 2014.
- [220] MIŚKIEWICZ M.: *Nieliniowa analiza stanów przedawaryjnych konstrukcji prętowo – ciągnowych w ujęciu metody elementów skończonych. Praca doktorska*, Politechnika Gdańska, 2010.
- [221] MIYAMOTO Y., KAYSSER W. ., RABIN B. ., KAWASAKI A., i FORD R. .: *Functionally Graded Materials: Design, Processing, and Applications*. Kluwer, 1999.
- [222] MORI T., i TANAKA K.: *Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions*. Acta Metallurgica, T. 21, nr 5, s. 571–574, 1973.
- [223] MORIMOTO T., TANIGAWA Y., i KAWAMURA R.: *Thermal buckling of functionally graded rectangular plates subjected to partial heating*. International Journal of Mechanical Sciences, T. 48, nr 9, s. 926–937, 2006.
- [224] MURAKAWA H.: *Incremental hybrid finite element methods for finite deformation problems (with special emphasis on complementary energy principle)*. Ph.D. Thesis, Georgia Institute of Technology, 1978.
- [225] MURAKAWA H., i ATLURI S. N.: *Finite elasticity solutions using hybrid finite elements based on a complementary energy principle*. Journal of Applied Mechanics, T. 45, s. 539–547, 1978.
- [226] MURDOCH A. I.: *Objectivity in classical continuum physics: A rationale for discarding the „principle of invariance under superposed rigid body motions” in favour of purely objective considerations*. Continuum Mechanics and Thermodynamics, T. 15, nr 3, s. 309–320, 2003.
- [227] NAGHDI P. M.: *The Theory of Shells and Plates*, Encyclopedia of Physics, Vol. VIa/2, (red.: Flüge S., i Truesdell C.) Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, s. 425–640, 1972.
- [228] NAKAMURA S., BENEDICT R., i LAKES R.: *Finite element method for orthotropic micropolar elasticity*. International Journal of Engineering Science, T. 22, nr 3, s. 319–330, 1984.
- [229] NAKAMURA T., WANG T., i SAMPATH S.: *Determination of Properties of Graded Materials*. Acta Metallurgica, T. 48, s. 4293–4306, 2000.
- [230] NEFF P.: *Geometrically exact Cosserat theory for bulk behaviour and thin structures. Modelling and mathematical analysis*. Technische Universität Darmstadt, 2004.
- [231] NGUYEN T. K., SAB K., i BONNET G.: *First-order shear deformation plate models for functionally graded materials*. Composite Structures, T. 83, nr 1, s. 25–36, 2008.
- [232] NOLL W.: *A mathematical theory of the mechanical behavior of continuous media*. Archive for Rational Mechanics and Analysis, T. 2, nr 1, s. 197–226, 1958.
- [233] NOOR A. K.: *Bibliography of Monographs and Surveys on Shells*. Applied Mechanics Reviews, T. 43, nr 9, s. 223–234, 1990.
- [234] NOWACKI W.: *Couple-stresses in the theory of thermoelasticity, Irreversible aspects of continuum mechanics and transfer of physical characteristics in moving fluids*. IUTAM Symposia Vienna 1966, (red.: Parkus H., i Sedov L. I.) Wien: Springer-Verlag, s. 259–278, 1968.
- [235] NOWACKI W.: *Teoria niesymetrycznej sprężystości*. Warszawa: IPPT PAN, 1971.
- [236] OSTROWSKA-MACIEJEWSKA J.: *Mechanika ciał odkształcalnych*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, 1994.
- [237] OVESY H. R., LOUGHLAN J., GHANNADPOUR S. A. M., i MORADA G.: *Geometric non-linear analysis of box sections under end shortening, using three different versions of the finite-strip method*. Thin-Walled Structures, T. 44, nr 6, s. 623–637, 2006.
- [238] OXMAN N., KEATING S., i TSAI E.: *Functionally graded rapid prototyping*. Innovative Developments in Virtual and Physical Prototyping, s. 483–489, 2012.
- [239] PANASZ P.: *Nieliniowe modele powłok z 6 stopniami swobody bazujące na dwustopniowych aproksymacjach. Rozprawa doktorska, IPPT.*, 2008.
- [240] PANASZ P., i WISNIEWSKI K.: *Nine-node shell elements with 6 dofs/node based on two-level approximations. Part I. Theory and linear tests*. Finite Elements in Analysis and Design, T. 44, nr 12–13, s. 784–796, 2008.
- [241] PANIN J.: *Gradient-enhanced continuum models: formulation, discretization and applications*. Kraków: Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, 2004.
- [242] PARISCH H.: *An investigation of a finite rotation four node assumed strain shell element*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, T. 31, s. 127–150, 1991.
- [243] PASTERNAK E., i MÜHLHAUS H. B.: *Generalised homogenisation procedures for granular materials*. Journal of Engineering Mathematics, T. 52, s. 199–229, 2005.
- [244] PAU A., i TROVALUSCI P.: *Block masonry as equivalent micropolar continua: The role of relative rotations*. Acta Mechanica, T. 223, nr 7, s. 1455–1471, 2012.
- [245] PAWSEY S. F., i CLOUGH R. W.: *Improved numerical integration of thick shell finite elements*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, T. 3, nr 4, s. 575–586, 1971.



- [246] PIAN T. H. H.: *A historical note about 'hybrid elements'*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, T. 12, nr 5, s. 891–892, 1978.
- [247] PIAN T. H. H.: *Derivation of element stiffness matrices by assumed stress distributions*. AIAA Journal, T. 2, nr 7, s. 1333–1336, 1964.
- [248] PIAN T. H. H.: *Element stiffness matrices for boundary compatibility and for prescribed boundary stresses*, [w:] Proc. Third Conf. Matrix Methods Struct. Mech., s. 457–477, 1966.
- [249] PIAN T. H. H.: *Finite elements based on consistently assumed stresses and displacements*. Finite Elements in Analysis and Design, T. 1, nr 2, s. 131–140, 1985.
- [250] PIAN T. H. H.: *Recent advances in hybrid/mixed finite elements*, [w:] Proc. Conf. on Finite Element Methods, s. 82–89, 1982.
- [251] PIAN T. H. H.: *State-of-the-art development of hybrid/mixed finite element method*. Finite Elements in Analysis and Design, T. 21, nr 1–2, s. 5–20, 1995.
- [252] PIAN T. H. H., i CHEN D.: *On the suppression of zero energy deformation modes*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, T. 19, nr 12, s. 1741–1752, 1983.
- [253] PIAN T. H. H., i LEE S. W.: *Notes on finite elements for nearly incompressible materials*. AIAA Journal, T. 14, nr 6, s. 824–826, 1976.
- [254] PIAN T. H. H., i SUMIHARA K.: *Rational approach for assumed stress finite elements*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, T. 20, nr 9, s. 1685–1695, 1984.
- [255] PIAN T. H. H., i WU C.-C.: *Hybrid and Incompatible Finite Element Methods*. Boca Raton: Taylor & Francis Group, 2006.
- [256] PIETRASZKIEWICZ W.: *Addendum to: Bibliography of Monographs and Surveys on Shells*. Applied Mechanics Reviews, T. 45, nr 6, s. 249–250, 1992.
- [257] PIETRASZKIEWICZ W.: *Consistent Second Approximation to the Elastic Strain Energy of a Shell*. ZAMM, T. 59, s. 206–208, 1979.
- [258] PIETRASZKIEWICZ W.: *Finite Rotations and Lagrangean Description in the Non-Linear Theory of Shells*. Warszawa-Poznań: PWN, 1979.
- [259] PIETRASZKIEWICZ W.: *Refined resultant thermomechanics of shells*. International Journal of Engineering Science, T. 49, nr 10, s. 1112–1124, 2011.
- [260] PIETRASZKIEWICZ W.: *Teorie powłok sprężystych. Teorie nieliniowe powłok.*, Mechanika Techniczna, tom VIII. Mechanika Sprężystych Płyt i Powłok, (red.: Woźniak C.) Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, 2001.
- [261] PIETRASZKIEWICZ W.: *The resultant linear six-field theory of elastic shells: What it brings to the classical linear shell models?* ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, T. 96, nr 8, s. 899–915, 2016.
- [262] PIETRASZKIEWICZ W., i BADUR J.: *Finite rotations in the description of continuum deformation*. International Journal of Engineering Science, T. 21, nr 9, s. 1097–1115, 1983.
- [263] PIETRASZKIEWICZ W., i EREMEYEV V. A.: *On natural strain measures of the non-linear micropolar continuum*. International Journal of Solids and Structures, T. 46, nr 3–4, s. 774–787, 2009.
- [264] PIETRASZKIEWICZ W., i EREMEYEV V. A.: *On vectorially parameterized natural strain measures of the non-linear Cosserat continuum*. International Journal of Solids and Structures, T. 46, nr 11, s. 2477–2480, 2009.
- [265] PIETRASZKIEWICZ W., i KONOPÍŃSKA V.: *Drilling couples and refined constitutive equations in the resultant geometrically non-linear theory of elastic shells*. International Journal of Solids and Structures, T. 51, nr 11–12, s. 2133–2143, 2014.
- [266] PILTNER R.: *An alternative version of the Pian-Sumihara element with a simple extension to non-linear problems*. Computational Mechanics, T. 26, nr 5, s. 483–489, 2000.
- [267] PILTNER R., i TAYLOR R. L.: *A quadrilateral mixed finite element with two enhanced strain modes*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, T. 38, nr 11, s. 1783–1808, 1995.
- [268] PILTNER R., i TAYLOR R. L.: *A systematic construction of B-bar functions for linear and non-linear mixed-enhanced finite elements for plane elasticity problems*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, T. 44, nr 5, s. 615–639, 1999.
- [269] PRAKASH T., SINGHA M. K., i GANAPATHI M.: *Influence of neutral surface position on the nonlinear stability behavior of functionally graded plates*. Computational Mechanics, T. 43, nr 3, s. 341–350, 2009.
- [270] PRATO C. A.: *Shell finite element method via Reissner's principle*. International Journal of Solids and Structures, T. 5, nr 10, s. 1119–1133, 1969.
- [271] PUJOL J.: *Hamilton, Rodrigues, Gauss, quaternions, and rotations: a historical reassessment*. Communications in Mathematical Analysis, T. 13, nr 2, s. 1–14, 2012.
- [272] RAKOWSKI G., i KACPRZYK Z.: *Metoda Elementów Skończonych w mechanice konstrukcji*. Warszawa:

- Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, 2005.
- [273] RALSTON A.: *Wstęp do analizy numerycznej*, 2. wyd. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1975.
- [274] REESE S.: *A large deformation solid-shell concept based on reduced integration with hourglass stabilization*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, T. 69, nr 8, s. 1671–1716, 2007.
- [275] REISSNER E.: *Linear and nonlinear theory of shells*, Thin Shell Structures, (red.: Fung Y. C., i Sechler E. E.) Englewood Cliffs: Prentice-Hall, s. 29–44, 1974.
- [276] REISSNER E.: *On a Variational Theorem in Elasticity*. Journal of Mathematics and Physics, T. 29, s. 90–95, 1950.
- [277] REISSNER E.: *Variational methods and boundary conditions in shell theory*, [w:] Studies in Optimization 1, s. 78–94, 1970.
- [278] RHIU J. J., i LEE S. W.: *A new efficient mixed formulation for thin shell finite element models*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, T. 24, nr 3, s. 581–604, 1987.
- [279] RIAHI A., i CURRAN J. H.: *Full 3D finite element Cosserat formulation with application in layered structures*. Applied Mathematical Modelling, T. 33, nr 8, s. 3450–3464, 2009.
- [280] ROBINSON J., i BLACKHAM S.: *An evaluation of lower order membranes as contained in ASAS, MSC/NASTRAN and PAFEC FEM systems*. Dorset, England: Robinson and Associates, 1979.
- [281] ROBINSON J., i BLACKHAM S.: *An evaluation of plate bending elements: ASAS, ANSYS, MSC/NASTRAN, PAFEC and SAP4*. Dorset, England: Robinson and Associates, 1981.
- [282] ROZMUS M.: *Cermetalne materiały gradientowe*. Materiały Ceramiczne, T. 58, nr 4, s. 142–147, 2006.
- [283] RUBIN M. B.: *Cosserat Theories: Shells, Rods and Points*, T. 79. Dordrecht: Springer Netherlands, 2000.
- [284] RUEGER Z., i LAKES R. S.: *Cosserat elasticity of negative Poisson's ratio foam: experiment*. Smart Materials and Structures, T. 25, nr 54004, s. 1–8, 2016.
- [285] RUEGER Z., i LAKES R. S.: *Experimental Cosserat elasticity in open-cell polymer foam*. Philosophical Magazine, T. 96, nr 2, s. 93–111, 2016.
- [286] RUEGER Z., i LAKES R. S.: *Strong Cosserat elastic effects in a unidirectional composite*. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik, T. 68, nr 54, 2017.
- [287] RYMARZ C.: *Mechanika ośrodków ciągłych*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, 1993.
- [288] SABIK A.: *Analiza stateczności powłok warstwowych obciążonych termicznie*. Gdańsk: Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej, 2012.
- [289] SACK K. L., SKATULLA S., i SANSOUR C.: *Biological tissue mechanics with fibres modelled as one-dimensional Cosserat continua. Applications to cardiac tissue*. International Journal of Solids and Structures, T. 81, s. 84–94, 2016.
- [290] SADŁOWSKI P.: *Parametryzacje rotacji i algorytmy rozwiązywania równań dynamiki z rotacyjnymi stopniami swobody. Praca doktorska*, Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN, 2007.
- [291] SAMANTA A., i MUKHOPADHYAY M.: *Finite element large deflection static analysis of shallow and deep stiffened shells*. Finite Elements in Analysis and Design, T. 33, nr 3, s. 187–208, 1999.
- [292] SANCHEZ-MOLINA D., VELAZQUEZ-AMEIJIDE J., ARREGUI-DALMASES C., RODRÍGUEZ D., QUINTANA V., SHAFIEIAN M., i CRANDALL J. R.: *A Microcontinuum Model for Mechanical Properties of Esophageal Tissue: Experimental Methodology and Constitutive Analysis*. Annals of Biomedical Engineering, T. 42, nr 1, s. 62–72, 2014.
- [293] SANSOUR C.: *Large strain deformations of elastic shells Constitutive modelling and finite element analysis*. Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg., T. 161, nr 97, s. 1–18, 1998.
- [294] SANSOUR C., i BEDNARCZYK H.: *The Cosserat surface as a shell model, theory and finite-element formulation*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, T. 120, s. 1–32, 1995.
- [295] SANSOUR C., i BOCKO J.: *On hybrid stress, hybrid strain and enhanced strain finite element formulations for a geometrically exact shell theory with drilling degrees of freedom*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, T. 43, s. 175–192, 1998.
- [296] SANSOUR C., i KOLLMANN F. G.: *Families of 4-node and 9-node finite elements for a finite deformation shell theory. An assessment of hybrid stress, hybrid strain and enhanced strain elements*. Computational Mechanics, T. 24, nr 6, s. 435–447, 2000.
- [297] SCHELLBACH K. H.: *Probleme der Variationsrechnung*. Crelle's Journal für die reine und angewandte Mathematik, T. 41, s. 293–363, 1851.
- [298] SEKI W., i ATLURI S. N.: *Analysis of strain localization in strain-softening hyperelastic materials, using assumed stress hybrid elements*. Computational Mechanics, T. 14, s. 549–585, 1994.
- [299] SEKI W., i ATLURI S. N.: *On newly developed assumed stress finite element formulations for geometrically and materially nonlinear problems*. Finite Elements in Analysis and Design, T. 21, s. 75–110, 1995.

- [300] SHANG Y., CEN S., i LI C.-F.: *A 4-node quadrilateral flat shell element formulated by the shape-free HDF plate and HSF membrane elements*. Engineering Computations, T. 33, nr 3, s. 713–741, 2016.
- [301] SHEN H.-S.: *Functionally Graded Materials. Nonlinear Analysis of Plates and Shells*. Boca Raton: CRC Press, 2009.
- [302] SHEN M., i BEVER M. B.: *Gradients in polymeric materials*. Journal of Materials Science, T. 7, nr 7, s. 741–746, 1972.
- [303] SIMMONDS J. G.: *The Nonlinear Thermodynamical Theory of Shells: Descent from 3-Dimensions without Thickness Expansions*, Flexible Shells, Theory and Applications, (red.: Axelrad E. L., i Emmerling F. A.) Berlin: Springer-Verlag, s. 1–11, 1984.
- [304] SIMO J. ., ARMERO F., i TAYLOR R. .: *Improved versions of assumed enhanced strain tri-linear elements for 3D finite deformation problems*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, T. 110, nr 3–4, s. 359–386, 1993.
- [305] SIMO J. C., i ARMERO F.: *Geometrically non-linear enhanced strain mixed methods and the method of incompatible modes*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, T. 33, nr 7, s. 1413–1449, 1992.
- [306] SIMO J. C., i FOX D. D.: *On a stress resultant geometrically exact shell model. Part I: Formulation and optimal parametrization*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, T. 72, nr 3, s. 267–304, 1989.
- [307] SIMO J. C., FOX D. D., i RIFAI M. S.: *On a stress resultant geometrically exact shell model. Part II: The linear theory; Computational aspects*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, T. 73, nr 1, s. 53–92, 1989.
- [308] SIMO J. C., FOX D. D., i RIFAI M. S.: *On a stress resultant geometrically exact shell model. Part III: Computational aspects of the nonlinear theory*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, T. 79, s. 21–70, 1990.
- [309] SIMO J. C., i RIFAI M. S.: *A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, T. 29, nr 8, s. 1595–1638, 1990.
- [310] SIMO J. C., i VU-QUOC L.: *A three-dimensional finite-strain rod model. part II: Computational aspects*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, T. 58, nr 1, s. 79–116, 1986.
- [311] SINGHA M. K., PRAKASH T., i GANAPATHI M.: *Finite element analysis of functionally graded plates under transverse load*. Finite Elements in Analysis and Design, T. 47, nr 4, s. 453–460, 2011.
- [312] SITEK M.: *Ocena poprawności prętowych, płytowych i powłokowych elementów skończonych. Rozprawa doktorska*, Politechnika Warszawska, 2010.
- [313] SOBCZYK B.: *FEM analysis of composite materials failure in nonlinear six field shell theory. Praca doktorska*, Politechnika Gdańska, 2016.
- [314] SOLA A., BELLUCCI D., i CANNILLO V.: *Functionally graded materials for orthopedic applications – an update on design and manufacturing*. Biotechnology Advances, T. 34, nr 5, s. 504–531, 2016.
- [315] SPILKER R. L.: *Hybrid-stress eight-node elements for thin and thick multilayer laminated plates*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, T. 18, nr 6, s. 801–828, 1982.
- [316] SPILKER R. L., MASKERI S. M., i KANIA E.: *Plane isoparametric hybrid-stress elements: Invariance and optimal sampling*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, T. 17, nr 10, s. 1469–1496, 1981.
- [317] SPILKER R. L., i MUNIR N. I.: *The hybrid-stress model for thin plates*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, T. 15, nr 8, s. 1239–1260, 1980.
- [318] STANDER N., MATZENMILLER A., i RAMM E.: *An assessment of assumed strain methods in finite rotation shell analysis*. Engineering Computations, T. 6, s. 58–66, 1989.
- [319] STEFANOU I., SULEM J., i VARDOULAKIS I.: *Three-dimensional Cosserat homogenization of masonry structures: Elasticity*. Acta Geotechnica, T. 3, nr 1, s. 71–83, 2008.
- [320] STEIN E.: *Milestones of Direct Variational Calculus and its Analysis from 17th Century until today and beyond - Mathematics meets Mechanics - with restriction to linear elasticity*. Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences, T. 19, nr 1, s. 7–91, 2012.
- [321] *Stiffness of long fibre composites. University of Cambridge: Mechanics of Fibre-Reinforced Composite*. [https://www.doitpoms.ac.uk/tlplib/fibre\\_composites/stiffness.php](https://www.doitpoms.ac.uk/tlplib/fibre_composites/stiffness.php).
- [322] STOLARSKI H., BELYTSCHKO T., i LEE S. H.: *A review of shell finite elements and corotational theories*. Computational Mechanics Advances, T. 2, nr 2, s. 125–212, 1995.
- [323] STUELPNAGEL J.: *On the Parametrization of the Three-Dimensional Rotation Group*. SIAM Review, T. 6, nr 4, s. 422–430, 1964.
- [324] SULEM J., STEFANOU I., i VEVEAKIS E.: *Stability analysis of undrained adiabatic shearing of a rock layer with Cosserat microstructure*. Granular Matter, T. 13, nr 3, s. 261–268, 2011.

- [325] SURANA K. S.: *Geometrically nonlinear formulation for the curved shell elements*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, T. 19, nr 4, s. 581–615, 1983.
- [326] SURESH S., i MORTENSEN A.: *Fundamentals of Functionally Graded Materials: Processing and Thermomechanical Behaviour of Graded Metals and Metal-Ceramic Composites*. London: IOM Communications Limited, 1998.
- [327] SWAMINATHAN K., NAVEENKUMAR D. T., ZENKOUR A. M., i CARRERA E.: *Stress, vibration and buckling analyses of FGM plates — A state-of-the-art review*. Composite Structures, T. 120, s. 10–31, 2014.
- [328] TACZAŁA M., BUCZKOWSKI R., i KLEIBER M.: *Nonlinear buckling and post-buckling response of stiffened FGM plates in thermal environments*. Composites Part B: Engineering, T. 109, s. 238–247, 2017.
- [329] TACZAŁA M., BUCZKOWSKI R., i KLEIBER M.: *Nonlinear free vibration of pre- and post-buckled FGM plates on two-parameter foundation in the thermal environment*. Composite Structures, T. 137, s. 85–92, 2016.
- [330] TACZAŁA M., BUCZKOWSKI R., i KLEIBER M.: *Postbuckling analysis of functionally graded plates on an elastic foundation*. Composite Structures, T. 132, s. 842–847, 2015.
- [331] TAMURA I., TOMOTA Y., i OZAWA H.: *Strength and ductility of Fe–Ni–C alloys composed of austenite and martensite with various strength*, [w:] Proceedings of the third conference on strength of metals and alloys, Vol. 1, s. 611–615, 1973.
- [332] TAN X. G., i VU-QUOC L.: *Efficient and accurate multilayer solid-shell element: Non-linear materials at finite strain*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, T. 63, nr 15, s. 2124–2170, 2005.
- [333] TANG Y. Q., ZHOU Z. H., i CHAN S. L.: *Geometrically nonlinear analysis of shells by quadrilateral flat shell element with drill, shear, and warping*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, T. 108, s. 1248–1272, 2016.
- [334] TAYLOR R. L., BERESFORD P. J., i WILSON E. L.: *A non-conforming element for stress analysis*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, T. 10, nr 6, s. 1211–1219, 1976.
- [335] TEJCHMAN J., i WU W.: *Numerical study on patterning of shear bands in a Cosserat continuum*. Acta Mechanica, T. 99, s. 61–74, 1993.
- [336] TEKÖĞLU C., i ONCK P. R.: *Size effects in two-dimensional Voronoi foams: A comparison between generalized continua and discrete models*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, T. 56, nr 12, s. 3541–3564, 2008.
- [337] TORNABENE F., FANTUZZI N., i BACCIOCCHI M.: *Free vibrations of free-form doubly-curved shells made of functionally graded materials using higher-order equivalent single layer theories*. Composites Part B: Engineering, T. 67, s. 490–509, 2014.
- [338] TORNABENE F., i REDDY J. N.: *FGM and laminated doubly-curved and degenerate shells resting on nonlinear elastic foundations: A GDQ solution for static analysis with a posteriori stress and strain recovery*. Journal of the Indian Institute of Science, T. 93, nr 4, s. 635–688, 2013.
- [339] TOUPIN R. A.: *Elastic materials with couple-stresses*. Archive for Rational Mechanics and Analysis, T. 11, nr 1, s. 385–414, 1962.
- [340] TOUPIN R. A.: *Theories of elasticity with couple-stress*. Archive for Rational Mechanics and Analysis, T. 17, nr 2, s. 85–112, 1964.
- [341] TROVALUSCI P., i PAU A.: *Derivation of microstructured continua from lattice systems via principle of virtual works: The case of masonry-like materials as micropolar, second gradient and classical continua*. Acta Mechanica, T. 225, nr 1, s. 157–177, 2014.
- [342] TRUESDELL C. A.: *The Mechanical Foundations of Elasticity and Fluid Dynamics*. Indiana Univ. Math. J., T. 1, nr 1, s. 125–300, 1952.
- [343] TRUESDELL C., i TOUPIN R.: *The Classical Field Theories*, Encyclopedia of Physics, Vol. III/1, (red.: Flügge S.) Springer Berlin Heidelberg, s. 226–858, 1960.
- [344] *Tworzywa gradientowe*: [https://pl.wikipedia.org/wiki/Tworzywa\\_gradientowe](https://pl.wikipedia.org/wiki/Tworzywa_gradientowe).
- [345] VALIZADEH N., NATARAJAN S., GONZALEZ-ESTRADA O. A., RABCZUK T., BUI T. Q., i BORDAS S. P. A.: *NURBS-based finite element analysis of functionally graded plates: Static bending, vibration, buckling and flutter*. Composite Structures, T. 99, s. 309–326, 2013.
- [346] VEVEAKIS M., STEFANO I., i SULEM J.: *Failure in shear bands for granular materials: thermo-hydro-chemo-mechanical effects*. Géotechnique Letters, T. 3, s. 31–36, 2013.
- [347] VLACHOUTSIS S.: *Shear correction factors for plates and shells*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, T. 33, nr 7, s. 1537–1552, 1992.
- [348] VU-QUOC L., i TAN X. G.: *Optimal solid shells for non-linear analyses of multilayer composites. I. Statics*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, T. 192, nr 9–10, s. 975–1016, 2003.
- [349] WAGNER W., i GRUTTMANN F.: *A robust non-linear mixed hybrid quadrilateral shell element*.

- International Journal for Numerical Methods in Engineering, T. 64, nr 5, s. 635–666, 2005.
- [350] WALI M., HAJLAOUI A., i DAMMAK F.: *Discrete double directors shell element for the functionally graded material shell structures analysis*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, T. 278, s. 388–403, 2014.
- [351] WANG C.-C., i TRUESDELL C. A.: *Introduction to rational elasticity*. Leyden: Noordhoff International Publishing, 1973.
- [352] WANG Z., i SUN Q.: *Corotational nonlinear analyses of laminated shell structures using a 4-node quadrilateral flat shell element with drilling stiffness*. Acta Mechanica Sinica, T. 30, nr 3, s. 418–429, 2014.
- [353] WASEEM A., BEVERIDGE A. J., WHEEL M. A., i NASH D. H.: *The influence of void size on the micropolar constitutive properties of model heterogeneous materials*. European Journal of Mechanics A/Solids, T. 40, s. 148–157, 2013.
- [354] WASHIZU K.: *Complementary Variational Principles in Elasticity and Plasticity*, [w:] Duality in Problems of the Mechanics of Deformed Bodies, s. 7–93, 1979.
- [355] WASHIZU K.: *On the variational principles of elasticity and plasticity*. Aeroelastic and Structures Research Laboratory Technical Report No. 25-18, Cambridge, 1955.
- [356] WASZCZYSZYN Z.: *Stability Problems and Methods of Analysis of Nonlinear FEM Equations*, Handbook of Computational Solid Mechanics. Part II: Finite Element Method, (red.: Kleiber M.) Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, s. 253–323, 1998.
- [357] WASZCZYSZYN Z., CICHON C., i RADWAŃSKA M.: *Metoda elementów skończonych w stateczności konstrukcji*. Warszawa: Arkady, 1990.
- [358] WEISSMAN S. L., i TAYLOR R. L.: *Mixed formulations for plate bending elements*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, T. 94, nr 3, s. 391–427, 1992.
- [359] WILSON E. L., TAYLOR R. L., DOHERTY W. P., i GHABOUSSI J.: *Incompatible Displacement Models*, Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics, Elsevier, s. 43–57, 1973.
- [360] WINKLER R., i PLAKOMYTIS D.: *A new shell finite element with drilling degrees of freedom and its relation to existing formulations*, [w:] ECCOMAS Congress 2016 - Proceedings of the 7th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, s. 1–40, 2016.
- [361] WISNIEWSKI K., i TURSKA E.: *Enhanced Allman quadrilateral for finite drilling rotations*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, T. 195, nr 44–47, s. 6086–6109, 2006.
- [362] WISNIEWSKI K., i TURSKA E.: *Four-node mixed Hu-Washizu shell element with drilling rotation*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, T. 90, nr 4, s. 506–536, 2012.
- [363] WISNIEWSKI K., i TURSKA E.: *Improved 4-node Hu–Washizu elements based on skew coordinates*. Computers and Structures, T. 87, nr 7–8, s. 407–424, 2009.
- [364] WISNIEWSKI K., i TURSKA E.: *Improved four-node Hellinger-Reissner elements based on skew coordinates*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, T. 76, nr 6, s. 798–836, 2008.
- [365] WISNIEWSKI K., i TURSKA E.: *Selected Topics on Mixed/Enhanced Four-Node Shell Elements with Drilling Rotation*, Shell-like Structures, Springer, s. 247–288, 2017.
- [366] WISNIEWSKI K., WAGNER W., TURSKA E., i GRUTTMANN F.: *Four-node Hu-Washizu elements based on skew coordinates and contravariant assumed strain*. Computers and Structures, T. 88, nr 21–22, s. 1278–1284, 2010.
- [367] WIŚNIEWSKI K.: *Finite Rotation Shells*. Barcelona: Springer, 2010.
- [368] WIŚNIEWSKI K.: *Finite rotations of shells and beams. Extended equations and numerical models*. Praca habilitacyjna, Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN, 1997.
- [369] WITKOWSKI W.: *4-node combined shell element with semi-EAS-ANS strain interpolations in 6-parameter shell theories with drilling degrees of freedom*. Computational Mechanics, T. 43, nr 2, s. 307–319, 2009.
- [370] WITKOWSKI W.: *Efektywny 4-węzłowy element skończony o wzbogaconym polu odkształceń w nieliniowej 6-parametrowej teorii powłok*. Praca doktorska, Politechnika Gdańska, 2004.
- [371] WITKOWSKI W.: *Synteza sformułowania nieliniowej mechaniki powłok podlegających skończonym obrotom w ujęciu MES*. Gdańsk: Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej, 2011.
- [372] WOO J., i MEGUID S. A.: *Nonlinear analysis of functionally graded plates and shallow shells*. International Journal of Solids and Structures, T. 38, nr 42–43, s. 7409–7421, 2001.
- [373] WOŹNIAK C.: *Nieliniowa teoria powłok*. Warszawa: PWN, 1966.
- [374] WRIGGERS P., i GRUTTMANN F.: *Thin shells with finite rotations formulated in biot stresses: Theory and finite element formulation*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, T. 36, nr 12, s. 2049–2071, 1993.
- [375] WRIGGERS P., i REESE S.: *A note on enhanced strain methods for large deformations*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, T. 135, nr 3–4, s. 201–209, 1996.

- [376] WU C.-C.: *Dual zero energy modes in mixed/hybrid elements—Definition, analysis and control*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, T. 81, nr 1, s. 39–56, 1990.
- [377] YANG J., i SHEN H.-S.: *Non-linear analysis of functionally graded plates under transverse and in-plane loads*. International Journal of Non-Linear Mechanics, T. 38, nr 4, s. 467–482, 2003.
- [378] YUAN K.-Y., HUANG Y.-S., i PIAN T. H. H.: *New strategy for assumed stresses for 4-node hybrid stress membrane element*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, T. 36, nr 10, s. 1747–1763, 1993.
- [379] ZHANG C., ZHANG N., SONG Q., i DI S.: *A 4-noded hybrid stress element with optimized stress for moderately thick and thin shallow shells*. Finite Elements in Analysis and Design, T. 40, nr 7, s. 691–709, 2004.
- [380] ZHANG D. G., i ZHOU Y. H.: *A theoretical analysis of FGM thin plates based on physical neutral surface*. Computational Materials Science, T. 44, nr 2, s. 716–720, 2008.
- [381] ZHANG Y., HUANG H., i HAN Q.: *Buckling of elastoplastic functionally graded cylindrical shells under combined compression and pressure*. Composites Part B: Engineering, T. 69, s. 120–126, 2015.
- [382] ZIA R. K. P., REDISH E. F., i MCKAY S. R.: *Making Sense of the Legendre Transform*. Am. J. Phys, T. 77, nr 7, s. 614–622, 2009.
- [383] ZIENKIEWICZ O. C., i LEFEBVRE D.: *Three-field mixed approximation and the plate bending problem*. Communications in Applied Numerical Methods, T. 3, nr 4, s. 301–309, 1987.
- [384] ZIENKIEWICZ O. C., i TAYLOR R. L.: *The Finite Element Method. Fifth edition, Volume 1: The Basis*. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2002.
- [385] ZIENKIEWICZ O. C., TAYLOR R. L., i TOO J. M.: *Reduced integration technique in general analysis of plates and shells*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, T. 3, nr 2, s. 275–290, 1971.

## Dodatek A

# FORMALNY OPIS OBROTÓW

## A.1. Podstawowe definicje, twierdzenia

### A.1.1. Tensor ortogonalny

Tensor drugiego rzędu  $\mathbf{Q} \in E^n \otimes E^n$  nazywany jest ortogonalnym jeśli spełnia warunek

$$\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{1}. \quad (\text{A.1})$$

Zbiór wszystkich tensorów ortogonalnych drugiego rzędu w Euklidesowej przestrzeni tensorowej  $E^n \otimes E^n$  tworzy grupę oznaczaną przez  $O(n)$ . Tensor ortogonalny  $\mathbf{Q}$  ma następujące własności:

1. zachowuje iloczyn skalarny wektorów  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in E^n$ ,

$$(\mathbf{Q}\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{Q}\mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}\mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}; \quad (\text{A.2})$$

2. nie zmienia długości wektora:  $\|\mathbf{Q}\mathbf{a}\| = \|\mathbf{a}\|$ ;

3. jego wyznacznik spełnia warunek  $\det \mathbf{Q} = \pm 1$ .

### A.1.2. Definicja tensora obrotu, grupa obrotów $SO(3)$

Każde przekształcenie liniowe w trójwymiarowej przestrzeni Euklidesowej postaci

$$\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}_0, \mathbf{x} \in E^3, \quad (\text{A.3})$$

gdzie  $\mathbf{Q}$  jest tensorem ortogonalnym, nazywane jest obrotem właściwym (tensorem obrotu).

Zbiór wszystkich tensorów ortogonalnych  $\mathbf{Q}: E^3 \rightarrow E^3$ , o wyznaczniku równym 1, tworzy specjalną grupę obrotów właściwych, oznaczaną jako grupa  $SO(3)$ . Tensor obrotu  $\mathbf{Q} \in SO(3)$  posiada własności tensora ortogonalnego i dodatkowo zachowuje skrętność układu, kąt między wektorami oraz iloczyn wektorowy.

Macierz obrotu definiuje się analogicznie jak tensor obrotu. Obrót ortonormalnej bazy  $\mathbf{t}^0 = [\mathbf{t}_1^0, \mathbf{t}_2^0, \mathbf{t}_3^0]$  do bazy  $\mathbf{t} = [\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3]$  można zapisać w następujący sposób:

$$\mathbf{t} = \mathbf{Q}\mathbf{t}^0, \quad \mathbf{t}_i = q_{ij}\mathbf{t}_j^0, \quad (\text{A.4})$$

gdzie  $\mathbf{Q}$  jest ortogonalną macierzą obrotu, której 9 elementów jest zdefiniowanych następująco:  $q_{ij} = \mathbf{t}_i^0 \cdot \mathbf{t}_j$ . Macierz obrotu jest równa macierzy transponowanej do macierzy transformacji (kosinusów kierunkowych), która opisuje transformację wektora z jednej bazy do drugiej bazy. W dalszej części Dodatku używany będzie tylko tensor obrotu  $\mathbf{Q}$ , którego reprezentacją jest macierz obrotu  $\mathbf{Q}$ .

### A.1.3. Twierdzenie Eulera o obrotach

Zgodnie z twierdzeniem Eulera [110], dla każdego obrotu właściwego wokół punktu istnieje wektor jednostkowy  $\mathbf{e}$  definiujący oś obrotu oraz kąt  $w$  (zob. rys. A.1) taki, że obrót wektora  $\mathbf{x}_0 \in E^3$  względem osi obrotu o kąt  $w$  jest równoważny obrotowi właściwemu wektora  $\mathbf{x}_0$  wokół punktu. Wektor  $\mathbf{e}$  jest równoległy do wektora własnego tensora obrotu  $\mathbf{Q}$ .

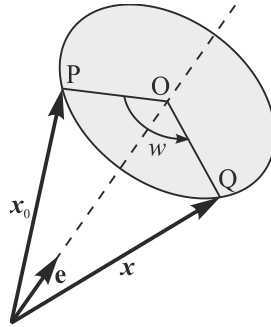
Korzystając z twierdzenia Eulera, zależność między wektorem  $\mathbf{x}_0$  i wektorem obróconym  $\mathbf{x}$  można zapisać następująco (por. rys. A.1):

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \overline{PQ}. \quad (\text{A.5})$$

W wyniku prostych przekształceń geometrycznych (zob. np. [290]) wzór (A.5) przyjmuje postać

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + (1 - \cos w)\mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{x}_0) + \sin w \mathbf{e} \times \mathbf{x}_0. \quad (\text{A.6})$$

Na podstawie równania (A.6) można wyznaczyć tensor obrotu  $\mathbf{Q}$ , co zostanie wykonane w dalszej części Dodatku.



Rys. A.1. Interpretacja graficzna twierdzenia Eulera, obrót wektora  $\mathbf{x}$  wokół osi  $\mathbf{e}$

#### A.1.4. Tensor skośnie symetryczny

Tensor drugiego rzędu  $\mathbf{W}$  o następującej własności:

$$\mathbf{W}^T = -\mathbf{W}, \quad \mathbf{W} \in E^3 \otimes E^3, \quad (\text{A.7})$$

nazywany jest tensorem skośnie symetrycznym. Korzystając z własności (A.7) oraz własności tensora transponowanego, można łatwo pokazać, że dla wektorów  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in E^3$  zachodzą zależności:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{W}\mathbf{b}) = -\mathbf{b} \cdot (\mathbf{W}\mathbf{a}), \quad \mathbf{a} \cdot (\mathbf{W}\mathbf{a}) = 0. \quad (\text{A.8})$$

Na podstawie własności (A.7) tensor skośnie symetryczny w składowych przyjmuje postać

$$[W_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.9})$$

Wtedy wektor osiowy  $\mathbf{w}$  tensora skośnie symetrycznego  $\mathbf{W}$  definiuje się następująco:

$$[w_i] = [w_1 \ w_2 \ w_3]^T. \quad (\text{A.10})$$

#### A.1.5. Przestrzeń styczna do grupy $SO(3)$ , odwzorowanie $\text{ad}(\dots)$

Interpretując grupę obrotów  $SO(3)$  jako zakrzywioną hiperpowierzchnię, można wykazać, że przestrzenią styczną do tej powierzchni w punkcie spełniającym warunek  $\mathbf{Q} = \mathbf{1}$  jest przestrzeń tensorów skośnie symetrycznych:

$$so(3) = \{\mathbf{W} : E^3 \rightarrow E^3, \mathbf{W}^T = -\mathbf{W}\}. \quad (\text{A.11})$$

Ze względu na to, że przestrzeń ta jest styczna do punktu neutralnego powierzchni, odpowiadającego obrotowi zerowemu, to elementy  $so(3)$  można interpretować jako małe (infinitesimalne) obroty.

Odwzorowanie  $\text{ad}(\dots)$  przyporządkowuje dowolnemu wektorowi  $\mathbf{w} \in E^3$  (A.10) tensor  $\mathbf{W} \in so(3)$  (A.9), zatem definiuje się je jako  $\text{ad} : E^3 \rightarrow so(3)$ . Spełnione są zależności:

$$\text{ad} : \mathbf{w} \rightarrow \mathbf{W}, \quad \mathbf{W} = \text{ad}(\mathbf{w}), \quad \mathbf{w} = \text{ad}^{-1}(\mathbf{W}), \quad [W_{ij}] = \text{ad}([w_i]). \quad (\text{A.12})$$

Ze względu na to, że  $\mathbf{w}$  jest wektorem osiowym tensora  $\mathbf{W}$ , dla każdego wektora  $\mathbf{a} \in E^3$  obowiązuje następująca zależność:

$$\mathbf{W}\mathbf{a} = \mathbf{w} \times \mathbf{a} = \text{ad}(\mathbf{w})\mathbf{a}. \quad (\text{A.13})$$



## A.2. Opis kanonicznej parametryzacji grupy obrotów

### A.2.1. Wprowadzenie

Parametryzacją grupy obrotów  $SO(3)$  [66] nazywa się odwzorowanie:

$$\mathbf{Q} \rightarrow q_i, \quad \mathbf{Q} \in SO(3), \quad q_i \in \mathbb{R}^n, \quad (\text{A.14})$$

gdzie  $n$  jest liczbą tzw. parametrów obrotu  $q_i$ . W ogólnym przypadku macierz obrotu posiada 9 elementów, jednak wykorzystanie własności tensora  $\mathbf{Q}$  z grupy obrotów  $SO(3)$ ,

$$\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T, \quad \det \mathbf{Q} = +1, \quad (\text{A.15})$$

sprawia, że tylko 3 parametry obrotu są niezależne. W przypadku parametryzacji zewnętrznej (np. kątami Eulera), oprócz podania parametrów konieczne jest określenie układu współrzędnych.

W literaturze [323] wyróżnia się dwa podstawowe rodzaje parametryzacji: globalną i lokalną. Parametryzacja globalna opisuje w sposób nieosobliwy całą grupę  $SO(3)$ , natomiast parametryzacja lokalna może być stosowana tylko w pewnym otoczeniu tensora  $\mathbf{Q}$ . W pracach [154, 323] wykazano, że potrzeba minimum pięciu parametrów obrotu, aby opisać w sposób nieosobliwy tensor obrotu. W praktycznych zastosowaniach najczęściej stosowane są jednak parametryzacje lokalne, gdyż wymagają one tylko trzech lub ewentualnie czterech parametrów, a zakres wartości, który może przyjmować kąt obrotu  $w$  jest wystarczający i np. dla parametryzacji kanonicznej wynosi  $(-2\pi, 2\pi)$  [264].

W pracy [89] zawarto historyczny przegląd pierwszych prac poświęconych parametryzacji obrotów. Parametryzacje globalne: sześcioparametrowa i pięcioparametrowa zostały opisane m.in. w [290, 323]. W pracach [142, 271] omówiono parametryzację tensora obrotu za pomocą kwaternionów Hamiltona. Natomiast parametryzacje trójparametrowe różnią się głównie sposobem przyjęcia pseudowektora rotacji  $\mathbf{w}$  dla tensora  $\mathbf{W}$ . Do opisu ośrodka Cosseratów stosuje się najczęściej [264]: parametryzację kanoniczną ( $\mathbf{w} = w\mathbf{e}$ ), parametryzację Rodriguesa ( $\mathbf{w} = \tan \frac{w}{2} \mathbf{e}$ ), parametryzację Cayleya-Gibbsa ( $\mathbf{w} = 2 \tan \frac{w}{2} \mathbf{e}$ ) oraz parametryzację ( $\mathbf{w} = \sin w \mathbf{e}$ ) opisaną m.in. w pracach [258, 262]. W dalszej części Dodatku opisano jedynie parametryzację kanoniczną, gdyż to ona została zastosowana w programie autorskim w trakcie obliczeń. Omówienie innych parametryzacji wraz z ich zastosowaniem w mechanice powłok można znaleźć m.in. w pracach: [29, 68, 166, 167, 209, 220, 262, 264, 290, 368, 370].

### A.2.2. Parametryzacja kanoniczna

Równanie (A.6) można zapisać w następujący sposób:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \frac{1 - \cos w}{w^2} w\mathbf{e} \times (w\mathbf{e} \times \mathbf{x}_0) + \frac{\sin w}{w} w\mathbf{e} \times \mathbf{x}_0. \quad (\text{A.16})$$

W celu uzyskania parametryzacji kanonicznej wprowadza się do niego tzw. kanoniczny pseudowektor rotacji  $\mathbf{w} = w\mathbf{e}$  tensora skośnie symetrycznego  $\mathbf{W}$ , gdzie  $\mathbf{e}$  jest wersorem osi obrotu, a  $w$  kątem obrotu (rys. A.1). Wtedy wzór (A.16) upraszcza się do postaci

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \frac{1 - \cos w}{w^2} \mathbf{W}^2 \mathbf{x}_0 + \frac{\sin w}{w} \mathbf{W} \mathbf{x}_0, \quad (\text{A.17})$$

na podstawie której uzyskuje się reprezentację kanoniczną tensora obrotu

$$\mathbf{Q} = \mathbf{1} + a\mathbf{W} + b\mathbf{W}^2, \quad (\text{A.18})$$

gdzie

$$\mathbf{W} = \text{ad}(\mathbf{w}) \in so(3), \quad a = \frac{\sin w}{w}, \quad b = \frac{1 - \cos w}{w^2}. \quad (\text{A.19})$$

Zatem reprezentacja kanoniczna jest określona jednoznacznie przez 3 parametry: składowe pseudowektora obrotu  $\mathbf{w}$ , gdyż  $w = \|\mathbf{w}\| = \sqrt{\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}}$ . Z równania (A.18) można wyznaczyć kąt obrotu  $w$  i wektor  $\mathbf{w}$  jako funkcje tensora obrotu  $\mathbf{Q}$ :

$$w = \arccos\left(\frac{1}{2}(\text{tr}\mathbf{Q} - 1)\right), \quad \mathbf{w} = \frac{1}{2\sin w} \text{ad}^{-1}(\mathbf{Q} - \mathbf{Q}^T). \quad (\text{A.20})$$

Tensor obrotu (A.18) można zapisać jeszcze w inny sposób. W tym celu zastępuje się  $\sin w$  i  $\cos w$  ich rozwinięciami w szereg Maclaurina [185] oraz korzysta z następujących zależności dla tensora skośnie symetrycznego  $\mathbf{W}$ :

$$\mathbf{W}^{2n} = (-1)^{n-1} \|\mathbf{w}\|^{2n-2} \mathbf{W}^2, \quad \mathbf{W}^{2n+1} = (-1)^n \|\mathbf{w}\|^{2n} \mathbf{W}. \quad (\text{A.21})$$

Wtedy ze wzoru (A.18) uzyskuje się postać eksponenty tensora  $\mathbf{Q}$

$$\mathbf{Q} = \exp \mathbf{W} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{W}^n}{n!} = \mathbf{1} + \mathbf{W} + \frac{1}{2} \mathbf{W}^2 + \dots, \quad (\text{A.22})$$

z której wynika, że dla tensora skośnie symetrycznego  $\mathbf{W} \in \mathfrak{so}(3)$  zachodzi  $\exp \mathbf{W} \in \text{SO}(3)$ .

### A.2.3. Akumulacja obrotów

Zależność między pewną początkową bazą  $\mathbf{t}^0$  i aktualną bazą  $\mathbf{t}$  można opisać za pomocą tensora obrotu  $\mathbf{t} = \mathbf{Q}\mathbf{t}^0$  (por. (A.4)). Rozpatrując obrót bazy  $\mathbf{t}$  do pewnej bazy uaktualnionej  $\mathbf{t}'$ , przyrost obrotu  $\Delta\mathbf{Q}$  wyraża się w inny sposób w reprezentacji materialnej i reprezentacji przestrzennej.

W reprezentacji przestrzennej obrót bazy  $\mathbf{t}^0$  do bazy  $\mathbf{t}'$  opisuje się przez lewostronne nałożenie przyrostu tensora obrotu  $\Delta\mathbf{Q}^L \in \text{SO}(3)$  na tensor obrotu  $\mathbf{Q}$  tzn.:

$$\mathbf{Q}^\Delta = \Delta\mathbf{Q}^L \mathbf{Q}, \quad \mathbf{t}' = \Delta\mathbf{Q}^L \mathbf{t} = \Delta\mathbf{Q}^L \mathbf{Q} \mathbf{t}^0. \quad (\text{A.23})$$

Zatem przyrost obrotu rozumie się jako rotację bazy aktualnej  $\mathbf{t}$  do bazy uaktualnionej  $\mathbf{t}'$ .

W reprezentacji materialnej obrót bazy  $\mathbf{t}^0$  do bazy  $\mathbf{t}'$  opisuje się przez prawostronne nałożenie przyrostu tensora obrotu  $\Delta\mathbf{Q}^P \in \text{SO}(3)$  na tensor obrotu  $\mathbf{Q}$  tzn.:

$$\mathbf{Q}^\Delta = \mathbf{Q} \Delta\mathbf{Q}^P, \quad \mathbf{t}' = \mathbf{Q} \mathbf{t}' = \mathbf{Q} \Delta\mathbf{Q}^P \mathbf{t}^0. \quad (\text{A.24})$$

Zatem przyrost obrotu rozumie się jako rotację bazy początkowej  $\mathbf{t}^0$  do pewnej bazy  $\mathbf{t}'$ .

Niech dla pewnego tensora obrotu  $\Psi$ :  $\Delta\psi$  i  $\Delta\Psi$  oznaczają odpowiednio przyrosty wektora obrotu w reprezentacji przestrzennej oraz materialnej. Wtedy po wykorzystaniu (A.22):  $\Delta\mathbf{Q}^L = \exp(\text{ad}\Delta\psi)$ ,  $\Delta\mathbf{Q}^P = \exp(\text{ad}\Delta\Psi)$  i przyrównaniu zależności (A.23) i (A.24) uzyskuje się (por. [209]) następujące równanie:

$$\Delta\psi = \mathbf{Q} \Delta\Psi, \quad (\text{A.25})$$

wyrażające zależność między przyrostami wektorów obrotu  $\Delta\psi$  i  $\Delta\Psi$  w dwóch reprezentacjach.

## A.3. Interpolacja tensora obrotu i wektora wirtualnego obrotu

### A.3.1. Wprowadzenie

W przypadku elementów grupy obrotów  $\text{SO}(3)$  niemożliwe jest zastosowanie standardowej interpolacji opisaną w podrozdziale 5.2, gdyż w wyniku bezpośredniej interpolacji uzyskuje się obiekt nie należący do grupy  $\text{SO}(3)$ . W związku z tym w nieliniowej 6-parametrowej teorii powłok stosuje się algorytm interpolacji pośredniej, który został opisany w pracach [68, 70]. Następnie w pracy [62] schemat ten został rozwinięty w celu zwiększenia dokładności interpolacji [68], co było możliwe dzięki przesunięciu  $\mathbf{Q}$  i wykonaniu interpolacji w otoczeniu elementu neutralnego grupy  $\mathbf{1} \in \text{SO}(3)$ . Schemat interpolacji tensora obrotu nie zależy od sposobu parametryzacji grupy obrotów  $\text{SO}(3)$ , a więc może zostać zastosowana w nim dowolna globalna parametryzacja lub wybrana parametryzacja

lokalna. W rozprawie do obliczeń zastosowano parametryzację kanoniczną, uznaną za najlepszą parametryzację w ramach opisywanej nieliniowej teorii powłok [68].

### A.3.2. Interpolacja na grupie obrotów $SO(3)$

Schemat interpolacji na grupie obrotów został opisany m.in. w pracach [62, 66, 370]. Poniżej przedstawiono zasadnicze kroki algorytmu dla będącego przedmiotem rozprawy 4-węzłowego elementu powłokowego:

1. Ustalenie pewnego „średniego” reprezentanta  $\bar{Q} \in SO(3)$  dla zbioru wartości węzłowych  $Q_a = Q(\xi_a) \in U \subset SO(3)$ , ( $a = 1, \dots, 4$ ).

2. Obrót (przecignięcie) wartości dyskretnych  $Q_a$  z węzłów w otoczenie elementu neutralnego  $\mathbf{1} \in SO(3)$  przy pomocy  $\bar{Q}^T \in SO(3)$ ,

$$R_a = \bar{Q}^T Q_a. \quad (A.26)$$

3. Wyznaczenie w każdym węzle wektora obrotu  $\varphi_a$  na podstawie „przecigniętego” tensora  $R_a$ . W tym celu w parametryzacji kanonicznej wykorzystuje się równania analogiczne do (A.20):

$$\varphi_a = \arccos\left(\frac{1}{2}(\text{tr}R_a - 1)\right), \quad \varphi_a = \frac{1}{2\sin\varphi_a} \text{ad}^{-1}(R_a - R_a^T). \quad (A.27)$$

4. Interpolacja współrzędnych wektora obrotu  $\tilde{\varphi}(\xi)$  i jego pochodnych  $\tilde{\varphi}(\xi)_{,\beta}$  jako elementów  $R^3$  na podstawie wzoru (5.3):

$$\tilde{\varphi}(\xi) = \sum_{a=1}^4 L_a(\xi) \varphi_a, \quad \tilde{\varphi}(\xi)_{,\beta} = \sum_{a=1}^4 L_{a,\beta}(\xi) \varphi_a. \quad (A.28)$$

5. Wyznaczenie funkcji interpolujących  $\tilde{R}(\xi)$  i  $\tilde{R}(\xi)_{,\beta}$  na podstawie tensorów skośnie symetrycznych  $\tilde{\Phi}(\xi) = \text{ad}\tilde{\varphi}(\xi)$  i  $\tilde{\Phi}(\xi)_{,\beta} = \text{ad}(\tilde{\varphi}(\xi)_{,\beta})$ . W parametryzacji kanonicznej korzysta się z następujących wzorów analogicznych do (A.18) i (A.19):

$$\tilde{R}(\xi) = \mathbf{1} + \tilde{a}(\xi)\tilde{\Phi}(\xi) + \tilde{b}(\xi)\tilde{\Phi}(\xi)^2, \quad (A.29)$$

$$\tilde{R}(\xi)_{,\beta} = \tilde{a}(\xi)_{,\beta}\tilde{\Phi}(\xi) + \tilde{a}(\xi)\tilde{\Phi}(\xi)_{,\beta} + \tilde{b}(\xi)_{,\beta}\tilde{\Phi}(\xi)^2 + \tilde{b}(\xi)(\tilde{\Phi}(\xi)_{,\beta}\tilde{\Phi}(\xi) + \tilde{\Phi}(\xi)\tilde{\Phi}(\xi)_{,\beta}), \quad (A.30)$$

gdzie

$$\tilde{a}(\xi) = \frac{\sin\tilde{\varphi}(\xi)}{\tilde{\varphi}(\xi)}, \quad \tilde{b}(\xi) = \frac{1 - \cos\tilde{\varphi}(\xi)}{\tilde{\varphi}(\xi)^2}, \quad \tilde{\varphi}(\xi) = \|\tilde{\varphi}(\xi)\|, \quad (A.31)$$

$$\tilde{a}(\xi)_{,\beta} = \frac{\cos\tilde{\varphi}(\xi) - \tilde{a}(\xi)}{\tilde{\varphi}(\xi)^2} \tilde{\varphi}(\xi) \cdot \tilde{\varphi}(\xi)_{,\beta}, \quad \tilde{b}(\xi)_{,\beta} = \frac{-2\tilde{b}(\xi) - \tilde{a}(\xi)}{\tilde{\varphi}(\xi)^2} \tilde{\varphi}(\xi) \cdot \tilde{\varphi}(\xi)_{,\beta}. \quad (A.32)$$

6. Obrót z powrotem (popchnięcie) funkcji  $\tilde{R}(\xi)$  i  $\tilde{R}(\xi)_{,\beta}$  do położenia początkowego  $U \subset SO(3)$  przy pomocy  $\bar{Q} \in SO(3)$  tzn.:

$$\tilde{Q}(\xi) = \bar{Q}\tilde{R}(\xi), \quad \tilde{Q}(\xi)_{,\beta} = \bar{Q}\tilde{R}(\xi)_{,\beta} \quad (A.33)$$

Z zależności (A.33) wynika, że funkcje  $\tilde{Q}(\xi)$  i  $\tilde{Q}(\xi)_{,\beta}$  należą do grupy obrotów  $SO(3)$ , a więc opisana procedura jest działaniem wewnętrznym w grupie obrotów  $SO(3)$ . Przedstawiony schemat interpolacji znacząco ogranicza problem osobliwości dla parametryzacji lokalnej, gdyż pozwala zastosować w ramach jednego elementu skończonego względną zmienność najeżenia mniejszą od tej na półsferze. Ponadto opisany schemat interpolacji nie dotyczy tylko tensora obrotu  $Q$ , ale może zostać zastosowany również dla tensorów struktury:  $T_0, T, T_{,\beta} \in SO(3)$ .

### A.3.3. Interpolacja wektora wirtualnego obrotu

Interpolację wektora wirtualnego obrotu  $\mathbf{w}(\xi)$  przeprowadza się w inny sposób niż dla elementów grupy  $SO(3)$ , gdyż wektor  $\mathbf{w}$  należy do przestrzeni stycznej do grupy obrotów  $T_Q SO(3)$ . Trzy możliwe sposoby interpolacji: pośrednia lokalna, bezpośrednia w bazie aktualnej oraz bezpośrednia w stałej bazie globalnej zostały szczegółowo opisane m.in. w [62, 67].

W niniejszej rozprawie zastosowano bezpośrednią interpolację wektora wirtualnego obrotu  $\mathbf{w}(\xi)$  w stałej bazie globalnej  $\mathbf{e}_i$ . W celu określenia schematu interpolacyjnego zapisuje się wektor  $\mathbf{w}(\xi)$  w lokalnej bazie korotującej  $\mathbf{t}_i$  oraz w bazie globalnej  $\mathbf{e}_i$ , wykorzystując transformację  $\mathbf{T} : \mathbf{e}_i \rightarrow \mathbf{t}_i$ ,

$$\mathbf{w}(\xi) = w_i(\xi)\mathbf{t}_i(\xi) = \bar{w}_j(\xi)\mathbf{e}_j = \bar{w}_j(\xi)\mathbf{T}^T(\xi)\mathbf{t}_j(\xi). \quad (\text{A.34})$$

Z zależności (A.34) wynika relacja  $w_i(\xi) = \mathbf{T}(\xi)\bar{w}_i(\xi) = T_{ji}(\xi)\bar{w}_j(\xi)$ . Zastosowanie interpolacji bezpośredniej dla  $\bar{w}_j(\xi)$  pozwala zapisać interpolację  $\mathbf{w}(\xi)$  w następujący sposób:

$$\tilde{\mathbf{w}}(\xi) = \begin{Bmatrix} \tilde{w}_1(\xi) \\ \tilde{w}_2(\xi) \\ \tilde{w}_3(\xi) \end{Bmatrix} = \mathbf{T}(\xi) \sum_{a=1}^4 L_a(\xi) \begin{Bmatrix} \bar{w}_{1a}(\xi) \\ \bar{w}_{2a}(\xi) \\ \bar{w}_{3a}(\xi) \end{Bmatrix}. \quad (\text{A.35})$$

Ze względu na to, że wszystkie składowe wektora wirtualnego obrotu są odnoszone do stałej bazy globalnej, to opisany wariant interpolacji ma charakter reprezentacji materialnej. Zastosowane podejście pozwala na bezpośrednie łączenie różnych płatów powłoki wielogałęziowej, jednak z drugiej strony wymaga wyznaczenia elementów  $\mathbf{T}(\xi)$  zgodnie z procedurą opisaną w paragrafie A.3.2.

## Dodatek B

### WYBRANE ASPEKTY PROCEDURY PRZYROSTOWO-ITERACYJNEJ

#### B.1. Linearyzacja zasady przemieszczeń wirtualnych

W celu pokazania specyfiki nieliniowej 6-parametrowej teorii powłok na podstawie prac [62, 370] zaprezentowano poniżej proces linearyzacji dla zasady przemieszczeń wirtualnych.

Funkcjonał wewnętrznej pracy wirtualnej dany wzorami (2.33) i (3.25) w otoczeniu punktu  $\mathbf{u} \in \mathbf{U}_A$  przyjmuje postać

$$G_i[\mathbf{u}(\eta); \mathbf{w}] = \iint_M \delta \boldsymbol{\varepsilon}(\eta)^T \mathbf{s}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(\eta))) da = \iint_M \left[ \mathbf{n}^\beta(\eta) \cdot (\mathbf{v}_{,\beta} + (\mathbf{y}_{,\beta} + \eta \Delta \mathbf{u}_{,\beta}) \times \mathbf{w}) + \mathbf{m}^\beta(\eta) \cdot \mathbf{w}_{,\beta} \right] da. \quad (\text{B.1})$$

Obliczenie jego pochodnej kierunkowej prowadzi do wyrażenia

$$\delta G_i[\mathbf{u}; \Delta \mathbf{u}, \mathbf{w}] = \iint_M \left[ \delta \mathbf{n}^\beta \cdot (\mathbf{v}_{,\beta} + \mathbf{y}_{,\beta} \times \mathbf{w}) + \mathbf{n}^\beta \cdot (\Delta \mathbf{u}_{,\beta} \times \mathbf{w}) + \delta \mathbf{m}^\beta \cdot \mathbf{w}_{,\beta} \right] da. \quad (\text{B.2})$$

Wariacje naprężeń uogólnionych  $\delta \mathbf{n}^\beta$  i  $\delta \mathbf{m}^\beta$ , wyznaczone jako pochodne kierunkowe w reprezentacji przestrzennej, przyjmują postać

$$\delta \mathbf{s} = \begin{Bmatrix} \delta \mathbf{n}^\beta \\ \delta \mathbf{m}^\beta \end{Bmatrix} = \frac{d}{d\eta} \mathbf{s}(\boldsymbol{\varepsilon}(\eta)) \Big|_{\eta=0} = \Delta \mathbf{s} + \Delta \boldsymbol{\psi} \times \mathbf{s} = \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{n}^\beta + \Delta \boldsymbol{\psi} \times \mathbf{n}^\beta \\ \Delta \mathbf{m}^\beta + \Delta \boldsymbol{\psi} \times \mathbf{m}^\beta \end{Bmatrix}, \quad (\text{B.3})$$

gdzie przyrosty  $\Delta \mathbf{n}^\beta$  i  $\Delta \mathbf{m}^\beta$  oblicza się na podstawie równań konstytutywnych (3.23) z zależności

$$\Delta \mathbf{s} = \mathbf{C} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (\text{B.4})$$

Występujące w (B.4) zlinearyzowane miary odkształceń  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$  wyznacza się jako pochodne korotacyjne (względem obracającej się bazy  $\mathbf{t}_i$ ) w punkcie  $\mathbf{u} \in \mathbf{U}_A$

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_\beta \equiv d\boldsymbol{\varepsilon}_\beta(\eta) \Big|_{\eta=0} = \Delta \mathbf{u}_{,\beta} + \mathbf{y}_{,\beta} \times \Delta \boldsymbol{\psi}, \quad \Delta \boldsymbol{\kappa}_\beta \equiv d\boldsymbol{\kappa}_\beta(\eta) \Big|_{\eta=0} = \Delta \boldsymbol{\psi}_{,\beta}. \quad (\text{B.5})$$

Wyrażenia (B.5) pokazują, że  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_\beta$  i  $\Delta \boldsymbol{\kappa}_\beta$  przyjmują analogiczną postać do tej danej wzorem (3.15) dla wirtualnych miar odkształceń.

Po wstawieniu zależności (B.3) do (B.2) zlinearyzowany funkcyjonał przyjmuje postać

$$\begin{aligned} \delta G_i[\mathbf{u}; \Delta \mathbf{u}, \mathbf{w}] &= \iint_M (\Delta \sigma_M + \Delta \sigma_G) da = \iint_M \mathbf{w}^T (\mathbf{K}_M + \mathbf{K}_G) \Delta \mathbf{u} da = \\ &= \iint_M \left[ (\Delta \mathbf{n}^\beta + \Delta \boldsymbol{\psi} \times \mathbf{n}^\beta) \cdot (\mathbf{v}_{,\beta} + \mathbf{y}_{,\beta} \times \mathbf{w}) + \mathbf{n}^\beta \cdot (\Delta \mathbf{u}_{,\beta} \times \mathbf{w}) + (\Delta \mathbf{m}^\beta + \Delta \boldsymbol{\psi} \times \mathbf{m}^\beta) \cdot \mathbf{w}_{,\beta} \right] da, \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

gdzie za pomocą  $\Delta \sigma_M$  oznaczono część materialną, a za pomocą  $\Delta \sigma_G$  część geometryczną operatora stycznego. Część materialna wynika z linearyzacji naprężeń uogólnionych

$$\Delta \sigma_M = \Delta \mathbf{n}^\beta \cdot (\mathbf{v}_{,\beta} + \mathbf{y}_{,\beta} \times \mathbf{w}) + \Delta \mathbf{m}^\beta \cdot \mathbf{w}_{,\beta} = \Delta \mathbf{n}^\beta \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}_\beta + \Delta \mathbf{m}^\beta \cdot d\boldsymbol{\kappa}_\beta, \quad (\text{B.7})$$

natomiast część geometryczna wynika ze zmian w geometrii (linearyzacji wirtualnych odkształceń)

$$\Delta \sigma_G = (\Delta \boldsymbol{\psi} \times \mathbf{n}^\beta) \cdot (\mathbf{v}_{,\beta} + \mathbf{y}_{,\beta} \times \mathbf{w}) + \mathbf{n}^\beta \cdot (\Delta \mathbf{u}_{,\beta} \times \mathbf{w}) + (\Delta \boldsymbol{\psi} \times \mathbf{m}^\beta) \cdot \mathbf{w}_{,\beta}. \quad (\text{B.8})$$

Po uwzględnieniu zależności (3.15) wyrażenie (B.8) można zapisać następująco

$$\Delta \sigma_G = \mathbf{n}^\beta \cdot \left[ d\boldsymbol{\varepsilon}_\beta \times \Delta \boldsymbol{\psi} + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_\beta \times \boldsymbol{\psi} + (\boldsymbol{\psi} \times \Delta \boldsymbol{\psi}) \times (\mathbf{t}_\beta + \boldsymbol{\varepsilon}_\beta) \right] + \mathbf{m}^\beta \cdot (d\boldsymbol{\kappa}_\beta \times \Delta \boldsymbol{\psi}). \quad (\text{B.9})$$

W notacji macierzowo-operatorowej część materialna i geometryczna operatora stycznego przyjmują postać przydatną w dalszej części rozprawy w sformułowaniu elementu skończonego

$$\begin{aligned}\Delta\sigma_M &= \delta\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})^T \Delta\mathbf{s} = \mathbf{w}^T \mathbf{B}^T \mathbf{C} \Delta\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{w}^T \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} \Delta\mathbf{u} = \mathbf{w}^T \mathbf{k}_M \Delta\mathbf{u}, \\ \Delta\sigma_G &= \delta\Delta\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})^T \mathbf{s} = \mathbf{w}^T \mathbf{k}_G \Delta\mathbf{u},\end{aligned}\quad (\text{B.10})$$

gdzie za pomocą  $\mathbf{k}_M$  oznaczono materialną macierz sztywności, a za pomocą  $\mathbf{k}_G$  macierz geometryczną, której jawna postać została zaprezentowana w Dodatku C.2.3.

Funkcjonał zewnętrznej pracy wirtualnej dany wzorami (2.33) i (3.26) w otoczeniu punktu  $\mathbf{u} \in \mathbf{U}_A$  przyjmuje postać

$$\begin{aligned}G_e[\mathbf{u}(\eta); \mathbf{w}] &= \iint_M \mathbf{w}^T \mathbf{p}(\eta) da + \int_{\partial M_f} \mathbf{w}^T \mathbf{s}^*(\eta) dl \\ &= \iint_M (f(\eta) \cdot \mathbf{v} + \mathbf{c}(\eta) \cdot \mathbf{w}) da + \int_{\partial M_f} (\mathbf{n}^*(\eta) \cdot \mathbf{v} + \mathbf{m}^*(\eta) \cdot \mathbf{w}) dl.\end{aligned}\quad (\text{B.11})$$

Tymczasem pochodną kierunkową funkcjonału (B.11) można zapisać następująco

$$\delta G_e[\mathbf{u}; \Delta\mathbf{u}, \mathbf{w}] = \iint_M (\delta f \cdot \mathbf{v} + \delta \mathbf{c} \cdot \mathbf{w}) da + \int_{\partial M_f} (\delta \mathbf{n}^* \cdot \mathbf{v} + \delta \mathbf{m}^* \cdot \mathbf{w}) dl. \quad (\text{B.12})$$

Występujące w wyrażeniu (B.12) pochodne obciążeń zewnętrznych wyznacza się ze wzorów

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{p} &= \left\{ \begin{array}{l} \delta f \\ \delta \mathbf{c} \end{array} \right\} \equiv \delta \mathbf{p}[\mathbf{u}; \Delta\mathbf{u}] = \left. \frac{d}{d\eta} \mathbf{p}[\mathbf{u}(\eta)] \right|_{\eta=0}, \\ \delta \mathbf{s}^* &= \left\{ \begin{array}{l} \delta \mathbf{n}^* \\ \delta \mathbf{m}^* \end{array} \right\} \equiv \delta \mathbf{s}^*[\mathbf{u}; \Delta\mathbf{u}] = \left. \frac{d}{d\eta} \mathbf{s}^*[\mathbf{u}(\eta)] \right|_{\eta=0}.\end{aligned}\quad (\text{B.13})$$

Z definicji pochodnej kierunkowej wynika, że  $\delta \mathbf{p}$  i  $\delta \mathbf{s}^*$  są co najwyżej funkcjami liniowymi względem  $\Delta\mathbf{u}$ . Jawna postać  $\delta G_e$  zależy od typu obciążenia i musi być określana niezależnie dla każdego szczególnego typu obciążenia. W głównej części pracy przyjmuje się założenie, że działające na powłokę obciążenia są konserwatywne.

## B.2. Śledzenie i wyznaczanie ścieżek równowagi

W niniejszej rozprawie do rozwiązania globalnego układu równań (5.144) stosuje się metodę przyrostową Newtona-Raphsona. W metodzie tej zakłada się, że problem nieliniowy statyki powłok można scharakteryzować za pomocą jednego skalarnego parametru  $\tau \in \mathbb{R}$ , nazywanego parametrem kontrolnym (sterującym). Wtedy ścieżkę równowagi definiuje się jako zbiór wszystkich zbieżnych rozwiązań  $\mathbf{q}$  globalnego układu równań (5.144), który kreśli w przestrzeni konfiguracyjnej odcinkowo gładką krzywą parametryzowaną przez  $\tau$

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}(\tau) = (\mathbf{u}(\tau), \mathbf{Q}(\tau)) \in \mathbf{U}_A. \quad (\text{B.14})$$

Zatem ścieżkę równowagi tworzy skończony zbiór rozwiązań odpowiadających kolejnym dyskretnym wartościom parametru kontrolnego  $\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_n$ . W przypadku analiz dynamicznych parametrem kontrolnym jest czas. Metody śledzenia i wyznaczania ścieżek równowagi (nazywane metodami kontynuacyjnymi) zostały opisane m.in. w książkach [26, 67]. Proces wyznaczania ścieżek równowagi jest zagadnieniem złożonym, wymagającym od użytkownika programu doświadczenia, gdyż gładkim zmianom parametru  $\tau$  nie muszą odpowiadać gładkie zmiany na ścieżce równowagi. Powodem problemów podczas śledzenia ścieżek równowagi są punkty rozgałęzień (osobliwe), wśród których wyróżnia się punkty graniczne oraz punkty bifurkacji różnego typu, opisane m.in. w [26, 357].

W dalszych rozważaniach przyjmuje się, że globalny wektor obciążeń zewnętrznych  $\mathbf{p}$  jest proporcjonalny do parametru obciążenia  $\lambda$  i w związku z tym istnieje  $\mathbf{p}_{ref}$  dla którego zachodzi

$$\mathbf{p} = \lambda \mathbf{p}_{ref}, \quad \Delta \mathbf{p} = \Delta \lambda \mathbf{p}_{ref}. \quad (\text{B.15})$$

Jeśli w ramach omawianej analizy przyrostowo-iteracyjnej ścieżka równowagi została wyznaczona dla  $n$  przyrostów obciążenia oraz  $i$ -tej iteracji równowagi, to globalny układ równań równowagi w  $(i+1)$  iteracji można zapisać następująco

$$\mathbf{K}_T^{(i)} \Delta \mathbf{q}^{(i+1)} = \Delta \lambda^{(i+1)} \mathbf{p}_{ref}^{(i)} + \mathbf{j}^{(i)}, \quad (\text{B.16})$$

gdzie za pomocą  $\mathbf{j}$  oznaczono wektor sił niezrównoważonych zdefiniowany następująco

$$\mathbf{j}^{(i)} = \mathbf{p}^{(i)} - \mathbf{r}^{(i)} = \lambda^{(i)} \mathbf{p}_{ref}^{(i)} - \mathbf{r}^{(i)}. \quad (\text{B.17})$$

Natomiast występujący w równaniu (B.16) przyrost parametru  $\lambda$  w  $(i+1)$  iteracji oraz sumaryczny przyrost parametru obciążenia w danym przyroście są dane odpowiednio wzorami

$$\Delta \lambda^{(i+1)} = \lambda^{(i+1)} - \lambda^{(i)}, \quad \Delta \lambda = \sum_{k=1}^i \Delta \lambda^{(k)}. \quad (\text{B.18})$$

W niniejszej rozprawie zastosowano standardową wersję metody iteracyjno-przyrostowej, w której aktualizację macierzy stycznej  $\mathbf{K}_T$  wykonuje się w każdej iteracji.

Procedura poszukiwania przybliżonego rozwiązania globalnego układu równań (B.16) dla  $(n+1)$  przyrostu składa się z dwóch podstawowych faz (por. np. [21, 26]):

a) Faza predykcji (zerowa iteracja,  $i = 0$ )

Dla zadanego przyrostu parametru kontrolnego  $\Delta \tau$  z globalnego układu równań w postaci rozszerzonej (zob. np. [356])

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_T & -\mathbf{p}_{ref} \\ & \bar{\mathbf{t}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{q}_n^{(1)} \\ \Delta \lambda^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{j}_n \\ \Delta \tau \end{Bmatrix}, \quad (\text{B.19})$$

wyznacza się przyrost wektora przemieszczeń  $\Delta \mathbf{q}_n^{(1)}$  oraz przyrost parametru obciążenia  $\Delta \lambda^{(1)}$ . W równaniu (B.19) wprowadzono wektor  $\bar{\mathbf{t}}$ , który dla różnych technik sterowania został zdefiniowany w kolejnym podrozdziale. Natomiast za pomocą indeksu dolnego podkreślono, w jakiej konfiguracji zostały wyznaczone dane wielkości, gdzie konfiguracja  $n$  jest znaną konfiguracją z poprzedniego przyrostu, a konfiguracja  $n+1$  jest konfiguracją poszukiwaną w aktualnym przyroście. Dodatkowo we wzorze (B.19) pominięto przy niektórych wielkościach zerowy indeks górny. Następnie w sposób opisany w podrozdziale 5.12 dokonano aktualizacji zmiennych, którą skrótowo można zapisać w postaci

$$\mathbf{q}_{n+1}^{(1)} = \mathbf{q}_n + \Delta \mathbf{q}_n^{(1)}, \quad \beta_{n+1}^{(1)} = \beta_n + \Delta \beta_n^{(1)}, \quad \alpha_{n+1}^{(1)} = \alpha_n + \Delta \alpha_n^{(1)}. \quad (\text{B.20})$$

Po zakończeniu fazy predykcji program autorski podstawia  $i = 1$  i przechodzi do fazy korekcji.

b) Faza korekcji (iteracji,  $i \geq 1$ )

Na początku oblicza się wektor sił niezrównoważonych z poprzedniej iteracji

$$\mathbf{j}_{n+1}^{(i)} = \mathbf{p}_{n+1}(\lambda^{(i)}) - \mathbf{r}_{n+1}(\mathbf{q}_{n+1}^{(i)}) \quad (\text{B.21})$$

oraz dokonuje agregacji uaktualnionej macierzy stycznej  $\mathbf{K}_T^{(i)}(\mathbf{q}_{n+1}^{(i)})$ . Następnie na podstawie wektora sił niezrównoważonych za pomocą następującego układu równań (por. z (B.19))

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_T^{(i)} & -\mathbf{p}_{ref}^{(i)} \\ & \bar{\mathbf{t}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{q}_{n+1}^{(i+1)} \\ \Delta \lambda^{(i+1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{j}_{n+1}^{(i)} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{B.22})$$

oblicza się nową poprawkę do wektora przyrostu przemieszczeń  $\Delta \mathbf{q}_{n+1}^{(i+1)}$  oraz do przyrostu parametru obciążenia  $\Delta \lambda^{(i+1)}$ . W kolejnym kroku dokonuje się aktualizacji przemieszczeń i parametrów dla niezależnych odkształceń i uogólnionych naprężeń

$$\mathbf{q}_{n+1}^{(i+1)} = \mathbf{q}_{n+1}^{(i)} + \Delta \mathbf{q}_{n+1}^{(i+1)}, \quad \beta_{n+1}^{(i+1)} = \beta_{n+1}^{(i)} + \Delta \beta_{n+1}^{(i+1)}, \quad \alpha_{n+1}^{(i+1)} = \alpha_{n+1}^{(i)} + \Delta \alpha_{n+1}^{(i+1)}. \quad (\text{B.23})$$

Aktualizacja przemieszczeń w szczegółowy sposób została opisana w podrozdziale 5.12. Na koniec sprawdzane są warunki zbieżności procesu iteracyjnego opisane w podrozdziale B.4. Jeśli warunki zbieżności nie są spełnione to proces iteracji jest kontynuowany i dokonuje się aktualizacji numeru iteracji przez podstawienie  $i := i+1$ . Faza korekcji może zostać przerwana jeśli  $i > i_{max}$ , gdzie  $i_{max}$  jest

ustaloną maksymalną liczbą iteracji równowagi. Wtedy program autorski umożliwia zmianę np. wielkości przyrostu parametru kontrolnego lub techniki sterowania procesem rozwiązania. Natomiast jeśli warunki zbieżności są spełnione, to program dokonuje następujących podstawień

$$\mathbf{q}_{n+1}^{(i+1)} \rightarrow \mathbf{q}_{n+1}, \quad \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{(i+1)} \rightarrow \boldsymbol{\beta}_{n+1}, \quad \boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{(i+1)} \rightarrow \boldsymbol{\alpha}_{n+1} \quad (\text{B.24})$$

i przechodzi do fazy predykcji dla kolejnego  $(n+2)$  przyrostu lub kończy obliczenia jeśli  $(n+1)$  był ostatnim przyrostem.

### B.3. Techniki sterowania procesem rozwiązaniem problemu nieliniowego

Wśród technik sterowania procesem wyznaczania ścieżki równowagi w literaturze zob. np. [67, 356] wyróżnia się trzy podstawowe techniki: sterowanie parametrem obciążenia, sterowanie parametrem przemieszczenia oraz sterowanie parametrem długości łuku. Globalny wektor uogólnionych przemieszczeń  $\mathbf{q}$  przyjmuje się w postaci

$$\mathbf{q} = \{q_1 \ q_2 \ \dots \ q_N\}^T \in R^N, \quad (\text{B.25})$$

gdzie  $N$  jest liczbą globalnych stopni swobody.

Technika sterowania parametrem obciążenia  $\lambda$  jest najprostszą techniką sterowania procesem rozwiązania, w ramach której wektor  $\bar{\mathbf{t}}$  w układach równań (B.19) i (B.22) ma postać

$$\bar{\mathbf{t}} = \{\mathbf{0}_{1 \times N} \ | \ 1\}. \quad (\text{B.26})$$

Zatem parametr obciążenia  $\lambda$  jest parametrem kontrolnym i zachodzi  $\Delta\tau \equiv \Delta\lambda = \Delta\lambda^*$ , gdzie  $\Delta\lambda^*$  jest zadany przyrostem  $\lambda$  w danym przyroście. W związku z tym w iteracjach ( $i > 0$ ) korekcja parametru obciążenia wynosi  $\Delta\lambda^{(i+1)} = 0$ .

W technice sterowania przemieszczeniem jako parametr kontrolny wybierana jest jedna ze składowych wektora uogólnionych przemieszczeń  $\mathbf{q}$  (B.25). W przypadku wyboru  $p$ -tej składowej wektor  $\bar{\mathbf{t}}$  przyjmuje następującą postać

$$\bar{\mathbf{t}} = \{\mathbf{0}_{1 \times p-1} \ 1 \ \mathbf{0}_{1 \times N-p} \ | \ 0\}. \quad (\text{B.27})$$

Ponadto zachodzi  $\Delta\tau \equiv \Delta q_p = \Delta q^*$ , gdzie  $\Delta q^*$  jest zadany przyrostem  $p$ -tej składowej  $\mathbf{q}$  w danym przyroście. W związku z tym w iteracjach ( $i > 0$ ) korekcja dla tej składowej wynosi  $\Delta q_p^{(i+1)} = 0$ .

W celu opisu techniki sterowania długością łuku dla wektora niewiadomych występującego w układach równań (B.19) i (B.22) wprowadza się najpierw oznaczenie  $\Delta\bar{\mathbf{q}}$

$$\Delta\bar{\mathbf{q}}^{(i)} = \begin{Bmatrix} \Delta\mathbf{q}^{(i)} \\ \Delta\lambda^{(i)} \end{Bmatrix}, \quad \Delta\bar{\mathbf{q}} = \sum_{k=1}^i \begin{Bmatrix} \Delta\mathbf{q}^{(k)} \\ \Delta\lambda^{(k)} \end{Bmatrix}. \quad (\text{B.28})$$

Wtedy długość łuku na ścieżce równowagi definiuje się następująco (zob. np. [356])

$$\Delta s^2 = \Delta\bar{\mathbf{q}}^T \Delta\bar{\mathbf{q}} = \Delta\mathbf{q}^T \Delta\mathbf{q} + \Delta\lambda^2. \quad (\text{B.29})$$

Na podstawie zależności (B.28) i (B.29) wektor  $\bar{\mathbf{t}}$  występujący w układach równań (B.19) i (B.22) w technice sterowania długością łuku można wyrazić następująco

$$\bar{\mathbf{t}} = \begin{Bmatrix} \Delta\bar{\mathbf{q}} \\ \|\Delta\bar{\mathbf{q}}\| \end{Bmatrix}^T, \quad \bar{\mathbf{t}}\Delta\bar{\mathbf{q}} = \Delta s, \quad (\text{B.30})$$

gdzie za pomocą  $\|\cdot\|$  oznaczono seminormę euklidesową. Zatem długość łuku  $s$  jest parametrem kontrolnym i zachodzi  $\Delta\tau \equiv \Delta s = \Delta s^*$ , gdzie  $\Delta s^*$  jest zadany przyrostem  $s$  w danym kroku obliczeniowym. W związku z tym w fazie korekcji  $\Delta s = \text{const}$  i  $\Delta\bar{\mathbf{q}}^T \Delta\bar{\mathbf{q}} = 0$  dla  $i > 0$ . Zróżnicowanie rzędów wartości i jednostek dla składowych wektora  $\mathbf{q}$ : translacji i obrotów może być powodem problemów z wiarygodnym wyznaczeniem parametru długości łuku. W pracy [71] jako metodę ominięcia tego



problemu zaproponowano selektywne obliczanie długości łuku, które polega na eliminacji wybranych składowych  $\Delta \mathbf{q}$  lub ich odpowiednim przeskalowaniu. Eliminację (lub skalowanie) można wyrazić za pomocą macierzy diagonalnej  $\mathbf{S} = \text{diag}[s_1, s_2, \dots, s_N]$ , której elementy spełniają warunek  $0 \leq s_p \leq 1$  ( $p = 1, 2, \dots, N$ ), wtedy wektor  $\Delta \bar{\mathbf{q}}$  modyfikuje się następująco

$$\Delta \bar{\mathbf{q}}^{(i)} = \begin{Bmatrix} \mathbf{S} \Delta \mathbf{q}^{(i)} \\ \Delta \lambda^{(i)} \end{Bmatrix}, \quad \Delta \bar{\mathbf{q}} = \sum_{k=1}^i \begin{Bmatrix} \mathbf{S} \Delta \mathbf{q}^{(k)} \\ \Delta \lambda^{(k)} \end{Bmatrix}. \quad (\text{B.31})$$

Zastosowanie wzoru (B.31) w (B.30) pozwala na obliczenie zmodyfikowanego wektora  $\bar{\mathbf{t}}$ , występującego w układach równań (B.19) i (B.22). W niniejszej rozprawie zdecydowano się obliczać długość łuku tylko na podstawie składowych translacyjnych wektora  $\Delta \mathbf{q}$ .

#### B.4. Kontrola zbieżności procesu iteracyjnego

W pracy [67] zaproponowano sześć kryteriów do kontroli zbieżności procesu iteracyjnego. W niniejszej rozprawie zastosowano trzy kryteria związane ze zmianą poprawek przyrostów uogólnionych przemieszczeń  $\delta(\Delta \mathbf{q}) = \Delta \mathbf{q}^{(i)}$  w trakcie fazy korekcji ( $i > 1$ ). Natomiast zrezygnowano ze sprawdzania trzech kryteriów skonstruowanych dla wektora sił niezerównoważonych  $\mathbf{j}$  ze względu na problemy z wyborem wielkości odniesienia odpowiadających obciążeniu. W pracy [67] zauważono, że w przypadku sformułowań hybrydowo-mieszanych mogą się pojawić problemy ze spełnieniem kryteriów dla wektora  $\mathbf{j}$ , dlatego w ramach dalszych prac planowane jest sprawdzenie wpływu tych kryteriów na zbieżność procesu iteracyjnego.

W kryteriach przemieszczeniowych ograniczono się jedynie do translacyjnych stopni swobody ze względu na lokalnie duże zmiany parametrów kanonicznych dla obrotowych stopni swobody. Przyjmując, że  $M$  oznacza całkowitą liczbę węzłów kryteria zdefiniowano następująco

$$U1 > \frac{\|\delta(\mathbf{S} \Delta \mathbf{q})\|}{\|\mathbf{S} \Delta \mathbf{q}\|}, \quad \mathbf{S} = \text{diag}[s_1, s_2, \dots, s_k, \dots, s_M], \quad s_k = \{1, 1, 1, 0, 0, 0\}, \quad k = 1, 2, \dots, M, \quad (\text{B.32})$$

$$U2 > \max_{\substack{r=1,2,\dots,M \\ s=1,2,3}} \frac{|\delta(\Delta q_{rs})|}{|\Delta q_{s,ref}|}, \quad U3 > \sqrt{\frac{1}{3M} \sum_{r=1}^M \sum_{s=1}^3 \frac{[\delta(\Delta q_{rs})]^2}{(\Delta q_{s,ref})^2}}, \quad (\text{B.33})$$

gdzie wielkości odniesienia wyznacza się jako

$$\Delta q_{s,ref} = \max_{r=1,2,\dots,M} |\Delta q_{rs}|, \quad s = 1, 2, 3. \quad (\text{B.34})$$

Przyjmowane w analizach nieliniowych wartości parametrów kontrolnych zestawiono w tab. B.1. Biorąc pod uwagę prace [67, 370] oraz doświadczenia własne autora niniejszej rozprawy kryterium (B.32) z ograniczeniem  $U1$  jest traktowane jako podstawowe. Natomiast pozostałe dwa kryteria pełnią rolę pomocniczą (informacyjną).

Tabela B.1. Zastosowane wartości parametrów kontrolnych

$U1$	$U2$	$U3$
0.001	0.01	0.001

Proces rozwiązania poza omówionymi kryteriami zbieżności jest dodatkowo kontrolowany za pomocą *techniki okien* zaproponowanej w pracy [74] oraz opisanej m.in. w [67]. Technika ta ogranicza wartość przyrostów parametru kontrolnego dla różnych technik sterowania i ma szczególnie znaczenie w przypadku trybu interaktywnej pracy z programem.



## Dodatek C

### WYBRANE ZAGADNIENIA Z MES

#### C.1. Całkowanie numeryczne

Problem całkowania numerycznego został szczegółowo opisany m.in. w książkach [149, 186, 273]. W ogólnej postaci problem całkowania funkcji jednej zmiennej w przedziale  $[a, b]$  można zapisać jako

$$\int_a^b \omega(x) f(x) dx = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) + e, \quad (\text{C.1})$$

gdzie:  $\omega(x)$  jest funkcją wagową,  $w_i$  są wagami kwadratury,  $x_i$  są miejscami zerowymi danej kwadratury,  $n$  – liczbą punktów całkowania, a za pomocą  $e$  oznaczono błąd kwadratury. Dowolną całkę postaci

$$\int_a^b f(x) dx \text{ można przekształcić do postaci } \int_{-1}^1 g(\xi) d\xi \text{ w wyniku transformacji opisanej wzorami}$$

$$x = \frac{b-a}{2} \xi + \frac{a+b}{2}, \quad g(\xi) = \frac{b-a}{2} f(x). \quad (\text{C.2})$$

Poniżej omówiono dwie kwadratury, które zostały wykorzystane do całkowania numerycznego w programie autorskim.

Podczas całkowania macierzy elementowych i całkowania wzdłuż grubości powłoki zastosowano kwadraturę Gaussa-Legendre'a, nazywaną w rozprawie skrótowo kwadraturą Gaussa. Kwadraturę tą uzyskuje się z (C.1) przez przyjęcie  $\omega(x) = 1$  oraz przedziału całkowania  $[-1, 1]$

$$C = \int_a^b f(x) dx = \int_{-1}^1 g(\xi) d\xi \cong \sum_{i=1}^n w_i g(\xi_i). \quad (\text{C.3})$$

We wzorze (C.3) za pomocą  $\xi$  oznaczono współrzędne punktów całkowania kwadratury Gaussa-Legendre'a, które wyznacza się jako pierwiastki (zera) wielomianów Legendre'a  $n$ -tego stopnia, zob. np. [186]. Wzór na całkę po powierzchni  $A$  dla funkcji dwóch zmiennych, wykorzystując kwadraturę Gaussa-Legendre'a można zapisać następująco

$$C = \int_A f(x, y) dx = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 g(\xi, \eta) d\xi d\eta \cong \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m w_i w_j g(\xi_i, \eta_j). \quad (\text{C.4})$$

Kwadratura Gaussa  $n$ -tego stopnia pozwala na dokładne wyznaczenie całek dla wielomianów stopnia co-najwyżej  $2n-1$ . W przypadku wielomianów wyższego rzędu lub innych funkcji sposób oszacowania błędu całkowania numerycznego  $e$  opisano np. w [149, 273]. Współrzędne i wagi dla punktów całkowania kwadratury Gaussa-Legendre'a zestawiono w tab. C.1.

W kwadraturze Gaussa punkty całkowania nie występują w skrajnych węzłach przedziału całkowania. Z tego powodu w niniejszej rozprawie do całkowania numerycznego wzdłuż grubości użyto również kwadratury Gaussa-Lobatto-Legendre'a, określanej w rozprawie skrótowo kwadraturą Lobatto. W kwadraturze tej wymusza się, aby punkty całkowania występowały w skrajnych węzłach przedziału całkowania, a całkę wyznacza się z następującego wzoru

$$C = \int_a^b f(x) dx = \int_{-1}^1 g(\xi) d\xi \cong \frac{2}{n(n-1)} [g(-1) + g(1)] + \sum_{i=2}^{n-1} w_i g(\xi_i) = \sum_{i=1}^n w_i g(\xi_i). \quad (\text{C.5})$$

Kwadratura Gaussa-Lobatto-Legendre'a  $n$ -tego stopnia pozwala na dokładne wyznaczenie całek dla wielomianów stopnia co-najwyżej  $2n-3$ . Współrzędne i wagi dla punktów całkowania kwadratury Gaussa-Lobatto-Legendre'a zestawiono w tab. C.1.

Tabela C.1. Współrzędne i wagi dla punktów całkowania kwadratury Gaussa-Legendre'a i kwadratury Gaussa-Lobatto-Legendre'a

Kwadratura Gaussa-Legendre'a			Kwadratura Gaussa-Lobatto-Legendre'a		
$n$	Współrzędne $\zeta_i$	Wagi $w_i$	$n$	Współrzędne $\zeta_i$	Wagi $w_i$
1	0	2.0	1	0	2.0
2	$\pm 0.5773502692$	1.0	2	$\pm 1.0$	1.0
3	0	0.8888888889	3	0	1.33333333333333
	$\pm 0.7745966692$	0.5555555556		$\pm 1.0$	0.33333333333333
4	$\pm 0.8611363116$	0.3478548451	4	$\pm 0.44721359549996$	0.83333333333333
	$\pm 0.3399810436$	0.6521451549		$\pm 1.0$	0.16666666666667
5	0	0.5688888889	5	0	0.71111111111111
	$\pm 0.9061798459$	0.2369268851		$\pm 0.65465367070798$	0.54444444444444
	$\pm 0.5384693101$	0.4786286705		$\pm 1.0$	0.1
6	$\pm 0.9324695142$	0.1713244924	6	$\pm 0.28523151648065$	0.55485837703549
	$\pm 0.6612093865$	0.3607615730		$\pm 0.76505532392946$	0.37847495629785
	$\pm 0.2386191861$	0.4679139346		$\pm 1.0$	0.06666666666667
7	0	0.4179591837	7	0	0.48761904761905
	$\pm 0.9491079123$	0.1294849662		$\pm 0.46884879347071$	0.43174538120986
	$\pm 0.7415311856$	0.2797053915		$\pm 0.83022389627857$	0.27682604736157
	$\pm 0.4058451514$	0.3818300505		$\pm 1.0$	0.04761904761905
8	$\pm 0.9602898565$	0.1012285363	8	$\pm 0.20929921790248$	0.41245879465870
	$\pm 0.7966664774$	0.2223810345		$\pm 0.59170018143314$	0.34112269248350
	$\pm 0.5255324099$	0.3137066459		$\pm 0.87174014850961$	0.21070422714351
	$\pm 0.1834346425$	0.3626837834		$\pm 1.0$	0.03571428571429
9	0	0.3302393550	9	0	0.37151927437642
	$\pm 0.9681602395$	0.0812743884		$\pm 0.36311746382618$	0.34642851097305
	$\pm 0.8360311073$	0.1806481607		$\pm 0.67718627951074$	0.27453871250016
	$\pm 0.6133714327$	0.2606106964		$\pm 0.89975799541146$	0.16549536156081
	$\pm 0.3242534234$	0.3123470770		$\pm 1.0$	0.02777777777778

## C.2. Wybrane macierze elementowe

### C.2.1. Wprowadzenie

Ze względu na rozbudowaną strukturę niektóre macierze elementowe nie zostały zdefiniowane w jawnej postaci w głównej części rozprawy. W związku z tym szczegółowa postać tych macierzy zostanie zaprezentowana poniżej. Macierze te w ramach 6-parametrowej nieliniowej teorii powłok mają unikalną strukturę, która została opisana m. in. w pracach [62, 370].

### C.2.2. Operator $\mathbf{B}(\mathbf{u})$ w zapisie macierzowym

Macierzowy operator  $\mathbf{B}(\mathbf{u})$  opisuje relację między wirtualnymi przemieszczeniami i wirtualnymi odkształceniami, która w notacji macierzowo-operatorowej została zapisana za pomocą wzorów (3.16)-(3.18). Jednak w implementacji wykorzystuje się bardziej szczegółowy zapis macierzowy

$$\begin{Bmatrix} \delta \mathbf{E} \\ \delta \mathbf{K} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_u & \mathbf{B}_f \\ \mathbf{0}_{(6 \times 3)} & \mathbf{B}_h \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{Bmatrix} = \mathbf{B}(\mathbf{u}) \mathbf{w}. \quad (\text{C.6})$$

Macierz  $\mathbf{B}_u$  wyznacza się z tożsamości  $\mathbf{v}_{,\beta} = \mathbf{v}_{i,\beta} \mathbf{e}_i = \mathbf{v}_{i,\beta} T_{ik} \mathbf{t}_k$ , natomiast macierz  $\mathbf{B}_f$  na podstawie zależności  $\mathbf{y}_{,\beta} \times \mathbf{w} = (\mathbf{t}_\beta + \boldsymbol{\varepsilon}_\beta) \times \mathbf{w}$ , zatem przyjmują one postać

$$\mathbf{B}_u = \begin{bmatrix} T_{11}(\cdot)_{,1} & T_{21}(\cdot)_{,1} & T_{31}(\cdot)_{,1} \\ T_{12}(\cdot)_{,2} & T_{22}(\cdot)_{,2} & T_{32}(\cdot)_{,2} \\ T_{12}(\cdot)_{,1} & T_{22}(\cdot)_{,1} & T_{32}(\cdot)_{,1} \\ T_{11}(\cdot)_{,2} & T_{21}(\cdot)_{,2} & T_{31}(\cdot)_{,2} \\ T_{13}(\cdot)_{,1} & T_{23}(\cdot)_{,1} & T_{33}(\cdot)_{,1} \\ T_{13}(\cdot)_{,2} & T_{23}(\cdot)_{,2} & T_{33}(\cdot)_{,2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_f = \begin{bmatrix} -\varepsilon_1 & 0 & \varepsilon_{12} \\ 0 & -\varepsilon_2 & -\varepsilon_{21} \\ 0 & -\varepsilon_1 & -(1 + \varepsilon_{11}) \\ -\varepsilon_2 & 0 & 1 + \varepsilon_{22} \\ 1 + \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & 1 + \varepsilon_{22} & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.7})$$

Rozpisanie wzoru  $\delta \boldsymbol{\kappa}_\beta = \mathbf{w}_{,\beta} = (w_i)_{,\beta} \mathbf{t}_i + \mathbf{b}_\beta \times \mathbf{w}$  daje macierz  $\mathbf{B}_h$  w postaci

$$\mathbf{B}_h = \begin{bmatrix} (\cdot)_{,1} & 0 & 0 \\ 0 & (\cdot)_{,2} & 0 \\ 0 & (\cdot)_{,1} & 0 \\ (\cdot)_{,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\cdot)_{,1} \\ 0 & 0 & (\cdot)_{,2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -b_1 & b_{12} \\ b_2 & 0 & -b_{21} \\ b_1 & 0 & -b_{11} \\ 0 & -b_2 & b_{22} \\ -b_{12} & b_{11} & 0 \\ -b_{22} & b_{21} & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{C.8})$$

gdzie za pomocą  $b_{\alpha\beta}$  i  $b_\beta$  oznaczono składowe tensora krzywizny (2.5) w konfiguracji aktualnej. Pochodne występujące we wzorach (C.7) i (C.8) oblicza się względem współrzędnych krzywoliniowych  $\zeta^\beta$  na powierzchni odniesienia w konfiguracji nieodkształconej.

### C.2.3. Macierz geometryczna

Część geometryczną przyrostu gęstości wewnętrznej pracy wirtualnej, daną wzorem (B.9), można zapisać w następujący sposób

$$\Delta \sigma_G = \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{N}^T \Delta \boldsymbol{\psi} + \mathbf{w}^T \mathbf{N} \Delta \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{w}^T \mathbf{E} \Delta \boldsymbol{\psi} + \delta \boldsymbol{\kappa}^T \mathbf{M}^T \Delta \boldsymbol{\psi} = \delta \mathbf{d}^T \mathbf{G} \Delta \mathbf{d} = \mathbf{w}^T \mathbf{D}^T \mathbf{G} \Delta \mathbf{u} = \mathbf{w}^T \mathbf{k}_G \Delta \mathbf{u}, \quad (\text{C.9})$$

gdzie wprowadzono macierze  $\mathbf{D}$  i  $\mathbf{G}$  zdefiniowane następująco

$$\delta \mathbf{d} = \begin{Bmatrix} \delta \boldsymbol{\varepsilon} \\ \delta \boldsymbol{\kappa} \\ \mathbf{w} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_u & \mathbf{B}_f \\ \mathbf{0}_{(6 \times 3)} & \mathbf{B}_h \\ \mathbf{0}_{(3 \times 3)} & \mathbf{1}_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{Bmatrix} = \mathbf{D} \mathbf{w}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(6 \times 6)} & \mathbf{0}_{(6 \times 6)} & \mathbf{N}^T \\ \mathbf{0}_{(6 \times 6)} & \mathbf{0}_{(6 \times 6)} & \mathbf{M}^T \\ \mathbf{N} & \mathbf{0}_{(3 \times 6)} & \mathbf{E} \end{bmatrix}. \quad (\text{C.10})$$

Zależności (C.9) i (C.10) pozwalają na zapisanie macierzy geometrycznej w postaci

$$\mathbf{k}_G = \mathbf{D}^T \mathbf{G} \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{B}_u^T \mathbf{N}^T \\ \mathbf{N} \mathbf{B}_u & \mathbf{N} \mathbf{B}_f + \mathbf{B}_f^T \mathbf{N}^T + \mathbf{E} + \mathbf{B}_h^T \mathbf{M}^T \end{bmatrix}, \quad (\text{C.11})$$

gdzie

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} Q^1 & 0 & 0 & Q^2 & -N^{11} & -N^{21} \\ 0 & Q^2 & Q^1 & 0 & -N^{12} & -N^{22} \\ -N^{12} & N^{21} & N^{11} & -N^{22} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{C.12})$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & -M^2 & -M^1 & 0 & M^{12} & M^{22} \\ M^1 & 0 & 0 & M^2 & -M^{11} & -M^{21} \\ -M^{12} & M^{21} & M^{11} & -M^{22} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{C.13})$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} N^{\beta 1}(\delta_{\beta 1} + \varepsilon_{\beta 1}) + Q^{\beta} \varepsilon_{\beta} & N^{\beta 1}(\delta_{\beta 2} + \varepsilon_{\beta 2}) & -Q^{\beta}(\delta_{\beta 2} + \varepsilon_{\beta 2}) \\ N^{\beta 2}(\delta_{\beta 1} + \varepsilon_{\beta 1}) & N^{\beta 2}(\delta_{\beta 2} + \varepsilon_{\beta 2}) + Q^{\beta} \varepsilon_{\beta} & Q^{\beta}(\delta_{\beta 1} + \varepsilon_{\beta 1}) \\ -N^{\beta 2} \varepsilon_{\beta} & N^{\beta 1} \varepsilon_{\beta} & N^{\alpha \beta}(\delta_{\alpha \beta} + \varepsilon_{\alpha \beta}) \end{bmatrix}. \quad (\text{C.14})$$

We wzorze (C.14) za pomocą  $\delta_{\alpha\beta}$  oznaczono składowe delty Kroneckera.

### C.3. Sprawdzenie lokalnych równań równowagi dla przyjętej interpolacji niezależnych uogólnionych naprężeń

W celu zweryfikowania równań równowagi (5.54) wyznaczono składowe uogólnionych naprężeń membranowych na podstawie wzorów (5.44) i (5.45), przyjmując macierz  $\mathbf{S}_{m2}$  daną wzorem (5.46)

$$\begin{aligned} N^{11} &= \alpha_1 + J_{11}^0 J_{11}^0 \zeta_2^* \alpha_{13} + J_{12}^0 J_{12}^0 \zeta_1^* \alpha_{14}, & N^{22} &= \alpha_2 + J_{21}^0 J_{21}^0 \zeta_2^* \alpha_{13} + J_{22}^0 J_{22}^0 \zeta_1^* \alpha_{14}, \\ N^{12} &= \alpha_3 + J_{21}^0 J_{11}^0 \zeta_2^* \alpha_{13} + J_{22}^0 J_{12}^0 \zeta_1^* \alpha_{14}, & N^{21} &= \alpha_4 + J_{11}^0 J_{21}^0 \zeta_2^* \alpha_{13} + J_{12}^0 J_{22}^0 \zeta_1^* \alpha_{14}. \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

Sprawdzenie warunków równowagi (5.54)-(5.57) wymaga wyznaczenia pochodnych po współrzędnych fizycznych  $\zeta^{\alpha}$ . W celu ich obliczenia dla składowych uogólnionych naprężeń określonych we współrzędnych skośnych  $\{x_s, y_s\}$  wykorzystuje się odwróconą macierz Jacobiego (5.32) obliczoną w środku elementu

$$J_0^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_s}{\partial \zeta^1} & \frac{\partial x_s}{\partial \zeta^2} \\ \frac{\partial y_s}{\partial \zeta^1} & \frac{\partial y_s}{\partial \zeta^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{s,1} & x_{s,2} \\ y_{s,1} & y_{s,2} \end{bmatrix} = \frac{1}{j_0} \begin{bmatrix} J_{22}^0 & -J_{12}^0 \\ -J_{21}^0 & J_{11}^0 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.16})$$

Zależności (C.15) i (C.16) pozwalają zapisać pochodne występujące w równaniach (5.54) w postaci

$$\begin{aligned} N_{,1}^{11} &= J_{11}^0 J_{11}^0 y_{s,1} \alpha_{13} + J_{12}^0 J_{12}^0 x_{s,1} \alpha_{14} = -(j_0)^{-1} J_{11}^0 J_{11}^0 J_{21}^0 \alpha_{13} + (j_0)^{-1} J_{12}^0 J_{12}^0 J_{22}^0 \alpha_{14}, \\ N_{,2}^{22} &= J_{21}^0 J_{21}^0 y_{s,2} \alpha_{13} + J_{22}^0 J_{22}^0 x_{s,2} \alpha_{14} = (j_0)^{-1} J_{11}^0 J_{21}^0 J_{21}^0 \alpha_{13} - (j_0)^{-1} J_{12}^0 J_{22}^0 J_{22}^0 \alpha_{14}, \\ N_{,1}^{12} &= J_{21}^0 J_{11}^0 y_{s,1} \alpha_{13} + J_{22}^0 J_{12}^0 x_{s,1} \alpha_{14} = -(j_0)^{-1} J_{11}^0 J_{21}^0 J_{21}^0 \alpha_{13} + (j_0)^{-1} J_{12}^0 J_{22}^0 J_{22}^0 \alpha_{14}, \\ N_{,2}^{21} &= J_{11}^0 J_{21}^0 y_{s,2} \alpha_{13} + J_{12}^0 J_{22}^0 x_{s,2} \alpha_{14} = (j_0)^{-1} J_{11}^0 J_{11}^0 J_{21}^0 \alpha_{13} - (j_0)^{-1} J_{12}^0 J_{12}^0 J_{22}^0 \alpha_{14}. \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

Po podstawieniu wielkości (C.17) do równań równowagi (5.54) uzyskuje się, że dla współrzędnych skośnych są one spełnione w dowolnym punkcie elementu skończonego.

Zastosowanie bogatszej interpolacji danej macierzą  $\mathbf{S}_{m4}$  (5.46) daje składowe uogólnionych naprężeń membranowych w postaci

$$\begin{aligned} N^{11} &= \alpha_1 + J_{11}^0 J_{11}^0 \zeta_2^* \alpha_{13} + J_{12}^0 J_{12}^0 \zeta_1^* \alpha_{14} + J_{12}^0 J_{11}^0 \zeta_2^* \alpha_{15} + J_{11}^0 J_{12}^0 \zeta_1^* \alpha_{16}, \\ N^{22} &= \alpha_2 + J_{21}^0 J_{21}^0 \zeta_2^* \alpha_{13} + J_{22}^0 J_{22}^0 \zeta_1^* \alpha_{14} + J_{22}^0 J_{21}^0 \zeta_2^* \alpha_{15} + J_{21}^0 J_{22}^0 \zeta_1^* \alpha_{16}, \\ N^{12} &= \alpha_3 + J_{21}^0 J_{11}^0 \zeta_2^* \alpha_{13} + J_{22}^0 J_{12}^0 \zeta_1^* \alpha_{14} + J_{22}^0 J_{11}^0 \zeta_2^* \alpha_{15} + J_{21}^0 J_{12}^0 \zeta_1^* \alpha_{16}, \\ N^{21} &= \alpha_4 + J_{11}^0 J_{21}^0 \zeta_2^* \alpha_{13} + J_{12}^0 J_{22}^0 \zeta_1^* \alpha_{14} + J_{12}^0 J_{21}^0 \zeta_2^* \alpha_{15} + J_{11}^0 J_{22}^0 \zeta_1^* \alpha_{16}. \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

Pochodne wielkości (C.18) względem współrzędnych  $\zeta^{\alpha}$  oblicza się analogicznie jak pochodne (C.17) i dla składowych  $N^{\alpha\beta}$  wyrażonych we współrzędnych skośnych przyjmują one postać

$$\begin{aligned} N_{,1}^{11} &= -(j_0)^{-1} J_{11}^0 J_{11}^0 J_{21}^0 \alpha_{13} + (j_0)^{-1} J_{12}^0 J_{12}^0 J_{22}^0 \alpha_{14} - (j_0)^{-1} J_{11}^0 J_{12}^0 J_{21}^0 \alpha_{15} + (j_0)^{-1} J_{11}^0 J_{12}^0 J_{22}^0 \alpha_{16}, \\ N_{,2}^{22} &= (j_0)^{-1} J_{11}^0 J_{21}^0 J_{21}^0 \alpha_{13} - (j_0)^{-1} J_{12}^0 J_{22}^0 J_{22}^0 \alpha_{14} + (j_0)^{-1} J_{11}^0 J_{21}^0 J_{22}^0 \alpha_{15} - (j_0)^{-1} J_{12}^0 J_{21}^0 J_{22}^0 \alpha_{16}, \\ N_{,1}^{12} &= -(j_0)^{-1} J_{11}^0 J_{21}^0 J_{21}^0 \alpha_{13} + (j_0)^{-1} J_{12}^0 J_{22}^0 J_{22}^0 \alpha_{14} - (j_0)^{-1} J_{11}^0 J_{21}^0 J_{22}^0 \alpha_{15} + (j_0)^{-1} J_{12}^0 J_{21}^0 J_{22}^0 \alpha_{16}, \\ N_{,2}^{21} &= (j_0)^{-1} J_{11}^0 J_{11}^0 J_{21}^0 \alpha_{13} - (j_0)^{-1} J_{12}^0 J_{12}^0 J_{22}^0 \alpha_{14} + (j_0)^{-1} J_{11}^0 J_{12}^0 J_{21}^0 \alpha_{15} - (j_0)^{-1} J_{11}^0 J_{12}^0 J_{22}^0 \alpha_{16}. \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

W wyniku wstawienia pochodnych (C.19) do warunków równowagi (5.54) otrzymano, że są one tożsamościowo spełnione dla dowolnego punktu w elemencie skończonym.

W celu sprawdzenia równania (5.55) określono składowe uogólnionych naprężeń ścinania poprzecznego na podstawie wzorów (5.44) i (5.45), przyjmując interpolację zgodnie z (5.48)

$$\begin{aligned} Q^1 &= \alpha_5 + J_{11}^0 \zeta_2^* \alpha_{17} + J_{12}^0 \zeta_1^* \alpha_{18}, \\ Q^2 &= \alpha_6 + J_{21}^0 \zeta_2^* \alpha_{17} + J_{22}^0 \zeta_1^* \alpha_{18}. \end{aligned} \quad (C.20)$$

Pochodne sił przekrojowych  $Q^\alpha$  względem współrzędnych fizycznych wyrażone we współrzędnych skośnych wyznacza się następująco

$$\begin{aligned} Q_{,1}^1 &= J_{11}^0 y_{s,1} \alpha_{17} + J_{12}^0 x_{s,1} \alpha_{18} = -(j_0)^{-1} J_{11}^0 J_{21}^0 \alpha_{17} + (j_0)^{-1} J_{12}^0 J_{22}^0 \alpha_{18}, \\ Q_{,2}^2 &= J_{21}^0 y_{s,2} \alpha_{17} + J_{22}^0 x_{s,2} \alpha_{18} = (j_0)^{-1} J_{11}^0 J_{21}^0 \alpha_{17} - (j_0)^{-1} J_{12}^0 J_{22}^0 \alpha_{18}. \end{aligned} \quad (C.21)$$

Zsumowanie zależności (C.21) daje warunek równowagi (5.55) i pokazuje, że dla współrzędnych skośnych jest on tożsamościowo spełniony w dowolnym punkcie elementu skończonego.

Do weryfikacji równań równowagi (5.56) potrzebne jest wyznaczenie składowych uogólnionych naprężeń zgięciowych na podstawie wzorów (5.44), (5.45) i (5.47)

$$\begin{aligned} M^{11} &= \alpha_7 + J_{11}^0 J_{11}^0 \zeta_2^* \alpha_{19} + J_{12}^0 J_{12}^0 \zeta_1^* \alpha_{20}, & M^{22} &= \alpha_8 + J_{21}^0 J_{21}^0 \zeta_2^* \alpha_{19} + J_{22}^0 J_{22}^0 \zeta_1^* \alpha_{20}, \\ M^{12} &= \alpha_9 + J_{21}^0 J_{11}^0 \zeta_2^* \alpha_{19} + J_{22}^0 J_{12}^0 \zeta_1^* \alpha_{20}, & M^{21} &= \alpha_{10} + J_{11}^0 J_{21}^0 \zeta_2^* \alpha_{19} + J_{12}^0 J_{22}^0 \zeta_1^* \alpha_{20}. \end{aligned} \quad (C.22)$$

Ze względu na to, że  $\mathbf{S}_b = \mathbf{S}_{m2}$  to składowe (C.22) mają taką samą postać jak składowe uogólnionych naprężeń membranowych (C.15). W związku z tym pochodne występujące w równaniach (5.56) wyrażone we współrzędnych skośnych oblicza się w ten sam sposób jak pochodne (C.19), co daje

$$\begin{aligned} M_{,1}^{11} &= (j_0)^{-1} \left( -J_{11}^0 J_{11}^0 J_{21}^0 \alpha_{19} + J_{12}^0 J_{12}^0 J_{22}^0 \alpha_{20} \right), & M_{,2}^{22} &= (j_0)^{-1} \left( J_{11}^0 J_{21}^0 J_{21}^0 \alpha_{19} - J_{12}^0 J_{22}^0 J_{22}^0 \alpha_{20} \right), \\ M_{,1}^{12} &= (j_0)^{-1} \left( -J_{11}^0 J_{21}^0 J_{21}^0 \alpha_{19} + J_{12}^0 J_{22}^0 J_{22}^0 \alpha_{20} \right), & M_{,2}^{21} &= (j_0)^{-1} \left( J_{11}^0 J_{11}^0 J_{21}^0 \alpha_{19} - J_{12}^0 J_{12}^0 J_{22}^0 \alpha_{20} \right). \end{aligned} \quad (C.23)$$

W wyniku podstawienia zależności (C.20) i (C.23) do warunków równowagi (5.56) uzyskuje się

$$\begin{aligned} M_{,1}^{11} + M_{,2}^{21} - Q^1 &= -Q^1 = -\alpha_5 - J_{11}^0 y_s \alpha_{17} - J_{12}^0 x_s \alpha_{18}, \\ M_{,1}^{12} + M_{,2}^{22} - Q^2 &= -Q^2 = -\alpha_6 - J_{21}^0 y_s \alpha_{17} - J_{22}^0 x_s \alpha_{18}. \end{aligned} \quad (C.24)$$

W równaniach (C.24) pochodne uogólnionych naprężeń zginających wzajemnie się skracają i dlatego równania (5.56) są spełnione jedynie wtedy, gdy przekrojowe siły tnące są zerowe. Zatem przyjęty sposób interpolacji dla przekrojowych momentów zginających wymusza minimalizację uogólnionych naprężeń ścinania poprzecznego w ramach sformułowania słabego. Efekt ten wpływa korzystnie na dokładność rozwiązań MES, ze względu na problem zjawiska blokady związanego z zawyżeniem wielkości sił tnących w szczególności dla elementów powłokowych niskiego rzędu.

W celu sprawdzenia ostatniego równania równowagi (5.57) składowe uogólnionych naprężeń owinięcia określono na podstawie wzorów (5.44), (5.45), stosując macierz  $\mathbf{S}_{i2}$  (5.49)

$$\begin{aligned} M^1 &= \alpha_{11} + J_{11}^0 \zeta_2^* \alpha_{21} + J_{12}^0 \zeta_1^* \alpha_{22}, \\ M^2 &= \alpha_{12} + J_{21}^0 \zeta_2^* \alpha_{21} + J_{22}^0 \zeta_1^* \alpha_{22}. \end{aligned} \quad (C.25)$$

Przyjmując, że  $\{\zeta_1^*, \zeta_2^*\} \equiv \{x_s, y_s\}$  obliczono ich pochodne względem współrzędnych fizycznych

$$\begin{aligned} M_{,1}^1 &= J_{11}^0 y_{s,1} \alpha_{21} + J_{12}^0 x_{s,1} \alpha_{22} = -(j_0)^{-1} J_{11}^0 J_{21}^0 \alpha_{21} + (j_0)^{-1} J_{12}^0 J_{22}^0 \alpha_{22}, \\ M_{,2}^2 &= J_{21}^0 y_{s,2} \alpha_{21} + J_{22}^0 x_{s,2} \alpha_{22} = (j_0)^{-1} J_{11}^0 J_{21}^0 \alpha_{21} - (j_0)^{-1} J_{12}^0 J_{22}^0 \alpha_{22}. \end{aligned} \quad (C.26)$$

Warunek równowagi (5.57) po podstawieniu do niego wielkości danych wzorami (C.15) i (C.26) przyjmuje postać

$$M_{,1}^1 + M_{,2}^2 + N^{12} - N^{21} = N^{12} - N^{21} = \alpha_3 - \alpha_4, \quad (\text{C.27})$$

natomiast w wyniku wstawienia składowych ze wzoru (C.18) zamiast (C.15) otrzymano

$$M_{,1}^1 + M_{,2}^2 + N^{12} - N^{21} = N^{12} - N^{21} = \alpha_3 - \alpha_4 + (y_s \alpha_{15} - x_s \alpha_{16}) (J_{11}^0 J_{22}^0 - J_{12}^0 J_{21}^0). \quad (\text{C.28})$$

W równaniach (C.27) i (C.28) skróciły się pochodne  $M_{,a}^a$ , co również zachodzi dla alternatywnej interpolacji momentów owinięcia za pomocą macierzy  $\mathbf{S}_{a1}$ , gdyż wtedy  $\alpha_{21} = \alpha_{22}$ . W związku z tym dla przyjętej interpolacji równanie równowagi (5.57) jest spełnione, gdy miary uogólnionych naprężeń membranowych są symetryczne i zachodzi  $N^{12} - N^{21} = 0$ . Warunek ten jest spełniony w dowolnym punkcie elementu skończonego, gdy  $\alpha_3 = \alpha_4$  dla interpolacji określonej za pomocą macierzy  $\mathbf{S}_{m2}$  oraz dodatkowo, gdy  $\alpha_{15} = 0$  i  $\alpha_{16} = 0$  w przypadku zastosowania macierzy  $\mathbf{S}_{m4}$ .

Dotychczasowe rozważania ograniczono do przypadku, gdy  $\{\xi_1^*, \xi_2^*\} \equiv \{x_s, y_s\}$ . W przypadku zastosowania współrzędnych skorygowanych  $\{\xi_1^s, \xi_2^s\}$  sprawdzenie warunków równowagi wymaga dłuższych przekształceń, ponieważ pochodne niezależnych uogólnionych naprężeń po współrzędnych fizycznych muszą być obliczone jako pochodne funkcji złożonych określonych we współrzędnych naturalnych.

#### C.4. Sprawdzenie warunków nierozdzielności dla przyjętej interpolacji odkształceń

Dla pierwszej części interpolacji niezależnych odkształceń wyznaczenie składowych oraz pochodnych względem współrzędnych fizycznych przebiega w analogiczny sposób jak w poprzednim podrozdziale dla niezależnych uogólnionych naprężeń. Wynika to z zastosowania kontrawariantnej reguły transformacji (zob. (5.65)) oraz przyjęcia takiej samej struktury macierzy opisujących interpolację. Sytuacja wygląda inaczej w przypadku drugiej części interpolacji niezależnych odkształceń dla której stosuje się kowariantną regułę transformacji oraz interpolację definiuje się we współrzędnych naturalnych. Poniżej sprawdzono czy warunki nierozdzielności dane wzorami (5.77)-(5.80) mogą być spełnione dla przyjętej w podrozdziale 5.7 interpolacji niezależnych odkształceń. W celu ograniczenia objętości rozprawy rozważono jedynie przypadek, gdy  $\{\xi_1^*, \xi_2^*\} \equiv \{x_s, y_s\}$  oraz interpolacja odkształceń membranowych jest opisana za pomocą macierzy  $\mathbf{P}_{m2}$  i  $\mathbf{N}_2$ .

Do weryfikacji warunków (5.77) konieczne jest wyznaczenie składowych odkształceń membranowych i ich pochodnych oraz składowych związanych z owinięciem. We wzorze (5.67) występuje macierz odwrotna i transponowana do macierzy  $\mathbf{T}_\sigma^0$  (5.50), która przyjmuje postać

$$\left(\mathbf{T}_\sigma^0\right)^{-T} = \frac{1}{(j_0)^2} \begin{bmatrix} J_{22}^0 J_{22}^0 & J_{21}^0 J_{21}^0 & -J_{21}^0 J_{22}^0 & -J_{22}^0 J_{21}^0 \\ J_{12}^0 J_{12}^0 & J_{11}^0 J_{11}^0 & -J_{11}^0 J_{12}^0 & -J_{12}^0 J_{11}^0 \\ -J_{12}^0 J_{22}^0 & -J_{11}^0 J_{21}^0 & J_{11}^0 J_{22}^0 & J_{12}^0 J_{21}^0 \\ -J_{22}^0 J_{12}^0 & -J_{21}^0 J_{11}^0 & J_{21}^0 J_{12}^0 & J_{22}^0 J_{11}^0 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.29})$$

Na podstawie wzorów (5.61), (5.67) i (C.29) wyznaczono składowe odkształceń membranowych

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \beta_1 + J_{11}^0 J_{11}^0 y_s \beta_{13} + J_{12}^0 J_{12}^0 x_s \beta_{14} + (j_0 j)^{-1} J_{22}^0 J_{22}^0 \xi_1 \beta_{21} + (j_0 j)^{-1} J_{21}^0 J_{21}^0 \xi_2 \beta_{22}, \\ \varepsilon_{22} &= \beta_2 + J_{21}^0 J_{21}^0 y_s \beta_{13} + J_{22}^0 J_{22}^0 x_s \beta_{14} + (j_0 j)^{-1} J_{12}^0 J_{12}^0 \xi_1 \beta_{21} + (j_0 j)^{-1} J_{11}^0 J_{11}^0 \xi_2 \beta_{22}, \\ \varepsilon_{12} &= \beta_3 + J_{21}^0 J_{11}^0 y_s \beta_{13} + J_{22}^0 J_{12}^0 x_s \beta_{14} - (j_0 j)^{-1} J_{12}^0 J_{22}^0 \xi_1 \beta_{21} - (j_0 j)^{-1} J_{11}^0 J_{21}^0 \xi_2 \beta_{22}, \\ \varepsilon_{21} &= \beta_4 + J_{11}^0 J_{21}^0 y_s \beta_{13} + J_{12}^0 J_{22}^0 x_s \beta_{14} - (j_0 j)^{-1} J_{22}^0 J_{12}^0 \xi_1 \beta_{21} - (j_0 j)^{-1} J_{21}^0 J_{11}^0 \xi_2 \beta_{22}, \end{aligned} \quad (\text{C.30})$$

a następnie ich pochodne względem współrzędnych fizycznych, wykorzystując (C.16) i (5.14)



$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11,2} &= (j_0)^{-1} J_{11}^0 J_{11}^0 J_{11}^0 \beta_{13} - (j_0)^{-1} J_{12}^0 J_{12}^0 J_{12}^0 \beta_{14} - (j_0 j^2)^{-1} J_{22}^0 J_{22}^0 J_{12} \beta_{21} + (j_0 j^2)^{-1} J_{21}^0 J_{21}^0 J_{11} \beta_{22}, \\
\varepsilon_{22,1} &= -(j_0)^{-1} J_{21}^0 J_{21}^0 J_{21}^0 \beta_{13} + (j_0)^{-1} J_{22}^0 J_{22}^0 J_{22}^0 \beta_{14} + (j_0 j^2)^{-1} J_{12}^0 J_{12}^0 J_{22} \beta_{21} - (j_0 j^2)^{-1} J_{11}^0 J_{11}^0 J_{21} \beta_{22}, \\
\varepsilon_{12,2} &= (j_0)^{-1} J_{21}^0 J_{11}^0 J_{11}^0 \beta_{13} - (j_0)^{-1} J_{22}^0 J_{12}^0 J_{12}^0 \beta_{14} + (j_0 j^2)^{-1} J_{12}^0 J_{22}^0 J_{12} \beta_{21} - (j_0 j^2)^{-1} J_{11}^0 J_{21}^0 J_{11} \beta_{22}, \\
\varepsilon_{21,1} &= -(j_0)^{-1} J_{11}^0 J_{21}^0 J_{21}^0 \beta_{13} + (j_0)^{-1} J_{12}^0 J_{22}^0 J_{22}^0 \beta_{14} - (j_0 j^2)^{-1} J_{22}^0 J_{12}^0 J_{22} \beta_{21} + (j_0 j^2)^{-1} J_{21}^0 J_{11}^0 J_{21} \beta_{22}.
\end{aligned} \tag{C.31}$$

Natomiast składowe niezależnych odkształceń związane z owinięciem obliczono na podstawie wzorów (5.58), (5.60) i (5.63). W przypadku zastosowania do interpolacji macierzy  $\mathbf{P}_{d1}$  otrzymano

$$\begin{aligned}
\kappa_1 &= \beta_{11} + (j_0)^{-1} (J_{22}^0 y_s - J_{21}^0 x_s) \beta_{19}, \\
\kappa_2 &= \beta_{12} + (j_0)^{-1} (-J_{12}^0 y_s + J_{11}^0 x_s) \beta_{19},
\end{aligned} \tag{C.32}$$

natomiast dla macierzy  $\mathbf{P}_{d2}$

$$\begin{aligned}
\kappa_1 &= \beta_{11} + J_{11}^0 y_s \beta_{19} + J_{12}^0 x_s \beta_{20}, \\
\kappa_2 &= \beta_{12} + J_{21}^0 y_s \beta_{19} + J_{22}^0 x_s \beta_{20}.
\end{aligned} \tag{C.33}$$

Po podstawieniu zależności (C.30), (C.31) i (C.32) do warunków (5.77) otrzymano

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11,2} - \varepsilon_{21,1} + \kappa_1 &= (j_0)^{-1} J_{11}^0 (J_{11}^0 J_{11}^0 + J_{21}^0 J_{21}^0) \beta_{13} - (j_0)^{-1} J_{12}^0 (J_{12}^0 J_{12}^0 + J_{22}^0 J_{22}^0) \beta_{14} + \\
&+ (j_0 j^2)^{-1} \left[ J_{22}^0 (J_{12}^0 J_{22} - J_{22}^0 J_{12}) \beta_{21} + J_{21}^0 (J_{21}^0 J_{11} - J_{11}^0 J_{21}) \beta_{22} \right] + \beta_{11} + (j_0)^{-1} (J_{22}^0 y_s - J_{21}^0 x_s) \beta_{19}, \\
\varepsilon_{12,2} - \varepsilon_{22,1} + \kappa_2 &= (j_0)^{-1} J_{21}^0 (J_{11}^0 J_{11}^0 + J_{21}^0 J_{21}^0) \beta_{13} - (j_0)^{-1} J_{22}^0 (J_{12}^0 J_{12}^0 + J_{22}^0 J_{22}^0) \beta_{14} + \\
&+ (j_0 j^2)^{-1} \left[ J_{12}^0 (J_{22}^0 J_{12} - J_{12}^0 J_{22}) \beta_{21} + J_{11}^0 (J_{11}^0 J_{21} - J_{21}^0 J_{11}) \beta_{22} \right] + \beta_{12} + (j_0)^{-1} (J_{11}^0 x_s - J_{12}^0 y_s) \beta_{19}.
\end{aligned} \tag{C.34}$$

Z zależności (C.34) wynika, że aby warunki nierozdzielności (5.77) były spełnione w każdym punkcie elementu skończonego, to parametry  $\beta_{11}, \beta_{12}, \beta_{13}, \beta_{14}$  muszą spełniać następujący układ równań

$$\begin{cases} (j_0)^{-1} J_{11}^0 (J_{11}^0 J_{11}^0 + J_{21}^0 J_{21}^0) \beta_{13} - (j_0)^{-1} J_{12}^0 (J_{12}^0 J_{12}^0 + J_{22}^0 J_{22}^0) \beta_{14} + \beta_{11} = 0 \\ (j_0)^{-1} J_{21}^0 (J_{11}^0 J_{11}^0 + J_{21}^0 J_{21}^0) \beta_{13} - (j_0)^{-1} J_{22}^0 (J_{12}^0 J_{12}^0 + J_{22}^0 J_{22}^0) \beta_{14} + \beta_{12} = 0 \end{cases}, \tag{C.35}$$

natomiast parametry  $\beta_{19}, \beta_{21}, \beta_{22}$ , powinny spełniać układ

$$\begin{cases} (j_0 j^2)^{-1} \left[ J_{22}^0 (J_{12}^0 J_{22} - J_{22}^0 J_{12}) \beta_{21} + J_{21}^0 (J_{21}^0 J_{11} - J_{11}^0 J_{21}) \beta_{22} \right] + (j_0)^{-1} (J_{22}^0 y_s - J_{21}^0 x_s) \beta_{19} = 0 \\ (j_0 j^2)^{-1} \left[ J_{12}^0 (J_{22}^0 J_{12} - J_{12}^0 J_{22}) \beta_{21} + J_{11}^0 (J_{11}^0 J_{21} - J_{21}^0 J_{11}) \beta_{22} \right] + (j_0)^{-1} (J_{11}^0 x_s - J_{12}^0 y_s) \beta_{19} = 0 \end{cases}, \tag{C.36}$$

gdyż składowe macierzy  $\mathbf{J}$  i współrzędne skośne zależą od współrzędnych naturalnych. Układ (C.36) jest bezwarunkowo spełniony w środku elementu skończonego. W przypadku zastosowania drugiego wariantu interpolacji dla składowych  $\kappa_\alpha$ , po podstawieniu (C.33) zamiast (C.32) do warunków (5.77) układ (C.36) przyjmuje postać

$$\begin{cases} (j_0 j^2)^{-1} \left[ J_{22}^0 (J_{12}^0 J_{22} - J_{22}^0 J_{12}) \beta_{21} + J_{21}^0 (J_{21}^0 J_{11} - J_{11}^0 J_{21}) \beta_{22} \right] + J_{11}^0 y_s \beta_{19} + J_{12}^0 x_s \beta_{20} = 0 \\ (j_0 j^2)^{-1} \left[ J_{12}^0 (J_{22}^0 J_{12} - J_{12}^0 J_{22}) \beta_{21} + J_{11}^0 (J_{11}^0 J_{21} - J_{21}^0 J_{11}) \beta_{22} \right] + J_{21}^0 y_s \beta_{19} + J_{22}^0 x_s \beta_{20} = 0 \end{cases}. \tag{C.37}$$

W celu sprawdzenia warunku (5.78) należy wyznaczyć składowe odkształceń poprzecznych i ich pochodne oraz składowe odkształceń zgięciowych. Składowe niezależnych odkształceń ścinania poprzecznego określono na podstawie (5.62)

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \beta_5 + J_{11}^0 y_s \beta_{15} + J_{12}^0 x_s \beta_{16}, \\ \varepsilon_2 &= \beta_6 + J_{21}^0 y_s \beta_{15} + J_{22}^0 x_s \beta_{16},\end{aligned}\quad (\text{C.38})$$

a ich pochodne względem współrzędnych fizycznych, korzystając z (C.16)

$$\begin{aligned}\varepsilon_{1,2} &= J_{11}^0 y_{s,2} \beta_{15} + J_{12}^0 x_{s,2} \beta_{16} = (j_0)^{-1} J_{11}^0 J_{11}^0 \beta_{15} - (j_0)^{-1} J_{12}^0 J_{12}^0 \beta_{16}, \\ \varepsilon_{2,1} &= J_{21}^0 y_{s,1} \beta_{15} + J_{22}^0 x_{s,1} \beta_{16} = -(j_0)^{-1} J_{21}^0 J_{21}^0 \beta_{15} + (j_0)^{-1} J_{22}^0 J_{22}^0 \beta_{16}.\end{aligned}\quad (\text{C.39})$$

Tymczasem składowe odkształceń zgięciowych wyznaczono na podstawie (5.62), (5.67) i (C.29)

$$\begin{aligned}\kappa_{11} &= \beta_7 + J_{11}^0 J_{11}^0 y_s \beta_{17} + J_{12}^0 J_{12}^0 x_s \beta_{18} + (j_0 j)^{-1} J_{22}^0 J_{22}^0 \xi_1 \beta_{23} + (j_0 j)^{-1} J_{21}^0 J_{21}^0 \xi_2 \beta_{24}, \\ \kappa_{22} &= \beta_8 + J_{21}^0 J_{21}^0 y_s \beta_{17} + J_{22}^0 J_{22}^0 x_s \beta_{18} + (j_0 j)^{-1} J_{12}^0 J_{12}^0 \xi_1 \beta_{23} + (j_0 j)^{-1} J_{11}^0 J_{11}^0 \xi_2 \beta_{24}, \\ \kappa_{12} &= \beta_9 + J_{21}^0 J_{11}^0 y_s \beta_{17} + J_{22}^0 J_{12}^0 x_s \beta_{18} - (j_0 j)^{-1} J_{12}^0 J_{22}^0 \xi_1 \beta_{23} - (j_0 j)^{-1} J_{11}^0 J_{21}^0 \xi_2 \beta_{24}, \\ \kappa_{21} &= \beta_{10} + J_{11}^0 J_{21}^0 y_s \beta_{17} + J_{12}^0 J_{22}^0 x_s \beta_{18} - (j_0 j)^{-1} J_{22}^0 J_{12}^0 \xi_1 \beta_{23} - (j_0 j)^{-1} J_{21}^0 J_{11}^0 \xi_2 \beta_{24}.\end{aligned}\quad (\text{C.40})$$

Warunek nierozdzielności (5.78) po wstawieniu do niego zależności (C.39) i (C.40) przyjmuje postać

$$\varepsilon_{1,2} - \varepsilon_{2,1} + \kappa_{12} - \kappa_{21} = (j_0)^{-1} (J_{11}^0 J_{11}^0 + J_{21}^0 J_{21}^0) \beta_{15} - (j_0)^{-1} (J_{12}^0 J_{12}^0 + J_{22}^0 J_{22}^0) \beta_{16} + \beta_9 - \beta_{10} = 0, \quad (\text{C.41})$$

która wskazuje na to, że warunek ten jest spełniony dla odpowiednich kombinacji wartości parametrów  $\beta_9, \beta_{10}, \beta_{15}, \beta_{16}$ .

W celu weryfikacji warunków (5.79) korzystając z (5.14) i (C.16) określono odpowiednie pochodne składowych odkształceń (C.40)

$$\begin{aligned}\kappa_{11,2} &= (j_0)^{-1} J_{11}^0 J_{11}^0 J_{11}^0 \beta_{17} - (j_0)^{-1} J_{12}^0 J_{12}^0 J_{12}^0 \beta_{18} - (j_0 j^2)^{-1} J_{22}^0 J_{22}^0 J_{12} \beta_{23} + (j_0 j^2)^{-1} J_{21}^0 J_{21}^0 J_{11} \beta_{24}, \\ \kappa_{22,1} &= -(j_0)^{-1} J_{21}^0 J_{21}^0 J_{21}^0 \beta_{17} + (j_0)^{-1} J_{22}^0 J_{22}^0 J_{22}^0 \beta_{18} + (j_0 j^2)^{-1} J_{12}^0 J_{12}^0 J_{22} \beta_{23} - (j_0 j^2)^{-1} J_{11}^0 J_{11}^0 J_{21} \beta_{24}, \\ \kappa_{12,2} &= (j_0)^{-1} J_{21}^0 J_{11}^0 J_{11}^0 \beta_{17} - (j_0)^{-1} J_{22}^0 J_{12}^0 J_{12}^0 \beta_{18} + (j_0 j^2)^{-1} J_{12}^0 J_{22}^0 J_{12} \beta_{23} - (j_0 j^2)^{-1} J_{11}^0 J_{21}^0 J_{11} \beta_{24}, \\ \kappa_{21,1} &= -(j_0)^{-1} J_{11}^0 J_{21}^0 J_{21}^0 \beta_{17} + (j_0)^{-1} J_{12}^0 J_{22}^0 J_{22}^0 \beta_{18} - (j_0 j^2)^{-1} J_{22}^0 J_{12}^0 J_{22} \beta_{23} + (j_0 j^2)^{-1} J_{21}^0 J_{11}^0 J_{21} \beta_{24}.\end{aligned}\quad (\text{C.42})$$

Po podstawieniu zależności (C.42) do warunków nierozdzielności (5.79) przyjmują one postać

$$\begin{aligned}\kappa_{22,1} - \kappa_{12,2} &= -(j_0)^{-1} J_{21}^0 (J_{21}^0 J_{21}^0 + J_{11}^0 J_{11}^0) \beta_{17} + (j_0)^{-1} J_{22}^0 (J_{22}^0 J_{22}^0 + J_{12}^0 J_{12}^0) \beta_{18} + \\ &\quad + (j_0 j^2)^{-1} \left[ J_{12}^0 (J_{12}^0 J_{22}^0 - J_{22}^0 J_{12}^0) \beta_{23} - J_{11}^0 (J_{11}^0 J_{21}^0 - J_{21}^0 J_{11}^0) \beta_{24} \right] = 0, \\ \kappa_{11,2} - \kappa_{21,1} &= (j_0)^{-1} J_{11}^0 (J_{11}^0 J_{11}^0 + J_{21}^0 J_{21}^0) \beta_{17} - (j_0)^{-1} J_{12}^0 (J_{12}^0 J_{12}^0 + J_{22}^0 J_{22}^0) \beta_{18} + \\ &\quad + (j_0 j^2)^{-1} \left[ J_{22}^0 (J_{12}^0 J_{22}^0 - J_{22}^0 J_{12}^0) \beta_{23} + J_{21}^0 (J_{21}^0 J_{11}^0 - J_{11}^0 J_{21}^0) \beta_{24} \right] = 0,\end{aligned}\quad (\text{C.43})$$

gdzie współczynniki przy parametrach  $\beta_{23}$  i  $\beta_{24}$  się zerują w środku elementu skończonego. W tym punkcie układ równań (C.43) może być spełniony jedynie dla zerowych wartości  $\beta_{17}$  i  $\beta_{18}$ . Zatem, gdy parametry  $\beta_{17}$  i  $\beta_{18}$  są różne od zera to warunki (5.78) mogą być spełnione tylko w przybliżeniu.

W ostatnim warunku nierozdzielności (5.80) występują pochodne niezależnych odkształceń związanych z owinięciem do których wyznaczenia wykorzystano odwróconą macierz Jacobiego (C.16). Dla pierwszego wariantu interpolacji składowych  $\kappa_\alpha$  (C.32) ich pochodne przyjmują postać

$$\begin{aligned}\kappa_{1,2} &= (j_0)^{-1} (J_{22}^0 y_{s,2} - J_{21}^0 x_{s,2}) \beta_{19} = J_{11}^0 \beta_{19} + J_{12}^0 \beta_{20} = (j_0)^{-2} (J_{22}^0 J_{11}^0 + J_{21}^0 J_{12}^0) \beta_{19}, \\ \kappa_{2,1} &= (j_0)^{-1} (-J_{12}^0 y_{s,1} + J_{11}^0 x_{s,1}) \beta_{19} = J_{21}^0 y_{s,1} \beta_{19} + J_{22}^0 x_{s,1} \beta_{20} = (j_0)^{-2} (J_{12}^0 J_{21}^0 + J_{11}^0 J_{22}^0) \beta_{19},\end{aligned}\quad (\text{C.44})$$

natomiast dla drugiego wariantu interpolacji składowych  $\kappa_\alpha$  (C.33) otrzymano pochodne

$$\begin{aligned}\kappa_{1,2} &= J_{11}^0 y_{s,2} \beta_{19} + J_{12}^0 x_{s,2} \beta_{20} = (j_0)^{-1} J_{11}^0 J_{11}^0 \beta_{19} - (j_0)^{-1} J_{12}^0 J_{12}^0 \beta_{20}, \\ \kappa_{2,1} &= J_{21}^0 y_{s,1} \beta_{19} + J_{22}^0 x_{s,1} \beta_{20} = -(j_0)^{-1} J_{21}^0 J_{21}^0 \beta_{19} + (j_0)^{-1} J_{22}^0 J_{22}^0 \beta_{20}.\end{aligned}\quad (\text{C.45})$$

Po podstawieniu pochodnych (C.44) warunek nierozdzielności (5.80) przyjmuje postać

$$\kappa_{1,2} - \kappa_{2,1} = (j_0)^{-2} (J_{22}^0 J_{11}^0 + J_{21}^0 J_{12}^0) \beta_{19} - (j_0)^{-2} (J_{12}^0 J_{21}^0 + J_{11}^0 J_{22}^0) \beta_{19} = 0, \quad (\text{C.46})$$

która pokazuje, że jest on tożsamościowo spełniony w dowolnym punkcie elementu skończonego. Natomiast w wyniku podstawienia pochodnych (C.45) do warunku (5.80) otrzymano

$$\kappa_{1,2} - \kappa_{2,1} = (j_0)^{-1} (J_{11}^0 J_{11}^0 + J_{21}^0 J_{21}^0) \beta_{19} - (j_0)^{-1} (J_{12}^0 J_{12}^0 + J_{22}^0 J_{22}^0) \beta_{20} = 0. \quad (\text{C.47})$$

W tym przypadku warunek nierozdzielności (5.80) jest spełniony, gdy zależność pomiędzy parametrami  $\beta_{19}$  i  $\beta_{20}$  jest określona przez równanie (C.47) lub oba parametry są równe zero.

### C.5. Uniwersalny sposób kondensacji układu równań zlinearyzowanych dla elementów hybrydowo-mieszanych

Metoda kondensacji układu równań zlinearyzowanych opisana w podrozdziale 5.11 nie może zostać użyta, gdy liczba parametrów  $\alpha_{(e)}$  i  $\beta_{(e)}^1$  jest różna. W związku z tym poniżej zaprezentowano uniwersalny sposób kondensacji, który można zastosować dla dowolnych elementów hybrydowo-mieszanych. Procedurę opisano dla układu równań (5.129) określonego dla elementów częściowo mieszanych. Najpierw wyznacza się  $\Delta \beta_{(e)}^1$  odpowiednio z drugiego równania układu (5.129)

$$\Delta \beta_{(e)}^1 = (\bar{\mathbf{K}}_{\beta\beta}^{11})^{-1} (\mathbf{K}_{\beta\alpha}^1 \Delta \alpha_{(e)} - \bar{\mathbf{K}}_{\beta q}^1 \Delta \mathbf{q}_{(e)} - \bar{\mathbf{r}}_{\beta}^1). \quad (\text{C.48})$$

Następnie w celu wyznaczenia  $\Delta \alpha_{(e)}$  zależność (C.48) wstawia się do trzeciego równania układu (5.129) i w wyniku przekształceń uzyskuje się następujący wzór

$$\Delta \alpha_{(e)} = \hat{\mathbf{K}}_{\alpha\alpha} \left( \bar{\mathbf{K}}_{\alpha q}^{(e)} \Delta \mathbf{q}_{(e)} + \mathbf{r}_{\alpha}^1 + \mathbf{K}_{\alpha\beta}^1 (\bar{\mathbf{K}}_{\beta\beta}^{11})^{-1} \bar{\mathbf{r}}_{\beta}^1 \right), \quad (\text{C.49})$$

gdzie w celu uproszczenia dalszego zapisu wprowadzono macierze

$$\hat{\mathbf{K}}_{\alpha\alpha} = \left[ \mathbf{K}_{\alpha\beta}^1 (\bar{\mathbf{K}}_{\beta\beta}^{11})^{-1} \mathbf{K}_{\beta\alpha}^1 \right]^{-1}, \quad \bar{\mathbf{K}}_{\alpha q}^{(e)} = \mathbf{K}_{\alpha q}^{(e)} + \mathbf{K}_{\alpha\beta}^1 (\bar{\mathbf{K}}_{\beta\beta}^{11})^{-1} \bar{\mathbf{K}}_{\beta q}^1. \quad (\text{C.50})$$

Ostatecznie klasyczną postać równania zlinearyzowanego dla elementu skończonego uzyskuje się w wyniku podstawienia zależności (C.48) i (C.49) do pierwszego równania układu (5.129)

$$\mathbf{K}_{TS}^{(e)} \Delta \mathbf{q}_{(e)} = \mathbf{r}_S^{(e)}, \quad (\text{C.51})$$

gdzie elementowa styczna macierz sztywności oraz wektor sił rezydualnych są dane wzorami

$$\mathbf{K}_{TS}^{(e)} = \mathbf{K}_G^{(e)} + \mathbf{K}_M^{(e)} - \mathbf{K}_{q\beta}^2 (\mathbf{K}_{\beta\beta}^{22})^{-1} \mathbf{K}_{\beta q}^2 + \bar{\mathbf{K}}_{q\beta}^1 (\bar{\mathbf{K}}_{\beta\beta}^{11})^{-1} \mathbf{K}_{\beta\alpha}^1 \hat{\mathbf{K}}_{\alpha\alpha} \bar{\mathbf{K}}_{\alpha q}^{(e)} - \bar{\mathbf{K}}_{q\beta}^1 (\bar{\mathbf{K}}_{\beta\beta}^{11})^{-1} \bar{\mathbf{K}}_{\beta q}^1 + \mathbf{K}_{q\alpha}^{(e)} \hat{\mathbf{K}}_{\alpha\alpha} \bar{\mathbf{K}}_{\alpha q}^{(e)}, \quad (\text{C.52})$$

$$\mathbf{r}_S^{(e)} = \mathbf{p}^{(e)} - \mathbf{r}_d^{(e)} - \left[ \bar{\mathbf{K}}_{q\beta}^1 (\bar{\mathbf{K}}_{\beta\beta}^{11})^{-1} \mathbf{K}_{\beta\alpha}^1 + \mathbf{K}_{q\alpha}^{(e)} \right] \hat{\mathbf{K}}_{\alpha\alpha} \mathbf{r}_{\alpha}^1 - \left( \left[ \bar{\mathbf{K}}_{q\beta}^1 (\bar{\mathbf{K}}_{\beta\beta}^{11})^{-1} \mathbf{K}_{\beta\alpha}^1 + \mathbf{K}_{q\alpha}^{(e)} \right] \hat{\mathbf{K}}_{\alpha\alpha} \mathbf{K}_{\alpha\beta}^1 - \bar{\mathbf{K}}_{q\beta}^1 \right) (\bar{\mathbf{K}}_{\beta\beta}^{11})^{-1} \bar{\mathbf{r}}_{\beta}^1. \quad (\text{C.53})$$

Powyższe wzory są równoważne wzorom (5.140) i (5.141), gdy możliwe jest wyznaczenie macierzy odwrotnych do macierzy  $\mathbf{K}_{\alpha\beta}^1$  i  $\mathbf{K}_{\beta\alpha}^1$ . W szczególnym przypadku analizy w zakresie sprężystym względem neutralnej powierzchni odniesienia wzory (C.52) i (C.53) upraszczają się do postaci

$$\mathbf{K}_{TS}^{(e)} = \mathbf{K}_G^{(e)} + \mathbf{K}_M^{(e)} + \mathbf{K}_{q\alpha}^{(e)} \hat{\mathbf{K}}_{\alpha\alpha} \bar{\mathbf{K}}_{\alpha q}^{(e)}, \quad (\text{C.54})$$

$$\mathbf{r}_S^{(e)} = \mathbf{p}^{(e)} - \mathbf{r}_d^{(e)} - \mathbf{K}_{q\alpha}^{(e)} \hat{\mathbf{K}}_{\alpha\alpha} \mathbf{r}_\alpha^1 - \mathbf{K}_{q\alpha}^{(e)} \hat{\mathbf{K}}_{\alpha\alpha} \mathbf{K}_{\alpha\beta}^1 \left( \bar{\mathbf{K}}_{\beta\beta}^{11} \right)^{-1} \bar{\mathbf{r}}_\beta^1. \quad (\text{C.55})$$

W przypadku elementu mieszanego procedura kondensacji układu równań (5.120) przebiega w ten sam sposób, co pozwala wyznaczyć macierz  $\mathbf{K}_T^{(e)}$  i wektor  $\mathbf{r}^{(e)}$  w postaci

$$\mathbf{K}_T^{(e)} = \mathbf{K}_G^{(e)} + \mathbf{K}_{q\alpha}^{(e)} \hat{\mathbf{K}}_{\alpha\alpha} \bar{\mathbf{K}}_{\alpha q}^{(e)}, \quad \mathbf{r}^{(e)} = \mathbf{p}^{(e)} - \mathbf{r}_d^{(e)} - \mathbf{K}_{q\alpha}^{(e)} \hat{\mathbf{K}}_{\alpha\alpha} \mathbf{r}_\alpha^1 - \mathbf{K}_{q\alpha}^{(e)} \hat{\mathbf{K}}_{\alpha\alpha} \mathbf{K}_{\alpha\beta}^1 \left( \bar{\mathbf{K}}_{\beta\beta}^{11} \right)^{-1} \bar{\mathbf{r}}_\beta^1. \quad (\text{C.56})$$

## Dodatek D

# ANALITYCZNE OBLICZENIE WYBRANYCH CAŁEK PO GRUBOŚCI W PRZYPADKU POWŁOK FGM

Poniżej zamieszczono szczegółowe analityczne wyprowadzenie całek po grubości powłoki dla funkcji zawierających parametry materiałowe  $P$  (moduł Younga, moduł Kirchhoffa) określone na podstawie klasycznej zasady mieszanin (4.32). Całki te zostały wykorzystane w rozdziale czwartym rozprawy w celu uzyskania analitycznej postaci równań konstytutywnych.

Podczas wyznaczania równań konstytutywnych dla powłoki FGM względem środkowej powierzchni odniesienia konieczne jest wyznaczenie całek dla następujących funkcji  $P(\zeta)$ ,  $P(\zeta)\zeta$ ,  $P(\zeta)\zeta^2$ , których wyprowadzenie zaprezentowano poniżej

$$\int_{-h_0/2}^{h_0/2} P(\zeta)d\zeta = \int_{-h_0/2}^{h_0/2} P_r \left( \frac{\zeta}{h_0} + \frac{1}{2} \right)^n d\zeta + \int_{-h_0/2}^{h_0/2} P_m d\zeta = P_r \frac{h_0}{n+1} \left( \frac{\zeta}{h_0} + \frac{1}{2} \right)^{n+1} \Big|_{-h_0/2}^{h_0/2} + P_m \zeta \Big|_{-h_0/2}^{h_0/2} = \frac{P_r h_0}{n+1} + P_m h_0, \quad (D.1)$$

$$\int_{-h_0/2}^{h_0/2} P(\zeta)\zeta d\zeta = \int_{-h_0/2}^{h_0/2} P_r \zeta \left( \frac{\zeta}{h_0} + \frac{1}{2} \right)^n d\zeta + \int_{-h_0/2}^{h_0/2} P_m \zeta d\zeta, \quad (D.2)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \int_{-h_0/2}^{h_0/2} P_r \zeta \left( \frac{\zeta}{h_0} + \frac{1}{2} \right)^n d\zeta &= P_r \zeta \frac{h_0}{n+1} \left( \frac{\zeta}{h_0} + \frac{1}{2} \right)^{n+1} \Big|_{-h_0/2}^{h_0/2} - \int_{-h_0/2}^{h_0/2} P_r \frac{h_0}{n+1} \left( \frac{\zeta}{h_0} + \frac{1}{2} \right)^{n+1} d\zeta = \\ &= \frac{P_r h_0^2}{2(n+1)} - \frac{P_r h_0^2}{(n+1)(n+2)} \left( \frac{\zeta}{h_0} + \frac{1}{2} \right)^{n+2} \Big|_{-h_0/2}^{h_0/2} = \frac{P_r h_0^2}{2(n+1)} - \frac{P_r h_0^2}{(n+1)(n+2)} = P_r h_0^2 \left( \frac{1}{n+2} - \frac{1}{2(n+1)} \right) \end{aligned}, \quad (D.3)$$

$$\int_{-h_0/2}^{h_0/2} P_m \zeta d\zeta = P_m \frac{\zeta^2}{2} \Big|_{-h_0/2}^{h_0/2} = 0. \quad (D.4)$$

Po podstawieniu (D.3) i (D.4) do (D.2) uzyskuje się ostatecznie

$$\int_{-h_0/2}^{h_0/2} P(\zeta)\zeta d\zeta = P_r h_0^2 \left( \frac{1}{n+2} - \frac{1}{2(n+1)} \right). \quad (D.5)$$

Całkę dla funkcji  $P(\zeta)\zeta^2$  wyznaczono przez dwukrotne całkowanie przez części

$$\int_{-h_0/2}^{h_0/2} P(\zeta)\zeta^2 d\zeta = \int_{-h_0/2}^{h_0/2} P_r \zeta^2 \left( \frac{\zeta}{h_0} + \frac{1}{2} \right)^n d\zeta + \int_{-h_0/2}^{h_0/2} P_m \zeta^2 d\zeta, \quad (D.6)$$

gdzie

$$\int_{-h_0/2}^{h_0/2} P_m \zeta^2 d\zeta = P_m \frac{\zeta^3}{3} \Big|_{-h_0/2}^{h_0/2} = P_m \left( \frac{h_0^3}{24} + \frac{h_0^3}{24} \right) = \frac{P_m h_0^3}{12}, \quad (D.7)$$

$$\begin{aligned} \int_{-h_0/2}^{h_0/2} P_r \zeta^2 \left( \frac{\zeta}{h_0} + \frac{1}{2} \right)^n d\zeta &= P_r \zeta^2 \frac{h_0}{n+1} \left( \frac{\zeta}{h_0} + \frac{1}{2} \right)^{n+1} \Big|_{-h_0/2}^{h_0/2} - \int_{-h_0/2}^{h_0/2} 2P_r \zeta \frac{h_0}{n+1} \left( \frac{\zeta}{h_0} + \frac{1}{2} \right)^{n+1} d\zeta = \\ &= \frac{P_r h_0^3}{4(n+1)} - \frac{2P_r h_0}{n+1} \int_{-h_0/2}^{h_0/2} \zeta \left( \frac{\zeta}{h_0} + \frac{1}{2} \right)^{n+1} d\zeta \end{aligned}, \quad (D.8)$$

$$\int_{-h_0/2}^{h_0/2} \zeta \left( \frac{\zeta}{h_0} + \frac{1}{2} \right)^{n+1} d\zeta = \zeta \frac{h_0}{n+2} \left( \frac{\zeta}{h_0} + \frac{1}{2} \right)^{n+2} \Big|_{-h_0/2}^{h_0/2} - \int_{-h_0/2}^{h_0/2} \frac{h_0}{n+2} \left( \frac{\zeta}{h_0} + \frac{1}{2} \right)^{n+2} d\zeta =$$

$$= \frac{h_0^2}{2(n+2)} - \frac{h_0^2}{(n+2)(n+3)} \left( \frac{\zeta}{h_0} + \frac{1}{2} \right)^{n+3} \Big|_{-h_0/2}^{h_0/2} = \frac{h_0^2}{2(n+2)} - \frac{h_0^2}{(n+2)(n+3)} \quad . \quad (D.9)$$

W wyniku podstawienia (D.9) do (D.8) uzyskuje się

$$\int_{-h_0/2}^{h_0/2} P_r \zeta^2 \left( \frac{\zeta}{h_0} + \frac{1}{2} \right)^n d\zeta = \frac{P_r h_0^3}{4(n+1)} - \frac{2P_r h_0}{n+1} \left( \frac{h_0^2}{2(n+2)} - \frac{h_0^2}{(n+2)(n+3)} \right) =$$

$$= \frac{P_r h_0^3}{4(n+1)} - P_r h_0^3 \left( \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) = P_r h_0^3 \left( \frac{1}{4(n+1)} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} \right) \quad . \quad (D.10)$$

Ostatecznie po uwzględnieniu (D.7) i (D.10) w (D.6) otrzymano

$$\int_{-h_0/2}^{h_0/2} P(\zeta) \zeta^2 d\zeta = P_r h_0^3 \left( \frac{1}{4(n+1)} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} \right) + \frac{P_m h_0^3}{12} \quad . \quad (D.11)$$

W celu wyprowadzenia równań konstytutywnych dla powłoki FGM względem neutralnej powierzchni odniesienia wyznaczono poniżej całki dla dodatkowych funkcji:  $(\zeta - \zeta_0)P(\zeta)$ ,  $(\zeta - \zeta_0)^2 P(\zeta)$ . Ze względu na to, że zmienność materiału wzdłuż grubości jest opisana względem warstwy środkowej powłoki, zob. (4.17), to w celu uproszczenia dalszego zapisu dokonuje się zmiany granic całkowania

$$\int_{-h^-}^{h^+} P(\zeta + \zeta_0) \zeta^\alpha d\zeta = \int_{-h_0/2 - \zeta_0}^{h_0/2 - \zeta_0} P(\zeta + \zeta_0) \zeta^\alpha d\zeta = \int_{-h_0/2}^{h_0/2} P(\zeta) (\zeta - \zeta_0)^\alpha d\zeta \quad . \quad (D.12)$$

W przypadku funkcji  $(\zeta - \zeta_0)P(\zeta)$  z definicji powierzchni neutralnej wynika tożsamość

$$\int_{-h_0/2}^{h_0/2} (\zeta - \zeta_0) P(\zeta) d\zeta = 0 \quad . \quad (D.13)$$

Natomiast wyznaczenie całki dla drugiej funkcji wymaga dwukrotnego całkowania przez części:

$$\int_{-h_0/2}^{h_0/2} P(\zeta) (\zeta - \zeta_0)^2 d\zeta = \int_{-h_0/2}^{h_0/2} (\zeta - \zeta_0)^2 P_r \left( \frac{\zeta}{h_0} + \frac{1}{2} \right)^n d\zeta + \int_{-h_0/2}^{h_0/2} (\zeta - \zeta_0)^2 P_m d\zeta \quad , \quad (D.14)$$

gdzie:

$$\int_{-h_0/2}^{h_0/2} (\zeta - \zeta_0)^2 P_m d\zeta = P_m \frac{(\zeta - \zeta_0)^3}{3} \Big|_{-h_0/2}^{h_0/2} = \frac{P_m}{3} \left[ \left( \frac{h_0}{2} - \zeta_0 \right)^3 - \left( -\frac{h_0}{2} - \zeta_0 \right)^3 \right] = \frac{P_m h_0^3}{12} \left( 1 + 12 \frac{\zeta_0^2}{h_0^2} \right) \quad , \quad (D.15)$$

$$\int_{-h_0/2}^{h_0/2} (\zeta - \zeta_0)^2 P_r \left( \frac{\zeta}{h_0} + \frac{1}{2} \right)^n d\zeta = (\zeta - \zeta_0)^2 \frac{P_r h_0}{n+1} \left( \frac{\zeta}{h_0} + \frac{1}{2} \right)^{n+1} \Big|_{-h_0/2}^{h_0/2} +$$

$$- \int_{-h_0/2}^{h_0/2} 2(\zeta - \zeta_0) \frac{P_r h_0}{n+1} \left( \frac{\zeta}{h_0} + \frac{1}{2} \right)^{n+1} d\zeta = \left( \frac{h_0}{2} - \zeta_0 \right)^2 \frac{P_r h_0}{n+1} - \frac{2P_r h_0}{n+1} \int_{-h_0/2}^{h_0/2} (\zeta - \zeta_0) \left( \frac{\zeta}{h_0} + \frac{1}{2} \right)^{n+1} d\zeta \quad , \quad (D.16)$$

$$\begin{aligned}
 \int_{-h_0/2}^{h_0/2} (\zeta - \zeta_0) \left( \frac{\zeta}{h_0} + \frac{1}{2} \right)^{n+1} d\zeta &= (\zeta - \zeta_0) \frac{h_0}{n+2} \left( \frac{\zeta}{h_0} + \frac{1}{2} \right)^{n+2} \Big|_{-h_0/2}^{h_0/2} - \int_{-h_0/2}^{h_0/2} \frac{h_0}{n+2} \left( \frac{\zeta}{h_0} + \frac{1}{2} \right)^{n+2} d\zeta = \\
 &= \frac{h_0(h_0 - 2\zeta_0)}{2(n+2)} - \frac{h_0^2}{(n+2)(n+3)} \left( \frac{\zeta}{h_0} + \frac{1}{2} \right)^{n+3} \Big|_{-h_0/2}^{h_0/2} = \frac{h_0(h_0 - 2\zeta_0)}{2(n+2)} - \frac{h_0^2}{(n+2)(n+3)} =. \quad (D.17) \\
 &= \frac{-h_0\zeta_0}{n+2} + \frac{h_0^2}{(n+2)} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{n+3} \right)
 \end{aligned}$$

Uwzględnienie (D.17) w całce (D.16) daje

$$\begin{aligned}
 \int_{-h_0/2}^{h_0/2} (\zeta - \zeta_0)^2 P_r \left( \frac{\zeta}{h_0} + \frac{1}{2} \right)^n d\zeta &= \frac{P_r h_0}{n+1} \left( \frac{h_0}{2} - \zeta_0 \right)^2 - \frac{2P_r h_0}{n+1} \left[ \frac{-h_0\zeta_0}{n+2} + \frac{h_0^2}{(n+2)} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{n+3} \right) \right] = \\
 &= \frac{P_r h_0^3}{n+1} \left( \frac{1}{2} - \frac{\zeta_0}{h_0} \right)^2 - \frac{2P_r h_0^3}{(n+1)(n+2)} \left[ -\frac{\zeta_0}{h_0} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+3} \right] =. \quad (D.18) \\
 &= \frac{P_r h_0^3}{(n+1)(n+2)} \left[ n \left( \frac{1}{2} - \frac{\zeta_0}{h_0} \right)^2 + 2 \left( \frac{\zeta_0}{h_0} \right)^2 + \frac{1-n}{2(n+3)} \right]
 \end{aligned}$$

Wtedy po podstawieniu (D.15) i (D.18) do (D.14) ostatecznie uzyskano

$$\int_{-h_0/2}^{h_0/2} P(\zeta) (\zeta - \zeta_0)^2 d\zeta = \frac{P_r h_0^3}{(n+1)(n+2)} \left[ n \left( \frac{1}{2} - \frac{\zeta_0}{h_0} \right)^2 + 2 \left( \frac{\zeta_0}{h_0} \right)^2 + \frac{1-n}{2(n+3)} \right] + \frac{P_m h_0^3}{12} \left( 1 + 12 \frac{\zeta_0^2}{h_0^2} \right). \quad (D.19)$$

Natomiast we wzorze na korekcyjny współczynnik ścinania dla powłok FGM pojawia się całka  $f(\zeta)$ , którą można wyznaczyć analitycznie w następujący sposób

$$f(\zeta) = \int_{-h_0/2}^{\zeta} C(z) (z - \zeta_0) dz = \frac{1}{1-\nu^2} \left[ \int_{-h_0/2}^{\zeta} (z - \zeta_0) P_r \left( \frac{z}{h_0} + \frac{1}{2} \right)^n dz + \int_{-h_0/2}^{\zeta} P_m (z - \zeta_0) dz \right], \quad (D.20)$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 \int_{-h_0/2}^{\zeta} P_m (z - \zeta_0) dz &= P_m \frac{(z - \zeta_0)^2}{2} \Big|_{-h_0/2}^{\zeta} = \frac{P_m}{2} \left[ (\zeta - \zeta_0)^2 - \left( -\frac{h_0}{2} - \zeta_0 \right)^2 \right] = \\
 &= \frac{P_m}{2} \left( \zeta^2 - 2\zeta\zeta_0 + \zeta_0^2 - \frac{h_0^2}{4} - h_0\zeta_0 - \zeta_0^2 \right) = \frac{P_m}{2} (\zeta^2 - 2\zeta\zeta_0) - \frac{P_m}{2} \left( \frac{h_0^2}{4} + h_0\zeta_0 \right)
 \end{aligned} \quad (D.21)$$

$$\begin{aligned}
 \int_{-h_0/2}^{\zeta} (z - \zeta_0) P_r \left( \frac{z}{h_0} + \frac{1}{2} \right)^n dz &= (z - \zeta_0) \frac{P_r h_0}{n+1} \left( \frac{z}{h_0} + \frac{1}{2} \right)^{n+1} \Big|_{-h_0/2}^{\zeta} - \int_{-h_0/2}^{\zeta} P_r \frac{h_0}{n+1} \left( \frac{z}{h_0} + \frac{1}{2} \right)^{n+1} dz = \\
 &= \frac{P_r h_0}{n+1} \left[ (\zeta - \zeta_0) \left( \frac{\zeta}{h_0} + \frac{1}{2} \right)^{n+1} - 0 \right] - \frac{P_r h_0^2}{(n+1)(n+2)} \left( \frac{z}{h_0} + \frac{1}{2} \right)^{n+2} \Big|_{-h_0/2}^{\zeta} =. \quad (D.22) \\
 &= \frac{P_r h_0}{n+1} (\zeta - \zeta_0) \left( \frac{\zeta}{h_0} + \frac{1}{2} \right)^{n+1} - \frac{P_r h_0^2}{(n+1)(n+2)} \left( \frac{\zeta}{h_0} + \frac{1}{2} \right)^{n+2}
 \end{aligned}$$

Uwzględnienie (D.21) i (D.22) w (D.20) pozwala zapisać funkcję  $f(\zeta)$  w ostatecznej postaci

$$f(\zeta) = \frac{C_m}{2} (\zeta^2 - 2\zeta\zeta_0) - \frac{C_m}{2} \left( \frac{h_0^2}{4} + h_0\zeta_0 \right) + \frac{C_r h_0}{n+1} (\zeta - \zeta_0) \left( \frac{\zeta}{h_0} + \frac{1}{2} \right)^{n+1} - \frac{C_r h_0^2}{(n+1)(n+2)} \left( \frac{\zeta}{h_0} + \frac{1}{2} \right)^{n+2}, \quad (D.23)$$

gdzie  $C_m = \frac{E_m}{1-\nu^2}$ ,  $C_r = \frac{E_r}{1-\nu^2}$ .